পদার্থবিদ্যার রূপরেখা

[বি. এস্-সি. পাশ কোর্সের জন্য]

ভট্টাচার্য্য
ও
ভট্টাচার্য্য

প্রথম খণ্ড

সেন্ট্রাল বুক পাবলিশার্স

পশ্চিমবঙ্গের ও বাংলাদেশের সকল বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণীর (পাশ)
নূতন পাঠক্রম অনুসারে লিখিত

পদার্থবিদ্যার রূপরেখা

প্রথম খণ্ড

অসিতবরণ ভট্টাচার্য্য

এম্. এস্-সি., পি. এইচ্. ডি., এম্. আই. ই. টি. ই.
পদার্থবিদ্যা বিভাগ, শ্রীরামপুর কলেজ, শ্রীরামপুর

ও

রীণা ভট্টাচার্য্য

এম্. এস্-সি.
পদার্থবিদ্যা বিভাগ, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়, কলিকাতা

—এই গ্রন্থের—

প্রথম খণ্ড : সাধারণ পদার্থ বিজ্ঞান, শব্দ বিজ্ঞান, তাপ ও তাপগতিবিদ্যা এবং জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান

দ্বিতীয় খণ্ড : প্রাকৃতিক আলোক বিজ্ঞান, চৌম্বক বিজ্ঞান, স্থির ও প্রবাহী তড়িৎ-বিজ্ঞান এবং আধুনিক পদার্থ বিজ্ঞান

With Best Compliments of:-

সেন্ট্রাল বুক পাবলিশার্স
৮/১ চিন্তামণি দাস লেন • কলিকাতা ৭০০০০৯

প্রথম প্রকাশন : নভেম্বর, ১৯৮২
পরিমার্জিত দ্বিতীয় সংস্করণ : ফেব্রুয়ারী, ১৯৮৯

প্রকাশক :
শ্রীযামিনীকান্ত সেন
সেণ্ট্রাল বুক পাবলিশার্স
৮/১ চিন্তামণি দাস লেন
কলিকাতা-৭০০ ০০৯

মুদ্রক :
শ্রীঅনিলকুমার ঘোষ
দি অশোক প্রিণ্টিং ওয়ার্কস্
২০৯এ বিধান সরণি
কলিকাতা-৭০০ ০০৬

শ্রীদিলীপকুমার চৌধুরী
সরস্বতী প্রেস
১২ পটুয়াটোলা লেন
কলিকাতা-৭০০ ০০৯

শ্রীবংশীধর সিংহ
বাণী মুদ্রণ
১২ নরেন সেন স্কোয়ার
কলিকাতা-৭০০ ০০৯

দাম : ৪০ টাকা

উৎসর্গ

পরম পূজনীয়া মাতৃদেবী

শ্রীমতি সুশীলা ভট্টাচার্য্যের

শ্রীচরণে

দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা

'পদার্থবিদ্যার রূপরেখা'-র দ্বিতীয় সংস্করণ প্রকাশিত হ'ল। নবপ্রবর্তিত বিদ্যাসাগর বিশ্ববিদ্যালয় এবং পশ্চিমবঙ্গের অন্যান্য কয়েকটি বিশ্ববিদ্যালয়ের সিলেবাস অনুসরণ করতে গিয়ে বেশ কয়েকটি নতুন বিষয় পরিশিষ্টে যুক্ত করা হয়েছে, ফলে এই সংস্করণ ছাত্র ছাত্রীদের কাছে আরও বেশী উপযোগী হবে, এছাড়া কিছু বুদ্ধিদীপ্ত হ্রস্বোত্তর প্রশ্নাবলীও পরিশিষ্টে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। আশা করি, সামগ্রিকভাবে বর্তমান সংস্করণ পরীক্ষায় প্রস্তুতির দিক দিয়ে অনেক বেশী সহায়ক হবে।

কলিকাতা,   গ্রন্থকারদ্বয়

ফেব্রুয়ারী, ১৯৮৯

প্রথম সংস্করণের ভূমিকা

কলকাতা-সহ পশ্চিমবঙ্গের অন্যান্য বিশ্ববিদ্যালয়ে সর্বস্তরে শিক্ষার মাধ্যম হিসাবে বাংলা ভাষা প্রবর্তিত হওয়ার ফলে অধুনা বিজ্ঞান শিক্ষার প্রসার ঘটবার সম্ভাবনা বেশ উজ্জ্বলতর হ'তে চলেছে। এটাকে একটা সন্ধিক্ষণ বলা যেতে পারে, যে সন্ধিক্ষণে প্রয়োজন বাংলা ভাষায় রচিত সুখপাঠ্য বিজ্ঞান-বিষয়ক পুস্তক যার ভাষা হবে সহজ ও সরল, যার ব্যঞ্জনা হবে প্রামাণিক, তথ্যপূর্ণ ও নির্ভুল। এই দায়িত্বের প্রতি সচেতনতা আমাদিগকে স্নাতক (পাশ) পর্যায়ের এই গ্রন্থখানি রচনায় উদ্বুদ্ধ করেছে। এই গ্রন্থে সম্পূর্ণ অভিনব রচনাশৈলীতে ও চিত্তাকর্ষক ভঙ্গীতে পদার্থ বিজ্ঞানের দুরূহ বিষয়কে যথাসম্ভব সহজ ও স্পষ্ট ক'রে বোঝাবার চেষ্টা করেছি। বিভিন্ন বিষয়ের নির্ভুল তত্ত্ব ও তথ্য-সহ প্রতিটি পরিচ্ছেদের শেষে বহুসংখ্যক গাণিতিক উদাহরণ যোগ ক'রে ছাত্র-ছাত্রীদের পদার্থবিদ্যার আধুনিক ধারার সহিত পরিচিত করবার চেষ্টা করা হয়েছে।

এই গ্রন্থ দুই খণ্ডে সম্পূর্ণ হয়েছে ; প্রথম খণ্ডে 'সাধারণ পদার্থ বিজ্ঞান', 'শব্দ বিজ্ঞান', 'তাপবিজ্ঞান' ও 'জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান' এবং দ্বিতীয় খণ্ডে 'প্রাকৃতিক আলোক বিজ্ঞান', 'চৌম্বক বিজ্ঞান', 'স্থির ও প্রবাহী তড়িৎ-বিজ্ঞান' এবং 'আধুনিক পদার্থ বিজ্ঞান' সন্নিবেশিত হয়েছে। এই গ্রন্থে পদার্থ বিজ্ঞানের ব্যবহার্য পারিভাষিক ও আনুষঙ্গিক শব্দগুলি যথাসম্ভব বিবেচনা করা হয়েছে।

দীর্ঘদিন ধ'রে এই গ্রন্থ রচনাকালে আমরা শ্রদ্ধেয় অধ্যাপক-অধ্যাপিকাদের কাছ থেকে বহু মূল্যবান পরামর্শ ও সহযোগিতা পেয়েছি। তাঁদের প্রতি আমরা বিশেষ-ভাবে কৃতজ্ঞ। এই প্রসঙ্গে প্রকাশক শ্রীযামিনীকান্ত সেন মহাশয়ের ঐকান্তিক প্রচেষ্টার প্রশংসা করি। বইখানিকে সর্বাঙ্গসুন্দর করার যথাসাধ্য চেষ্টা তিনি করেছেন।

এ গ্রন্থ যদি ছাত্র-ছাত্রীদের পদার্থ বিজ্ঞানে আগ্রহী ক'রে তোলে এবং তাদের যথার্থ উপকারে আসে তবেই আমাদের শ্রম সার্থক মনে করবো। এ গ্রন্থের মূল্যায়নে ও উন্নয়নকল্পে যে-কোন সমালোচনা ও পরামর্শ কৃতজ্ঞতার সঙ্গে গৃহীত হবে।

কলিকাতা
মহালয়া
১৯৮২-১০-১৬

অসিতবরণ ভট্টাচার্য
রীণা ভট্টাচার্য

সূচীপত্র

সাধারণ পদার্থবিদ্যা (General Physics)

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ : তরঙ্গ গতি (Wave Motion) 36-44

তাপবিজ্ঞান এবং তাপগতিবিদ্যা
(Heat and Thermodynamics)

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ : অবস্থার সমীকরণ (Equation of State) 12-27

তৃতীয় পরিচ্ছেদ : গ্যাসের গতিতত্ত্ব (Kinetic Theory of Gases) 28-44

জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান (Geometrical Optics)

THE UNIVERSITY OF CALCUTTA

Syllabi for New Degree Course (Science)

[after 10+2-yr. Course]

Physics (Pass Course)

Session : 1978-79 and onwards.

General Physics

Mechanics :

Angular velocity and angular acceleration, Rotational motion under constant angular acceleration, Moment of inertia, Radius of gyration, Angular momentum, Theorems of moment of inertia, Energy of rotating bodies, Calculation of moment of inertia in simple cases (uniform rod, disc, ring, hollow cylinder, sphere, spherical shell, uniform lamina).

Gravitation and gravity : Gravitational constant and its determination by Poynting method, Gravitational force and potential in case of solid sphere.

Energy : Its conservation, escape velocity and satellites ; Potential and kinetic energies, Transformation of energy.

Properties of matter :

Elasticity : Elastic moduli and their interrelations ; Experimental determination of Young's modulus by Searle's method ; Work done in stretching a wire.

Cantilever—simple treatment, Depression at the free end ; Bending moment, Torsion of a tube or cylinder.

Surface tension : Surface tension and surface energy, molecular theory of surface tension, Angle of contact, Factors affecting surface tension, Capillarity, Elevation and depression of liquid columns, excess pressure inside spherical bubbles, method of determining surface tension by rise of liquid in a capillary tube.

Viscosity of liquid : Flow of incompressible fluids, Streamline and turbulent motion ; Reynold's number, Flow through a tube, Effect of viscosity of fluid on falling bodies, Poiseuille's method of determination of the coefficient of viscosity of liquid. (Correction is not necessary.)

Pump and Gauge :
Rotary pump, Diffusion pump, Mcleod gauge.

Units and Dimensions :
GGS and SI units—Principle of dimensional homogeneity.

Sound

Simple harmonic motion, Differential equation of SHM, Examples of SHM with mathematical deductions—Simple pendulum, Compound pendulum, Determination of g by Kater's pendulum

(corrections are not necessary). Composition of simple harmonic motion analytical, Lissajou's figures.

Differential equation of waves, pressure distribution in longitudinal waves in a gas ; Energy of sound wave, Mechanism of propagation through air, Interference of sound waves—Stationary waves, Nodes and antinodes, beats.

Velocity of sound wave ; Transverse wave in string, Longitudinal waves in solid and gas ; Velocity of sound in air with corrections, Kundt's tube ; frequency of sound by Helmholtz resonator, Intensity of sound, Decibel, Phon ; qualitative study of the characteristics of a good auditorium.

Heat and Thermodynamics

Thermometry : Definition of temperature, Constant volume gas thermometer, International temperature scale.

Kinetic theory of gases, Perfect gas, Boyle's law, RMS Velocity, Mean free path, Deduction of gas laws, Degrees of freedom, Statement of equipartition of energy, Dulong and Petit's law—discussion and failure of the classical theory of specific heat at low temperature.

Equation of state, Continuity of state, Experiments on the deviation of the gases from Boyle's law, Andrews' experiment and its significance, Critical constants, Van der Waals' equation—qualitative study. Law of corresponding states.

Thermal conductivity : Thermal diffusivity, Fourier equation in one dimension, Ingenhausz's and Searle's experiments, Conductivity of composite slabs, Radial flow of heat, Determination of conductivity of poor conductors (tube and plate).

Thermodynamics : First law, determination of J by continuous flow calorimeter, Relation between C_p, C_v and R. Determination of (C_p/C_v) by Clement and Desorme's method, Isothermal and adiabatic changes, Indicator diagram, Reversible and irreversible operations, Cyclic processes, Second law of thermodynamics, Carnot's cycle, Absolute scale of temperature. Entropy, its constancy in reversible cycle.

Liquefaction of air by Linde process and Phillip porous plug, liquifier, experiment and Joule-Thomson cooling, Inversion temperature. Regenerative cooling, Cooling by adiabatic expansion. Nernst vacuum calorimeter and failure of Dulong-Petit's law ; Elementary principles of refrigeration and air conditioning. Internal combustion engines—Principles of Otto and Diesel.

Radiation : Nature of radiant heat, emissive and absorptive powers, Kirchhoff's law—Simple deduction, Blackbody radiation and Stefan's law Newton's law of cooling from Stefan's law, optical pyrometer.

Geometrical optics

Fermat's principle, reflection and refraction by Fermat's principle Prisms, Dispersion and dispersive power, Deviation, Combination of prisms, Refraction at sphericial surface, Thin lenses and their combinations, Separated lens.

Chromatic aberration and spherical aberration—qualitative and quantitative study of their remedies with reference to the construction of eyepieces of Ramsden and Huygens type.

Optical instruments : Telescopes, simple and compound microscopes, magnifying power.

Basic principle of photography.

THE UN1VERSITY OF BURDWAN

Physics (Pass Course)

Syllabi for the new Two-Year Degrec Course

Session : 1978-79 and onwards.

Paper : I General Physics, Sound, Heat & Thermodynamics.

Paper : II Optics, Electrostatics, Magnetism, Current Electricity and Modern Physics.

General Physics

1. Mechanics : Angular velocity and angular acceleration, Rotational motion under constant angular acceleration, Moment of inertia, Radius of gyration.

Angular momentum, Theorems of moment of inertia, Energy of rotating bodies, Calculation of MI in simple cases (Uniform rods, tubes, spheres, uniform lamina), Experimental methods of finding MI.

2. Gravitation and gravity : Gravitational constant and its determination, Intensity of gravitation, Gravitational potential and force (Shells, hollow and solid spheres), Properties of gravitation.

3. Energy : Principle of conversion of energy ; escape velocity and satellites.

4. Elasticity : Elastic moduli and their interrelations. Experimental determination of elastic moduli, work done in stretching a wire, Simple treatment of cantilever, Flexure of beams (bending moment), torsion of a tube or cylinder, Torsional pendulums, Elasticity of liquids and gases, Boyle's law and its verification, limitations of Boyle's law.

5. Surface tension and surface energy, Molecular theory of surface tension, Angle of contact, Factors affecting surface tension, Capillarity, Elevation or depression of liquids, excess pressure inside bubbles, methods of determining surface tension, Phenomena due to surface tension.

6. Viscosity of liquids and gases, Flow of incompressible fluids, streamline and turbulent motion, Vortices, Reynold's number, flow through a tube, Poiseuille's method ; determination of the coefficient of viscosity.

7. Bernoulli's theorem (simple treatment), Venturimeter, Pitot tube, Pumps : Centrifugal pump, Rotary pump, Diffusion pump, Low pressure gauges.

8. Units and dimensions, dimensional equations.

Sound

1. SHM ; Equations of SHM ; example of SHM with mathematical deduction, Compositions of SHM's (both graphical and analytical), Lissajou's figures : Practical methods of obtaining them.

2. Propagation of sound waves : Progressive waves, Longitudinal and transverse, differential equation of waves, pressure distribution in a longitudinal wave motion in a gas, energy of sound wave, mechanism of propagation of sound through air. Sound wave interactions, Interference of sound waves, Stationary waves, nodes and antinodes, beats.

3. Velocity of sound : Velocity of sound waves, transverse waves in a string, Longitudinal waves in a rod, in a liquid and in a gas, Velocity of sound (with corrections), Experiments on the determination of velocity of sound in gases, Liquids and solids ; determination of ship's position, Doppler's effect.

4. Frequency of sound and its measurement : Modes of vibration in closed and open organ pipes, Methods of determination of frequency, sonometer, Melde's experiments, Kundt's tube, Helmholtz's resonators, tuning forks, falling plate, siren, stroboscope, electrically maintained tuning fork.

5. Sound intensity : Decibel and Phon. Quality of sound ; Tone, note and overtone, harmonics, combinational tones, Qualitative study of the characteristics of a good auditorium, speech and hearing ; Human voice, ear, consonance and dissonance, musical scales, Diatonic scale and tempered scale.

6. Electroacoustial devices ; Microphone and sound speakers, Recording and reproduction of sound, gramophone, sound film recording and reproduction ; tape recording.

Heat

1. Expansion of solids, liquids and gases, compensation of clocks and watches, Weight thermometer, co-efficient of absolute expansion. Expansion of water, corrections of barometer readings. Relation between C_p, C_v and R.

2. Kinetic theory : perfect gas ; kinetic theory of gases, RMS velocity, Mean free path, Brownian motion. Deduction of gas laws, Dulong and Petit's law, failure of the classical theory of Sp. heat at low temperatures, Specific heat of gases. Determination of C_p and C_v ; γ—its significance and determination.

3. Equation of state : continuity of state, experiments on the deviation of gases from Boyle's law and significance of Andrews experiments. Critical constant, Van der Waals' equation. Law of corresponding state.

4. Thermal conductivity and thermal diffusivity : Ingenhausz's and Forbe's experiments ; conductivity of composite slabs ; Determination of conductivity of poor conductors (tubes and plates), conductivity of good conductor.

5. Liquefaction of gases : Porous plug experiment and Joule-Thomson cooling. Inversion temperature, Regenerative cooling ; cooling by adiabatic work.

6. Radiation : Nature of radiant heat, Inverse square law, Emissive and absorptive powers ; Kirchhoff's law, Blackbody and Stefan's law, discussion of Newton's law of cooling,

Thermodynamics

First law of thermodynamics, Mechanical equivalent of heat and its determination. Isothermal and adiabatic changes, PV^{γ} = constant, conversion of heat into work, indicator diagram, Reversible and irreversible operations, Cyclic processes, Second law of thermodynamics, Carnot's cycle, Absolute scale of temperature, Entropy and its constancy in reversible cycle. Heat engine, Reciprocating steam engines and principle of Otto and Diesel cycles.

Optics (Geometrical and Physical)

1. **Geometrical optics :** Fermat principle, Reflection and refraction, Prisms : dispersion, deviation, dispersive power, combination of prisms (achromatic and for direct vision), constant deviation prism, refraction at spherical surface, theory of thin lenses and their combination, determination of the focal length of lenses, separated lenses, primary and secondary rainbows, spherical and chromatic aberrations and their remedies with special reference to the construction of objectives and eye-pieces (Ramsden and Huygens) Optical instruments : Telephotolens, telescope, simple and compound. microscopes, magnifying power, Principal of Photography. Velocity of light : Fizeau, Foucault and Michelson's experiments.

2. **Theories of light :** Electromagnetic properties of light, Huygens' principles, explanation of reflection, refraction and zone plate. Interference of light : Young's experiment Biprism, Lloyd's mirror, Newton's rings. Elementary theory of diffraction at straight edge, narrow wire, narrow slit and plane transmission grating, idea of resolving power, elementary explanation of rectilinear propagation of light.

Spectroscopes, spectrometers, Ultra-violet and infra-red light ; absorption and emission spectra ; Luminescence, scattering of light, Blue of the sky. Polarisation of light by reflection double refraction, Polariod, Nicol prism, Quarter wave plate production and detection of plane, circularly and elliptically polarised light.

THE UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

Syllabi for New Degree Course (Science)

[after 10+2 1-Year, Course]

Session 1978-79 and onwards

Physics (Pass Course)

Particle Kinetics and Dynamics :

Kinetics of two and three dimensional motions : review of elementary vector algebra ; product of two vectors with applications. Review of Newton's laws of motion, inertial coordinate systems, Galilean transformation and Galilean invariance, Application of Newtonian laws of motion with important kinds of forces (gravitational, electrostatic and magnetic forces) special theory of relativity postulates, Lorentz transformations with consequences, relativistic mass and energy and energy-momentum relation, (Mathematical deduction not necessary).

Conservation laws :

Law of conservation of linear momentum with applications, collision of two particles (elastic and inelastic collisions), law of conservation of angular momentum with examples and applications in central force motion, spin and orbital angular momentum.

Review of concepts of work and energy, work as the line integral of force, conservative and nonconservative forces, kinetic energy and work-energy theorem. Potential energy, conservation of energy.

Gravitational field and potential :

Calculation of potential and field in some special cases :—

Potential energy of a system of masses, Potential and field due to a thin spherical shells, thick shell and a solid sphere, motion in gravitational field (Kepler's laws for circular orbit. Determination of gravitational constant (Cavendish method).

Dynamics of rigid bodies :

Translation and rotation of a rigid body ; kinematics of rotation. Moment of inertia determination (disc, solid cylinder and solid sphere applications in problems).

Periodic Motion :

General kinematics. Simple harmonic motion, Solution of SHM differential equation, Dynamics of a simple harmonic oscillator, Forced harmonic oscillator, Composition and resolution of SHM.

Wave propagation :

General equation of wave motion, plane spherical waves, wave equation for transverse waves in string, longitudinal waves in solid and fluids, wave velocity, study of sound waves, energy flow in wave motion, dispersion and group velocity, Doppler effect, Ultrasonics, Generation & uses.

Elasticity, Viscosity and Surface tension :

Relation between the elastic constants, stretching and twisting of a wire or rod, bending of beams. Cantilever. Study of viscosity of liquids, flow of a liquid through a narrow tube. Poiseuille's formula viscosity of liquids. Effect of temperature and pressure.

Molecular forces of surface tension, surface energy, liquid in contact with a solid, pressure on a curved liquid surface, and applications, capillary ascent, units and dimensions.

Heat and Thermodynamics :

The gas laws, the equation state of the ideal gas, kinetic theory of gases, pressure of an ideal gas, mean free path deduction of thideal gas laws, Maxwell's law of distribution of velocities (deduction not required) and applications, real gases and equation of state of real gases critical constants, specific heat of monoatomic and polyatomic gases as function of temperature, transport phenomena of thermal conductivity and viscosity (elementary treatments). Study of Brownian motion (qualitative). Discussion on specific heat of liquids and solids, general equation of heat flow in solid and solution in simple cases. Measurement of conductivity. (One principle method Searle's method & Lee's method). Thermodynamics, isothermal, isochoric, isobaric, adiabatic processes, internal energy, statement of the first law of thermodynamics and some applications of specific heat of an ideal gas at constant volume and constant pressure, adiabatic expansion and compression gases (deduction of formula), Carnot heat engine and Carnot cycle throttling process, liquefaction of gases, statement of the second law of thermodynamics, reversible and irreversible processes, a reversed Carnoticyclc, Carnot theorem, entropy and properties of entropy for reversible and irreversible processes, thermodynamic temperature scale, Relation of heat energy, Kirchoff's law, Stefan's law. (Deduction not necessary). Solar radiation measurement, the ideal radiator (blackbody), blackbody radiation and study of radiant energy distribution laws (only qualitative discussions with mention of formulas).

The electromagnetic waves (Light) :

Deduction of laws of reflection and refraction (Huygens theory), Electromagnetic theory of light ; Propagation electromagnetic wave. Maxwell's theory of wave propagation, (Physical interpretation).

Interference phenomenon of two spherical waves, study of interference experiments such as biprism, Newton's rings application of interference phenomena of light waves. Diffraction of light wave, principle of Huygens Fresnel, discussion on approximation in geometrical optics, elementary treatment of Fresnel diffraction by a straight edge, a wire and a narrow slit, elementary treatment of Fraunhofer, diffraction by a slit, a double slit, a plane transmission granting and an aperture. Idea of resolution in spectrocopic instruments.

Polarization of light wave, plane polarized light by reflection, refraction and double refraction in crystals, phenomenon of optical activity, applications of polarization and optical activity phenomena, Faraday effect, (elementary idea).

Interaction of light with matter ; absorption, resonance and dispersion (elementary classical treatment only).

VIDYASAGAR UNIVERSITY, MIDNAPORE
UNDER-GRADUATE PHYSICS SYLLABUS
(PASS COURSE)
FIRST PAPER
Group—A

Mechanics & Properties of matter : (40 lectures)

System of Units : C. G. S. and S. 1. Units, Principles of dimensional homogeneity and its applications.

Conservation laws : Law of conservation mass and energy, Linear and angular momentum and their applications. (rocket and satellite motion).

Dynamics of rigid bodies : Moment of inertia, theorems of moment of inertia, calculation of M. I. for simple cases ; simple cases of angular motion of rigid bodies.

Gravitation : Central force, gravitational force, and potential for spherical shell and solid sphere.

Elasticity : Relation between elastic constants. Torsion of a cylinder and tube, cantilever, beam supported at its ends of loaded at the middle, work done in stretching & twisting.

Surface Tension : S.T. and S.E. angle of contact, capillarity elevation and depression of liquid columns, excess pressure inside spherical bubbles, Jaeger's method and capillary rise method to determine S.T. of liquid.

Viscosity of liquids : Flow of liquids, Bernoulli's Theorem and its applications, Reynold's Number, Poiseuille's equation, Stoke's law and its applications. Effect of temp, and press on the viscosity of liquids and gases, viscometers.

Vacuum pump and gauge : Rotary and diffusion pump ; MC Leod Gauge, and ionisation gauge.

Group—B

Heat and Thermodynamics : (40 lectures)

Kinetic Theory of Gases, Pressure of a gas, Derivation of the gas laws, Mean free path, degrees of freedom. Law of equipartition

of energy. Dulong and Petit's law, discussion and failure of the classical theory of speci'c heat at low temperature. Maxwell's velocity distribution law (qualitative discussion) average, R.M.S. and most probable velocity.

Equation of state : Results of Andrews' and Amagat's experiment, critical constants. Vander Waal's equation, Law of corresponding states.

Conductivity : Thermal and thermometric conductivity. Fourier's equation in one dimension. Radial flow of heat, determination of conductivity of poor conductors (tube and plate).

Thermodynamics : First law of thermodynamics and its applications, reversible and irreversible processes. Isothermal and adiabatic changes, Carnot's cycle and its efficiency, Second law of thermodynamics, Carnot's theorem. Absolute scale of temperature, constant volume perfect gas thermometer, entropy (Physical concept, changes in entropy in simple processes).

Production and measurement of low temperatures. J.T. effect, difference between J.T. cooling and adiabatic cooling. Magnetic cooling, liquification of hydrogen and helium. Properties of liquid helium.

Principles of Otto and Diesel engine.

Radiation : Perfect black body. Kirchoff's law, Stefan's law, pyrometer, Solar constant, Temperature of the Sun, Wien's law & R—J. law, indroduction to quantam theory of radiation. Planck's radiation formula (qualitative treatment).

Group—C

Waves & Acoustics : (20 lectures)

S.H.M. Differential equation of S.H.M.

(Examples : simple pendulum, compound pendulum)

Composition of two simple harmonic motions and Lissajous figures, Equation of plane progressive wave, general equation of wave motion, velocity of longitudinal waves in different media (solid and gas) and tranverse waves in string.

Stationary waves, (interference of waves, beats, Helmholtz, resonator, difference between resonator and pipe), Elements of ultrasonics and its applications, Elements of architectural acoustics.

Geometrical Optics : (15 lectures)

Velocity of light, its determination & importance, Fermat's Principle and its application to laws of reflection and refraction at plane surface.

Refraction at spherical surface, equivalent focal length of two thin lenses in contact and separated at a distance.

Dispersion, dispersive power, combination of prisms, (deviation without dispersion and dispersion without deviation). Chromatic and spherical aberrations and their remedies. Romsden and Huyghen's eyepiece. Basic principles of photography.

সাধারণ পদার্থবিদ্যা
(GENERAL PHYSICS)

প্রথম পরিচ্ছেদ
আবর্ত গতিবিদ্যা
(Rotational Motion)

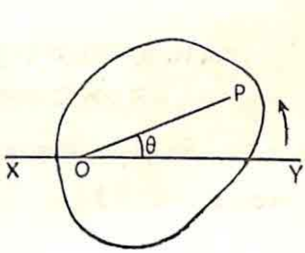
1.1 সূচনা (Introduction)

আমরা জানি, কোন পদার্থের ভিতর শক্তির আবির্ভাব হইলে উহা অপর বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করিতে পারে। পদার্থের উপর এই বলের ক্রিয়া বিজ্ঞানের যে বিভাগে আলোচনা করা হয় তাহাকে বলবিদ্যা (Mechanics) বলে। বলবিদ্যার যে অংশে বস্তুর স্থিতি সম্পর্কে আলোচিত হয় তাহাকে স্থিতিবিদ্যা (Statics) এবং যে অংশে বস্তুর গতি সম্পর্কে আলোচিত হয় তাহাকে গতিবিদ্যা (Dynamics) বলা হয়।

যখন কোন জড় বস্তু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ধরিয়া চলে এবং উহার প্রত্যেক কণার সরণ সমান হয় তখন বস্তুর গতিকে চলন (translational motion) বলে। কিন্তু বস্তুটি যদি কোন অক্ষের চতুর্দিকে ঘুরিতে থাকে এবং উহার প্রতিটি কণার কৌণিক সরণ (angular displacement) সমান হয় তবে বস্তুর গতিকে ঘূর্ণন (rotational motion) বলে।

1.2 কৌণিক বেগ ও কৌণিক ত্বরণ (Angular velocity and angular acceleration)

মনে করি, একটি জড় বস্তু O বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত একটি অক্ষ বেড়িয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিতেছে (চিত্র 1.1)। যে কোন সময় t তে, ধরা যাক, OP রেখাটি নির্দেশক রেখা XY এর সহিত θ কোণ সৃষ্টি করিল, θ কে বস্তুটির কৌণিক সরণ বলে।



চিত্র 1.1

যেহেতু সময়ের বৃদ্ধির সহিত বস্তুটির কৌণিক সরণের মান বৃদ্ধি পায়, অতএব,

$$\theta \propto t$$

অথবা, $\theta = \text{ধ্রুবক} \times t$ $\cdots(1.1)$

সমীকরণ (1.1) কে t এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া (differentiate) পাই,

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{ধ্রুবক} = \omega \qquad \cdots(1.2)$$

ধ্রুবক ω কে কণাটির কৌণিক বেগ বলে।

যদি $OP = r$ হয়, তবে P কণাটির রৈখিক সরণ

$$x = r\theta \qquad \cdots(1.3)$$

∴ কণাটির রৈখিক বেগ,

$$v=\frac{dx}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega \qquad \cdots(1.4)$$

অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান বস্তুর রৈখিক বেগ

= বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ × কৌণিক বেগ।

পূর্বোক্ত অবস্থায় বস্তুর একটি কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি হয়, যাহা কৌণিক পরিবর্তনের হারের সমান। অর্থাৎ,

$$\omega \propto t$$

অথবা, $\omega =$ ধ্রুবক $\times t$

অথবা, $\frac{d\omega}{dt}=$ ধ্রুবক $=\alpha$ …(1.5)

ধ্রুবক α কে বস্তুকণার কৌণিক ত্বরণ বলে। প্রতিটি বস্তুকণার কৌণিক বেগ সমান বলিয়া উহাদের কৌণিক ত্বরণও সমান হইবে।

কণাটির রৈখিক ত্বরণ, $f=\frac{dv}{dt}$

$$=\frac{d}{dt}(r\omega)$$

$$=r\frac{d\omega}{dt}$$

$$=r.\alpha \qquad \cdots(1.6)$$

অর্থাৎ, ঘূর্ণায়মান বস্তুর রৈখিক ত্বরণ

= বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ × কৌণিক ত্বরণ।

1.3 স্থির কৌণিক ত্বরণে ঘূর্ণন (Rotation with constant angular acceleration)

আমরা জানি,

কৌণিক ত্বরণ, $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$

বা, $d\omega=\alpha dt$

সমাকলন করিয়া (integrate) পাই

$\omega=\alpha t+A$ ($A=$ ধ্রুবক)

যখন $t=0$, তখন $\omega=\omega_o$ ($\omega_o=$ প্রারম্ভিক কৌণিক বেগ)

∴ $A=\omega_o$

এবং তখন $\omega=\alpha t+\omega_o$ …(1.7)

আবার $\omega=\frac{d\theta}{dt}$

বা, $d\theta=\omega dt$

$=(\alpha t+\omega_0)\ dt$

পুনরায় সমাকলন করিয়া পাই,

$$\theta=\omega_0 t+\tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \cdots(1.8)$$

আবার,

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$$

$$=\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

বা, $\alpha d\theta=\omega d\omega$

বা, $\alpha\theta=\frac{1}{2}\omega^2+C$ (সমাকলন করিয়া)

এখানে C হইল সমাকলন ধ্রুবক (সমাকলন অচর),

যখন $\theta=0$, তখন $\omega=\omega_0$

$\therefore\quad C=-\frac{1}{2}\omega_0^2$

অর্থাৎ, $\alpha\theta=\frac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\omega_0^2$

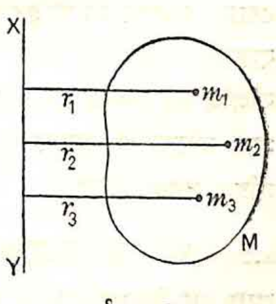
বা, $\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\theta$

অর্থাৎ, $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta \quad \cdots(1.9)$

সমীকরণ (1.7), (1.8) এবং (1.9) যথাক্রমে $v=u+ft$, $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ এবং $v^2=u^2+2fs$ সমীকরণের অনুরূপ।

1.4 জাড্য ভ্রামক ও আবর্তনের কার্যকরী বা চক্রগতির ব্যাসার্ধ (Moment of inertia and radius of gyration)

মনে করি, M ভরের কোন জড় বস্তু কৌণিক বেগ ω লইয়া XY অক্ষের চারিদিকে ঘুরিতেছে। এই চক্রগতি বা আবর্তের জন্যে বস্তু যে গতি-শক্তি পাইবে তাহাকে আবর্ত গতিশক্তি (kinetic energy due to rotation) বলে। জড় বস্তু-টিকে আমরা m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি অসংখ্য ভরের বস্তুকণায় বিভক্ত বলিয়া মনে করিতে পারি যাহাদের দূরত্ব XY অক্ষ হইতে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 ইত্যাদি (চিত্র 1.2)।



চিত্র 1.2

এক্ষেত্রে বস্তুকণাগুলি জড় বস্তুর সহিত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ থাকার ফলে উহাদের প্রত্যেকের কৌণিক বেগ ω হইবে কিন্তু অক্ষ XY হইতে উহাদের দূরত্ব অসমান বলিয়া উহাদের রৈখিক বেগ পৃথক হইবে।

ধরা যাক, m_1 বস্তুকণার রৈখিক বেগ $v_1 = r_1\omega$

$\therefore$ উহার গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2$

অনুরূপে, m_2 বস্তুকণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2$

এইভাবে প্রতিটি বস্তুকণার গতিশক্তি বাহির করিয়া যদি আমরা তাহার সমষ্টি নির্ণয় করি তবে সমগ্র বস্তুটির গতিশক্তি পাইব।

সুতরাং সমগ্র জড় বস্তুর গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3r_3^2\omega^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2[m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots]$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2 \qquad \cdots(1.10)$$

$$= \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \cdots(1.11)$$

যেখানে, $I = \Sigma mr^2$ $\qquad \cdots(1.12)$

এই I কে বলা হয় XY অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক (moment of inertia)। সুতরাং কোন অক্ষের সাপেক্ষে জড় বস্তুর জাড্য ভ্রামক বলিতে ঐ বস্তুটির প্রতিটি কণার ভর এবং অক্ষ হইতে উহাদের দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টি বুঝায়। CGS পদ্ধতিতে ইহার একক $gm.cm^2$ এবং FPS পদ্ধতিতে ইহার একক $lb.ft^2$.

আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ : আমরা দেখিয়াছি XY অক্ষের সাপেক্ষে M ভরবিশিষ্ট জড় বস্তুটির জাড্য ভ্রামক। এক্ষণে বস্তুটির সমগ্র ভর জমাট বাঁধিয়া একটি বিন্দুর আকার ধারণ করিয়াছে কল্পনা করিলাম। XY অক্ষ হইতে ঐ বিন্দু ভরকে যদি এমন এক দূরত্ব Kতে রাখা যায় যেখানে বিন্দু ভরের জাড্য ভ্রামক বস্তুটির জাড্য ভ্রামকের সমান হয় তবে ঐ দূরত্ব K কে বলা হইবে আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ। অতএব, কোন অক্ষের সাপেক্ষে জড় বস্তুর আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ বলিতে উক্ত অক্ষ হইতে এমন একটি দূরত্ব বোঝায় যেখানে বস্তুটির সমগ্র ভর বিন্দুবৎ মনে করিলে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে বিন্দুভরের জাড্য ভ্রামক বস্তুটির জাড্য ভ্রামকের সহিত সমান হইবে।

1.5 কৌণিক ভরবেগ অথবা ভরবেগের ভ্রামক (Angular momentum or Moment of momentum)

আমরা জানি, m_1 ভরের কণাটির রৈখিক বেগ v_1 হইলে উহার ভরবেগ

$$= m_1v_1 = m_1r_1\omega$$

∴ অক্ষের সাপেক্ষে কণাটির ভরবেগের ভ্রামক $= m_1 r_1 \omega \times r_1$

$$= m_1 r_1^2 \omega$$

অনুরূপে, অক্ষের সাপেক্ষে m_2 ভরের কণাটির ভরবেগের ভ্রামক $= m_2 r_2^2 \omega$। এইভাবে প্রতিটি বস্তুকণার দরুণ ভরবেগের ভ্রামক বাহির করিয়া উহাদের সমষ্টি লইলে সমগ্র জড় বস্তুটির ভরবেগের ভ্রামক বা কৌণিক ভরবেগ পাওয়া যাইবে।

∴ জড় বস্তুর কৌণিক ভরবেগ, $L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega + \cdots$

$$= \omega(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots)$$

$$= \omega \Sigma m r^2$$

$$= I.\omega \qquad \cdots(1.13)$$

যেখান, I = ঘূর্ণনের সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক। সুতরাং আমরা দেখিতেছি যে,

কৌণিক ভরবেগ = জাড্য ভ্রামক × কৌণিক বেগ।

1.6 দ্বন্দ্বের (বা বলের) ভ্রামক অথবা টর্ক (Torque)

কোন অক্ষের সাপেক্ষে চক্রগতিতে ঘূর্ণায়মান বস্তুর গতিবেগ বৃদ্ধি করিতে হইলে উহার একটি দ্বন্দ্ব (couple) প্রয়োগ করিতে হয়। প্রযুক্ত ঐ দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বলে।

বস্তুটির কৌণিক ত্বরণ $\frac{d\omega}{dt}$ হইলে, m_1 বস্তুকণার রৈখিক ত্বরণ

$$= r_1 \times \frac{d\omega}{dt}$$

∴ ঐ কণার উপর প্রযুক্ত বল = ভর × রৈখিক ত্বরণ

$$= m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt}$$

এবং বলের ভ্রামক = বল × ঘূর্ণাক্ষ হইতে কণার দূরত্ব

$$= m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt} \times r_1$$

$$= m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt}$$

অনুরূপে m_2 ভরের দরুণ বলের ভ্রামক

$$= m_2 r_2^2 \frac{d\omega}{dt}$$

এইভাবে প্রতিটি বস্তুকণার দরুণ বলের ভ্রামক বাহির করিয়া উহাদের সমষ্টি লইলে সমগ্র জড় বস্তুটির উপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের ভ্রামক বা টর্ক পাওয়া যাইবে।

$$\text{সুতরাং টর্ক (C)} = m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\omega}{dt} + m_3 r_3^2 \frac{d\omega}{dt} + \cdots$$

$$= \frac{d\omega}{dt}[m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots]$$

$$= \frac{d\omega}{dt} \cdot \quad mr^2 = \frac{d\omega}{dt} \cdot I \qquad \cdots(1.14)$$

অর্থাৎ, টর্ক = কৌণিক ত্বরণ × জড়তা ভ্রামক

যখন $\frac{d\omega}{dt} = 1$, তখন $C = I$.

1.7 জাড্য ভ্রামকের তাৎপর্য (Significance of moment of inertia)

রৈখিক গতি ও ঘূর্ণ গতির মধ্যে তুলনা করিলে আমরা নিম্নলিখিত তালিকাটি দেখিতে পাইব।

রৈখিক গতি	ঘূর্ণ গতি
(i) রৈখিক সরণ $= x$	(i) কৌণিক সরণ $= \theta$
(ii) রৈখিক বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$	(ii) কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
(iii) রৈখিক ত্বরণ, $f = \frac{d^2x}{dt^2}$	(iii) কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
(iv) রৈখিক বল, $p = mf$	(iv) কৌণিক টর্ক, $C = I\frac{d\omega}{dt} = I.\alpha$
(v) রৈখিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$	(v) কৌণিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}I\omega^2$
(vi) রৈখিক ভরবেগ $= mv$	(vi) কৌণিক ভরবেগ $= I.\omega$
(vii) রৈখিক বস্তুর ভর $= m$	(vii) জড়তা ভ্রামক $= I = \Sigma mr^2$

এই তালিকা হইতে আমরা রৈখিক গতি ও ঘূর্ণ গতির মধ্যে কতকগুলি বিষয়ে সাদৃশ্য দেখিতে পাইতেছি। যথা,

রৈখিক গতির বেলায়, গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \times$ ভর $\times$ (রৈখিক গতিবেগ $)^2$

এবং ঘূর্ণ গতির বেলায়, গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \times$ জাড্য ভ্রামক $\times$ (কৌণিক বেগ $)^2$

অথবা, রৈখিক গতিতে, বস্তুর ভরবেগ = ভর × রৈখিক গতিবেগ

এবং ঘূর্ণ গতিতে, বস্তুর কৌণিক ভরবেগ = জাড্য ভ্রামক × কৌণিক গতিবেগ।

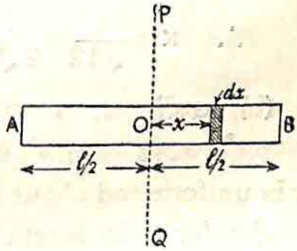
অর্থাৎ আমরা বলিতে পারি যে, রৈখিক গতিতে বস্তুর ভরের ভূমিকা এবং ঘূর্ণ গতিতে বস্তুর জাড্য ভ্রামকের ভূমিকা একই ; সুতরাং বস্তুর ভর ও জাড্য ভ্রামক সদৃশ (analogous)। কিন্তু তাই বলিয়া উহারা সমান নহে। ঘূর্ণাক্ষ যাহাই হউক না কেন, বস্তুর ভর সর্বদা একই থাকে কিন্তু পৃথক পৃথক ঘূর্ণাক্ষের ক্ষেত্রে জাড্য ভ্রামক পৃথক হইবে।

নিউটনের প্রথম গতিসূত্র হইতে আমরা জানি, বাহির হইতে কোন বল প্রয়োগ না করিলে স্থির বস্তু সর্বদা স্থির এবং গতিশীল বস্তু সর্বদা গতিশীল থাকিবে। জড় বস্তুর এই ধর্মকে জাড্য বা জড়তা (inertia) বলা হয়। এই ধর্মের দরুন জড় বস্তু তাহার অবস্থার পরিবর্তনের চেষ্টাকে বাধা দেয়। ঘূর্ণায়মান বস্তুর ক্ষেত্রেও জাড্য দেখা যায় অর্থাৎ ঘূর্ণায়মান বস্তু নিজ অবস্থা অপরিবর্তিত রাখিবার চেষ্টা করে এবং কোনরূপ পরিবর্তনে বাধা দেয়। ঘূর্ণায়মান বস্তুর এই জড়তাকে বলে জাড্য ভ্রামক।

1.8 বিভিন্ন ক্ষেত্রে জাড্য ভ্রামক ও আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ নির্ণয় (Calculation of moment of inertia and radius of gyration in different cases)

(a) **একটি সরু ও সুষম দণ্ডের দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু দিয়া এবং দৈর্ঘ্যের অভিলম্ব-ভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঐ দণ্ডের জাড্য ভ্রামক** (Moment of inertia of a thin uniform rod about an axis passing through its centre and perpendicular to its length)

চিত্র 1.3 এর ন্যায় একটি সরু ও সুষম দণ্ড AB লইলাম। উহার দৈর্ঘ্যের মধ্য বিন্দু O দিয়া এবং দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে গমনকারী PQ অক্ষের সাপেক্ষে ঐ দণ্ডের জাড্য ভ্রামক ও আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 1.3

মনে করি, দণ্ডের দৈর্ঘ্য l ও ভর M ; অতএব উহার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $=(M/l)$।

এখন অক্ষ হইতে x দূরত্বে dx দৈর্ঘ্যের একটি অতি ক্ষুদ্র অংশ লওয়া হইল যাহার ভর $=(M/l).dx$।

$\therefore$ PQ অক্ষের সাপেক্ষে dx অংশের জাড্য ভ্রামক

$$=(M/l).dx.x^2$$

উক্ত জাড্য ভ্রামকের সমাকলন $x=0$ এবং $x=l/2$ এর মধ্যে লইলে দণ্ডের এক অর্ধের জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। উহাকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া আমরা সমগ্র দণ্ডটির জাড্য ভ্রামক পাইব।

সুতরাং সমগ্র দণ্ডটির জাড্য ভ্রামক, $I=2\int_0^{l/2}\frac{M}{l}x^2dx$

$$=\frac{2M}{l}\int_0^{l/2}x^2dx$$

$$=\frac{2M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$=\frac{2M}{3l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3-0\right]$$

$$=\frac{2M}{3l}\cdot\frac{l^3}{8}$$

$$=\frac{Ml^2}{12} \qquad \cdots(1.15)$$

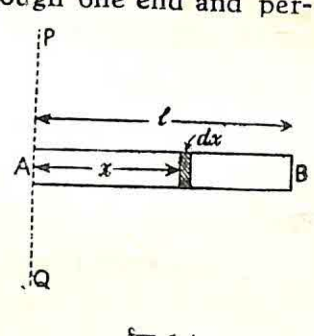
এখন, আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ K হইলে, আমরা জানি,

$$MK^2=\frac{Ml^2}{12}$$

বা, $K^2=\frac{l^2}{12}$

$$\therefore \quad K=\frac{l}{\sqrt{12}}=\frac{l}{2\sqrt{3}} \qquad \cdots(1.16)$$

(b) **একটি সরু ও সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত দিয়া এবং দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঐ দণ্ডের জাড্য ভ্রামক** (**Moment of inertia of a thin uniform rod about an axis passing through one end and perpendicular to its length**)



চিত্র 1.4

চিত্র 1.4 এর ন্যায়, মনে করি, PQ অক্ষটি AB দণ্ডের A প্রান্ত দিয়া অতিক্রম করিয়াছে এবং উহা দণ্ডটির দৈর্ঘ্যের সহিত অভিলম্বভাবে আছে। আমরা জানি, PQ অক্ষের সাপেক্ষে x দূরত্বে অবস্থিত dx দৈর্ঘ্যের জাড্যভ্রামক $=(M/l)\,.\,dx\,.\,x^2$ ।

উক্ত জাড্য ভ্রামকের সমাকলন $x=0$ এবং $x=l$ এর মধ্যে লইলে আমরা সমগ্র দণ্ডটির জাড্য ভ্রামক পাইব। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=\int_0^l (M/l).x^2.dx$$

$$=\frac{M}{l}\int_0^l x^2dx$$

$$=\frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$=\frac{M}{3l}\left[(l)^3-0\right]$$

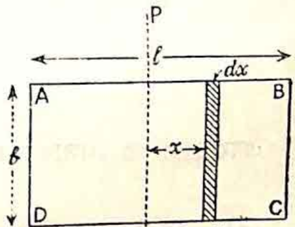
$$=\frac{M}{3l}.l^3$$

$$=\frac{Ml^2}{3} \qquad \cdots(1.17)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\frac{l}{\sqrt{3}}$ $\cdots(1.18)$

(c) **একটি পাতলা ও সুষম আয়তাকার পাতের ভরকেন্দ্র দিয়া এবং যে কোন একটি ধারের সমান্তরালভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঐ পাতের জাড্য ভ্রামক** (Moment of inertia of a thin uniform rectangular lamina about an axis passing through its centre of mass and parallel to one of its sides)

চিত্র 1.5 এর ন্যায়, ABCD একটি পাতলা, সুষম আয়তাকার পাত লওয়া হইল। ঘূর্ণাক্ষ PQ আয়তাকার পাতের কেন্দ্রবিন্দু দিয়া এবং যে কোন একটি বাহু AD অথবা BC এর সমান্তরালভাবে গিয়াছে। আয়তাকার পাতটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে l ও b এবং ভর M হইলে, উহার প্রতি একক ক্ষেত্রফলে ভর $=(M/l.b)$



চিত্র 1.5

মনে করি, PQ অক্ষ হইতে x দূরত্বে dx দৈর্ঘ্যের এবং b প্রস্থের একটি ফালি আছে। ঐ ফালির ভর $=\frac{M}{l.b}\cdot b.dx=\frac{M}{l}.dx$

$\therefore$ ঐ ফালিটির জাড্য ভ্রামক $=\frac{M}{l}.dx.x^2$

এখন উক্ত জাড্য ভ্রামকের সমাকলন $x=0$ এবং $x=l/2$ এর মধ্যে লইলে এবং ফলাফলের দ্বিগুণ করিলে সমগ্র পাতটির জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I = 2\int^{l/2} \frac{M}{l}x^2dx$$

$$= \frac{2M}{l}\int_0^{l/2} x^2dx$$

$$= \frac{2M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$= \frac{2M}{3l}\left[(l/2)^3 - 0\right]$$

$$= \frac{2M}{3l} \cdot \frac{l^3}{8}$$

$$= \frac{Ml^2}{12} \quad \cdots (1.19)$$

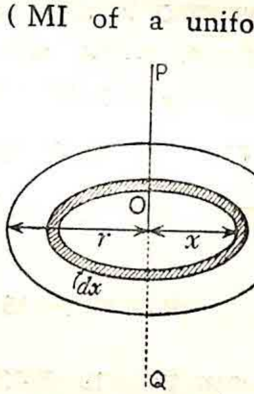
এবং চক্রগতির বা আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ $\cdots(1.20)$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ঘূর্ণাক্ষ প্রস্থের সমান্তরাল না হইয়া দৈর্ঘ্যের সমান্তরাল হইলে ঐ আয়তাকার পাতের জাড্য ভ্রামক,

$$I = \frac{Mb^2}{12} \quad \cdots(1.21)$$

এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ $\cdots(1.22)$

(d) **একটি সুষম গোল চাক্তির কেন্দ্রবিন্দু দিয়া ও উহার তলের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঐ চাকতির জাড্য ভ্রামক** (MI of a uniform circular disc about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane)



চিত্র 1.6

চিত্র 1.6 এর ন্যায়, মনে করি, ঘূর্ণাক্ষ PQ একটি গোল চাক্তির কেন্দ্রবিন্দু O এর মধ্য দিয়া চাক্তির তলের অভিলম্বভাবে গিয়াছে। ঐ অক্ষের সাপেক্ষে চাক্তির তলের জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করিতে হইবে। যদি চাক্তির ব্যাসার্ধ r এবং ভর M হয় তবে উহার ক্ষেত্রফল হইবে πr^2। সুতরাং চাক্তির প্রতি একক ক্ষেত্রফলে ভর $= (M/\pi r^2)$।

অক্ষ হইতে x দূরত্বে চাক্‌তিটির উপর একটি সরু বলয় কল্পনা করিলাম। ঐ বলয়ের ব্যাসার্ধ x এবং প্রস্থ dx।

এখন, বলয়টির ক্ষেত্রফল

= বলয়ের পরিধি × বলয়ের প্রস্থ

$$=2\pi x.dx$$

এবং উহার ভর

= বলয়ের ক্ষেত্রফল × চাক্‌তির একক ক্ষেত্রফলের ভর

$$=2\pi x.dx.\frac{M}{\pi r^2}$$

∴ অক্ষ PQ এর সাপেক্ষে সরু বলয়টির জাড্য ভ্রামক

= বলয়ের ভর × উহার ব্যাসার্ধের বর্গ

$$=2\pi x.dx.\ \frac{M}{\pi r^2}.x^2$$

$$=\frac{2M}{r^2}x^3dx$$

এক্ষণে যেহেতু সমগ্র চাক্‌তিকে ঐরূপ অনেকগুলি এককেন্দ্রী বলয়ে ভাগ করা যাইতে পারে, সুতরাং উক্ত জাড্য ভ্রামকের সমাকলন $x=0$ এবং $x=r$ এর মধ্যে লইলে আমরা সমগ্র চাক্‌তিটির জাড্য ভ্রামক পাইব। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=\int_0^r\frac{2M}{r^2}x^3dx$$

$$=\frac{2M}{r^2}\int_0^r x^3dx$$

$$=\frac{2M}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$=\frac{2M}{4r^2}\left[r^4-0\right]$$

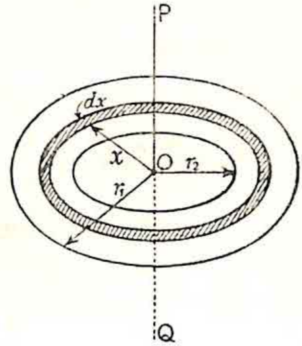
$$=\frac{2M}{4r^2}.r^4$$

$$=\frac{Mr^2}{2} \qquad \cdots(1.23)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\frac{r}{\sqrt{2}}$ $\qquad \cdots(1.24)$

(e) একটি চ্যাপ্টা বলয়ের কেন্দ্র দিয়া ও উহার তলের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঐ বলয়ের জাড্য ভ্রামক (M I of a flat ring about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane)

একটি গোল চাক্তির মধ্যস্থল হইতে সমকেন্দ্রিক একটি ছোট গোল চাক্তি কাটিয়া লইলে একটি চ্যাপ্টা বলয় পাওয়া যাইবে। মনে করি, ঐরূপ একটি চ্যাপ্টা বলয়ের বাহিরের ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে (r_1 ও r_2)। ঐ বলয়ের কেন্দ্রবিন্দু O দিয়া এবং বলয়ের তলের অভিলম্বভাবে ঘূর্ণাক্ষ PQ অতিক্রম করিয়াছে (চিত্র 1.7)। ঐ অক্ষের সাপেক্ষে বলয়ের জাড্য ভ্রামক বাহির করিতে হইবে।



চিত্র 1.7

এখন, চ্যাপ্টা বলয়ের উপরতলের ক্ষেত্রফল

$= r_1$ ব্যাসার্ধের চাক্তির উপরতলের ক্ষেত্রফল $- r_2$ ব্যাসার্ধের চাক্তির উপরতলের ক্ষেত্রফল

$$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$$
$$= \pi(r_1^2 - r_2^2)$$

বলয়ের ভর M হইলে উহার প্রতি একক ক্ষেত্রফলে ভর

$$= \frac{M}{\pi(r_1^2 - r_2^2)}$$

বলয়টিকে অনেকগুলি সরু রিং-এর সমষ্টি হিসাবে মনে করা যাইতে পারে। ঐরূপ একটি এককেন্দ্রী রিং-এর ব্যাসার্ধ x এবং প্রস্থ dx হইলে, উহার উপরতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi x.dx$ এবং উহার ভর $= \frac{M}{\pi(r_1^2 - r_2^2)} \cdot 2\pi x.dx$

$$= \frac{2Mx}{(r_1^2 - r_2^2)} dx$$

∴ অক্ষ PQ এর সাপেক্ষে ঐ রিং-এর জাড্য ভ্রামক

$$= \frac{2Mx.dx}{(r_1^2 - r_2^2)} \cdot x^2$$

$$= \frac{2M}{(r_1^2 - r_2^2)} x^3 dx$$

উক্ত জাড্য ভ্রামককে $x = r_2$ এবং $x = r_1$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে আমরা সমগ্র বলয়ের জাড্য ভ্রামক পাইব। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=\int_{r_2}^{r_1} \frac{2M}{(r_1^2-r_2^2)} x^3dx$$

$$=\frac{2M}{(r_1^2-r_2^2)}\int_{r_2}^{r_1} x^3dx$$

$$=\frac{2M}{(r_1^2-r_2^2)}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{r_2}^{r_1}$$

$$=\frac{M}{2(r_1^2-r_2^2)}[r_1^4-r_2^4]$$

$$=\frac{M}{2}(r_1^2+r_2^2) \quad \cdots (1.25)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}$ $\cdots(1.26)$

চ্যাপ্টা বলয়ের পরিবর্তে যদি সরু বলয় বা রিং হয় তবে,

$$r_1=r_2=r$$

এবং তখন জাড্য ভ্রামক

$$=\frac{M}{2}(r^2+r^2)$$

$$=Mr^2 \quad \cdots(1.27)$$

(f) **নিজ অক্ষের সাপেক্ষে একটি ফাঁপা চোঙের জাড্য ভ্রামক** (M I of a hollow cylinder about its own axis)

একটি ফাঁপা চোঙকে উহার অক্ষের অভিলম্বভাবে কতকগুলি চ্যাপ্টা বলয়ে ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে। মনে করি, সমগ্র চোঙটির ভর M এবং একটি বলয়ের ভর m। চোঙটির বাহিরের ব্যাসার্ধ r_1 এবং ভিতরের ব্যাসার্ধ r_2 হইলে, চোঙের অক্ষের সাপেক্ষে যে কোন একটি চ্যাপ্টা বলয়ের জাড্য ভ্রামক

$$=\frac{\text{বলয়ের ভর}}{2}[(\text{বাহিরের ব্যাসার্ধ})^2+(\text{ভিতরের ব্যাসার্ধ})^2]$$

$$=\frac{m}{2}(r_1^2+r_2^2)$$

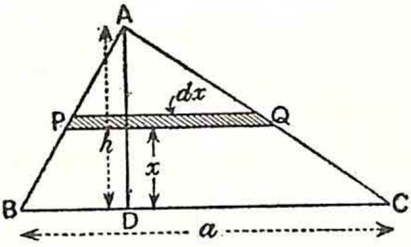
যেহেতু সমগ্র চোঙটি অসংখ্য চ্যাপ্টা বলয়ের সমষ্টি, সুতরাং চোঙের জাড্য-ভ্রামক $=\sum\frac{M}{2}(r_1^2+r_2^2)$

$$=\frac{M}{2}(r_1^2+r_2^2) \quad \cdots(1.28)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}$ $\cdots(1.29)$

(g) যে কোন পার্শ্বের সাপেক্ষে একটি ত্রিভুজাকৃতি পাতের জাড্য ভ্রামক (MI of a triangular lamina about one of its sides)

চিত্র 1.8 এর ন্যায়, একটি ত্রিভুজাকৃতি পাত ABC লইলাম। উহার জাড্য ভ্রামক BC পার্শ্বের সাপেক্ষে নির্ণয় করিতে হইবে।



চিত্র 1.8

মনে করি, ভূমি BC $=a$

উচ্চতা AD $=h$

এবং তলমাত্রিক ঘনত্ব $=\rho$

$\therefore$ ঐ পাতের ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা)

$=\frac{1}{2}\, a.h$

এবং পাতের ভর, $M=\frac{1}{2}a.h.\rho$

মনে করি, BC পার্শ্ব হইতে x দূরত্বে dx প্রস্থচ্ছেদের একটি সরু ফালি PQ লইলাম। উহার ক্ষেত্রফল $=PQ\times dx$

এখন, $\frac{PQ}{BC}=\frac{h-x}{h}$

বা, $PQ=BC.\frac{h-x}{h}$

$=a.\frac{h-x}{h}$

$\therefore$ ঐ ফালির ক্ষেত্রফল $=\frac{a(h-x)}{h}dx$

এবং উহার ভর $=\frac{a(h-x)}{h}.\rho.dx$

সুতরাং, BC অক্ষের সাপেক্ষে ফালিটির জাড্য ভ্রামক

$$=\frac{a(h-x)}{h}.\rho.dx.x^2$$

উক্ত জাড্য ভ্রামককে $x=0$ এবং $x=h$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে আমর সমগ্র পাতের জাড্য ভ্রামক পাইব। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=\int_0^h \frac{a(h-x)}{h}.\rho x^2 dx$$

$$=\frac{a\rho}{h}\left[\int_0^h hx^2dx-\int_0^h x^3dx\right]$$

$$=\frac{a\rho}{h}\left[\frac{h^4}{3}-\frac{h^4}{4}\right]$$

$$=\frac{a\rho h^3}{12} \quad \cdots(1.30)$$

কিন্তু পাতের ভর, $M=\frac{1}{2}a\rho h$

অর্থাৎ, $\rho=\frac{2M}{ah}$

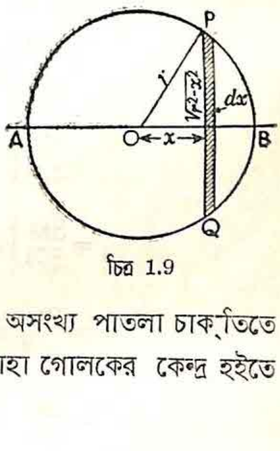
$$\therefore \quad I=\frac{ah^3}{12}\cdot\frac{2M}{ah}$$

$$=\frac{Mh^2}{6} \quad \cdots(1.31)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\frac{h}{\sqrt{6}}$ $\cdots(1.32)$

(h) **যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে একটি নিরেট গোলকের জাড্য ভ্রামক** (M I of a solid sphere about a diameter)

চিত্র 1.9 এর ন্যায়, যে কোন একটি নিরেট গোলক লওয়া হইল যাহার কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ r ও ভর M।



চিত্র 1.9

গোলকের আয়তন $=\frac{4}{3}\pi r^3$

এবং উহার ঘনত্ব $=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$

$$=\frac{3M}{4\pi r^3}$$

গোলকটিকে আমরা AB অক্ষের সহিত অভিলম্বভাবে অসংখ্য পাতলা চাকতিতে ভাগ করিলাম। মনে করি PQ ঐরূপ একটি চাকতি যাহা গোলকের কেন্দ্র হইতে x দূরত্বে অবস্থিত এবং উহার প্রস্থ dx।

এখন, পাতলা চাকতির ব্যাসার্ধ $=\sqrt{r^2-x^2}$

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2$

সুতরাং চাকতির আয়তন = ক্ষেত্রফল × প্রস্থ

$$=\pi(r^2-x^2)dx$$

$\therefore$ PQ চাকতিটির ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$=\pi(r^2-x^2)dx\times\frac{3M}{4\pi r^3}$$

$$=\frac{3M}{4r^3}(r^2-x^2)dx$$

এখন, চাক্তির জাড্য ভ্রামক

$$=\tfrac{1}{2}\times \text{ভর}\times(\text{ব্যাসার্ধ})^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\times\frac{3M}{4r^3}(r^2-x^2)dx\times(\sqrt{r^2-x^2})^2$$

$$=\frac{3M}{8r^3}(r^2-x^2)^2.dx$$

উক্ত জাড্য ভ্রামককে $x=0$ এবং $x=r$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে গোলকের এক-অর্ধের জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। উহাকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া আমরা সমগ্র গোলকটির জাড্য ভ্রামক পাইব। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=2\int_0^r\frac{3M}{8r^3}(r^2-x^2)^2\,dx$$

$$=\frac{3M}{4r^3}\int_0^r(r^4-2r^2x^2+x^4)dx$$

$$=\frac{3M}{4r^3}\left[r^4\int_0^r dx-2r^2\int_0^r x^2dx+\int_0^r x^4dx\right]$$

$$=\frac{3M}{4r^3}\left[r^5-2r^2\left(\frac{r^3}{3}\right)+\frac{r^5}{5}\right]$$

$$=\frac{3M}{4r^3}\left[r^5-\frac{2r^5}{3}+\frac{r^5}{5}\right]$$

$$=\frac{3M}{4r^3}\times r^5\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right]$$

$$=\frac{3M}{4r^3}\times\frac{8r^5}{15}$$

$$=\tfrac{2}{5}Mr^2 \qquad \cdots(1.33)$$

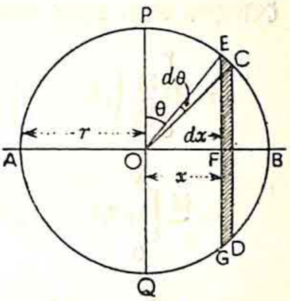
এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\sqrt{\frac{2}{5}}r$ $\cdots(1.34)$

(i) যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে একটি পাতলা গোলীয় খোলকের জাড্য ভ্রামক (MI of a thin spherical shell about a diameter)

চিত্র 1.10 এর ন্যায় একটি গোলীয় খোলক লওয়া হইল যাহার কেন্দ্র বিন্দু O এবং ব্যাসার্ধ r। AB কে অক্ষ করিয়া আবর্তনরত খোলকটির জাড্য ভ্রামক নির্ণয়

করিতে হইবে। এক্ষেত্রে, খোলকটির উপরতলের ক্ষেত্রফল $=4\pi r^2$ এবং ভর M হইলে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে ভর $= M/4\pi r^2$.

এখন O বিন্দু হইতে x দূরত্বে EG তল এবং $x+dx$ দূরে CD তল কল্পনা করা হইল। অতএব, দুই সমান্তরাল তল দ্বারা বেষ্টিত খোলকের পাতলা অংশটি একটি সরু রিং-এর আকার পাইবে যাহার ব্যাসার্ধ EF এবং প্রস্থ EC। চিত্র হইতে দেখিতে পাই,



চিত্র 1.10

ব্যাসার্ধ $EF = OE \cos\theta$

$= r\cos\theta$

এবং প্রস্থ $EC = r.d\theta$

$\therefore$ পাতলা অংশের ক্ষেত্রফল = পরিধির দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

$$= 2\pi r\cos\theta \times r d\theta$$

$$= 2\pi r^2 \cos\theta . d\theta$$

এবং ঐ পাতলা অংশের ভর $= \dfrac{M}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r^2 \cos\theta\, d\theta$

$$= \frac{M}{2}\cos\theta\, d\theta$$

আবার, চিত্র 1.10 হইতে আমরা লিখিতে পারি,

$$x = r\sin\theta$$

বা, $dx = r\cos\theta\, d\theta$

বা, $\cos\theta\, d\theta = \dfrac{dx}{r}$

$\therefore$ পাতলা অংশের ভর $= \dfrac{M}{2} \cdot \dfrac{dx}{r}$

সুতরাং রিং-এর জাড্য ভ্রামক = ভর × (ব্যাসার্ধ)^2

$$= \frac{M}{2r}dx \times (EF)^2$$

$$= \frac{M}{2r}dx(r^2 - x^2)$$

$$= \frac{M}{2r}(r^2 - x^2)dx$$

উক্ত জাড্য ভ্রামককে $x=0$ এবং $x=r$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে আমরা খোলকের এক অর্ধের জাড্য ভ্রামক পাইব। উহাকে 2 দ্বারা গুণ করিলে সমগ্র খোলকের জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=2\int_0^r \frac{M}{2r}\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$=\frac{M}{r}\left[\int_0^r r^2dx-\int_0^r x^2dx\right]$$

$$=\frac{M}{r}\left[r^3-\frac{r^3}{3}\right]$$

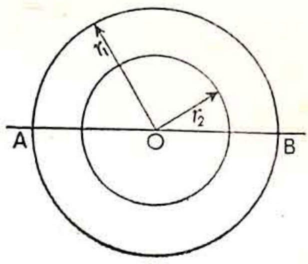
$$=\tfrac{2}{3}Mr^2 \qquad \cdots(1.35)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,r \qquad \cdots(1.36)$

(j) যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে একটি ফাঁপা গোলক বা পুরু খোলকের জাড্য ভ্রামক (MI of a hollow sphere or a thick shell about any of its diameters)

চিত্র **1.11** এর ন্যায়, r_1 ব্যাসার্ধের একটি বড় নিরেট গোলক হইতে r_2 ব্যাসার্ধের একটি ছোট নিরেট গোলক কাটিয়া লইলে একটি ফাঁপা গোলক বা পুরু খোলক পাওয়া যাইবে।

এখন AB অক্ষকে কেন্দ্র করিয়া ফাঁপা গোলকটি আবর্তন করিলে, উহার জাড্য ভ্রামক হইবে একই অক্ষের সাপেক্ষে r_1 ব্যাসার্ধের নিরেট গোলকের জাড্য ভ্রামক ও r_2 ব্যাসার্ধের নিরেট গোলকের জাড্য ভ্রামকের বিয়োগফলের সমান।



চিত্র 1.11

এক্ষণে, বড় গোলকের আয়তন $=\tfrac{4}{3}\pi r_1^3$

এবং উহার ভর $=\tfrac{4}{3}\pi r_1^3\rho$ ($\rho=$ ফাঁপা গোলকের ঘনত্ব)

আবার, ছোট গোলকের আয়তন $=\tfrac{4}{3}\pi r_2^3$

এবং উহার ভর $=\tfrac{4}{3}\pi r_2^3\rho$

সুতরাং ফাঁপা গোলকটির আয়তন $=\tfrac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)$

এবং উহার ভর $=\tfrac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3)\rho$

∴ AB ব্যাসের সাপেক্ষে বড় গোলকের জাড্য ভ্রামক

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\pi r_1^3\rho\times r_1^2$

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\pi r_1^5\rho$

অনুরূপে, AB ব্যাসের সাপেক্ষে ছোট গোলকের জাড্য ভ্রামক

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\pi r_2^3\rho\times r_2^2$

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\pi r_2^5\rho$

∴ ফাঁপা গোলকটির জাড্য ভ্রামক,

$I=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\times\pi\rho(r_1^5-r_2^5)$

কিন্তু আমরা জানি, ফাঁপা গোলকের ভর, $M=\frac{4}{3}\pi(r_1^3-r_2^3).\rho$

বা, $\rho=\frac{3M}{4\pi}\cdot\frac{1}{(r_1^3-r_2^3)}$

সুতরাং $I=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}\times\pi\times\frac{3M}{4\pi}\cdot\frac{1}{(r_1^3-r_2^3)}\left(r_1^5-r_2^5\right)$

$$=\frac{2M}{5}\frac{r_1^5-r_2^5}{r_1^3-r_2^3} \qquad \cdots(1.37)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{r_1^5-r_2^5}{r_1^3-r_2^3}}$ ···(1.38)

1.9 জাড্য ভ্রামক নির্ণয়সংক্রান্ত দুইটি উপপাদ্য (Two theorems for the calculation of moment of inertia)

নিম্নে আলোচিত জাড্য ভ্রামক সংক্রান্ত উপপাদ্য দুইটির সাহায্যে কোন বস্তুর কোন একটি বিশেষ অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামকের মান বাহির করা যায়। এই উপপাদ্য দুইটি হইল : (a) লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য (Theorem of perpendicular axes এবং (b) সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য (Theorem of parallel axes)।

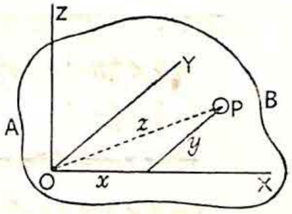
(a) লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য (Theorem of perpendicular axes)

কোন সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুইটি পরস্পর লম্ব অক্ষ OX ও OY বরাবর ইহাদের জাড্য ভ্রামক যদি যথাক্রমে I_x ও I_y হয় তবে ইহাদের সমষ্টি (I_x+I_y) ঐ দুই অক্ষের ছেদবিন্দু O দিয়া এবং পাতের তলের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষ OZ সাপেক্ষে পাতের জড়তা ভ্রামক I_z এর সমান হইবে। অর্থাৎ, $I_z=I_x+I_y$.

মনে করি, OX ও OY দুইটি পরস্পর লম্ব অক্ষ সমতল পাত AB এর উপর অবস্থিত (চিত্র 1.12)। এখন O বিন্দুতে OX ও OY পাতের উপর OZ অভিলম্ব

টানা হইল এবং ঐ পাতের উপর m ভরের যে কোন একটি বস্তুকণা P ধরা হইল। X ও Y অক্ষ থেকে কণার দূরত্ব যথাক্রমে y ও x এবং O বিন্দু থেকে কণার দূরত্ব z হইলে,

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad \cdots(1.39)$$



চিত্র 1.12

এখন, OX অক্ষ সাপেক্ষে ঐ কণার জাড্য ভ্রামক $= my^2$; পাতটি অসংখ্য কণার সমষ্টি বলিয়া OX অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জাড্য ভ্রামক,

$$I_x = \Sigma my^2 \qquad \cdots(1.40)$$

অনুরূপে OY অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জাড্য ভ্রামক,

$$I_y = \Sigma mx^2 \qquad \cdots(1.41)$$

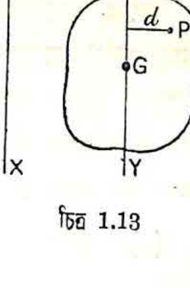
অতএব,

$$\begin{aligned} I_x + I_y &= \Sigma my^2 + \Sigma mx^2 \\ &= \Sigma m(x^2+y^2) \\ &= \Sigma mz^2 = I_z \end{aligned} \qquad \cdots(1.42)$$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

(b) সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য (Theorem on parallel axes)

যে কোন অক্ষের সাপেক্ষে কোন বস্তুর জাড্য ভ্রামক ভরকেন্দ্র দিয়া অতিক্রান্ত ঐ অক্ষের সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক এবং ঐ বস্তুর ভর ও দুই অক্ষের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্বের বর্গের ঘনফলের সমষ্টি হয়।



চিত্র 1.13

ধরা যাক, যে কোন একটি অক্ষ XX' এর সমান্তরাল আর একটি অক্ষ YY' লওয়া হইল (চিত্র 1.13)। অক্ষ YY' বস্তুর ভরকেন্দ্র G এর মধ্য দিয়া অতিক্রম করিয়াছে। XX' ও YY' অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক যথাক্রমে I_x ও I_y. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$I_x = I_y + Mh^2$$

যেখানে, M = বস্তুর ভর,

এবং h = XX' ও YY' এর মধ্যে লম্ব দূরত্ব।

মনে করি, m ভরের কোন বস্তুকণা YY' অক্ষ থেকে d দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দুতে আছে। অতএব, XX' অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটি জাড্য ভ্রামক $= m(d+h)^2$। যেহেতু বস্তুটি এইরূপ অসংখ্য ছোট ছোট বস্তুকণার দ্বারা গঠিত, সুতরাং XX' অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র বস্তুটির জাড্য ভ্রামক,

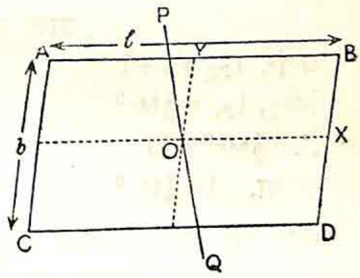
$$I_x = \Sigma m(d+h)^2$$
$$= \Sigma m(d^2+2dh+h^2)$$
$$= \Sigma md^2+2h\Sigma md+h^2\Sigma m$$
$$= I_y+Mh^2+2h\Sigma md \qquad (\because \quad \Sigma md^2 = I_y)$$
$$= I_y+Mh^2+0$$
$$\therefore \quad I_x = I_y+Mh^2 \tag{1.43}$$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

1.9.1 উপপাদ্যদ্বয়ের প্রয়োগ (Applications of the theorems)

(a) **পাতলা ও সুষম আয়তাকার পাতের ভরকেন্দ্র দিয়া এবং অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ঐ পাতের জাড্য ভ্রামক** (MI of a thin uniform rectangular lamina about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane)

একটি পাতলা ও সুষম আয়তাকার পাত ABCD লওয়া হইল (চিত্র 1.14)। PQ অক্ষটি আয়তাকার পাতটির সহিত অভিলম্বভাবে উহার ভরকেন্দ্র O দিয়া গিয়াছে। PQ অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জাড্য ভ্রামকের মান নির্ণয় করিতে হইবে। মনে করি, পাতটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও ভর যথাক্রমে l, b ও M.



চিত্র 1.14

এক্ষণে, AB বাহুর সমান্তরাল ও O বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত অক্ষ OX এর সাপেক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামক,

$$I_x = \frac{Mb^2}{12} \qquad \cdots(1.44)$$

অনুরূপে, AC বাহুর সমান্তরাল ও O বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত অক্ষ OY এর সাপেক্ষে পাতের জাড্য ভ্রামক,

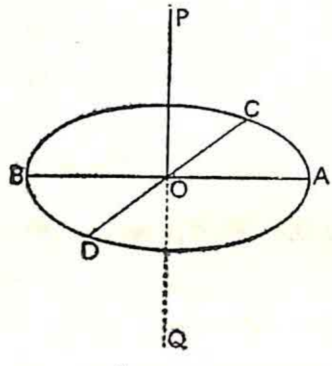
$$I_y = \frac{Ml^2}{12} \qquad \cdots(1.45)$$

সুতরাং লম্ব-অক্ষ উপপাদ্য অনুযায়ী PQ অক্ষের সাপেক্ষে আয়তাকার পাতের জাড্য ভ্রামক,

$$I_{PQ} = I_x + I_y$$
$$= \frac{M}{12}(l^2+b^2) \qquad \cdots(1.46)$$

(b) **যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে পাতলা গোল চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক** (MI of a thin circular disc about any diameter)

মনে করি, AB ও CD গোল চাক্‌তির তলে অবস্থিত পরস্পর সমকোণী দুইটি ব্যাস (চিত্র 1.15)। উহাদের ছেদবিন্দু O দিয়া PQ অক্ষটি অতিক্রম করিয়াছে এবং উহা চাক্‌তির তলের সহিত অভিলম্বভাবে রহিয়াছে। যদি AB ব্যাসের সাপেক্ষে চাক্‌তিটির জাড্য ভ্রামক I ধরা হয় তবে CD ব্যাসের সাপেক্ষে ও চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক I হইবে। ধরা যাক, চাক্‌তিটির ভর M এবং ব্যাসার্ধ r।



চিত্র 1.15

এখন, লম্ব-অক্ষ উপপাদ্য অনুসারে

PQ অক্ষের সাপেক্ষে চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক
= AB ব্যাসের সাপেক্ষে চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক + CD ব্যাসের সাপেক্ষে চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক

অর্থাৎ, $I_{PQ} = I + I$ ...(1.47)

কিন্তু, $I_{PQ} = \frac{1}{2}Mr^2$ ...(1.48)

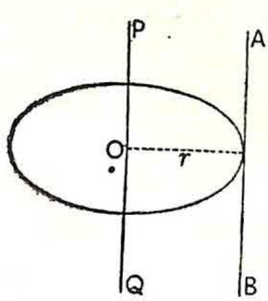
$\therefore \frac{1}{2}Mr^2 = 2I$

বা, $I = \frac{1}{4}Mr^2$ ...(1.49)

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K = \frac{r}{2}$ ...(1.50)

(c) **পাতলা গোল চাক্‌তির পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী স্পর্শকের সাপেক্ষে চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক** (MI of a thin circular disc about a tangent perpendicular to its plane)

মনে করি, M ভরবিশিষ্ট এবং r ব্যাসার্ধের একটি গোল চাক্‌তির পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী AB একটি স্পর্শক (চিত্র 1.16)। চাক্‌তির O বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত অক্ষ PQ স্পর্শক ABর সহিত সমান্তরাল। এক্ষণে, সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য অনুসারে,



চিত্র 1.16

$$I_{AB} = I_{PQ} + Mr^2 \quad \cdots(1.51)$$

কিন্তু, $I_{PQ} = \frac{Mr^2}{2}$

$$\therefore \quad I_{AB} = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2$$

$$= \frac{3}{2}Mr^2 \quad \cdots(1.52)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r$ ...(1.53)

স্পর্শক AB যদি চাক্‌তির তলে অবস্থিত হয়, তবে সেক্ষেত্রে উহার সমান্তরাল এবং চাক্‌তির তলে অবস্থিত একটি ব্যাস PQ লইতে হইবে। এখন সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য অনুসারে লিখিতে পারি,

$$I_{AB}=I_{PQ}+Mr^2$$

কিন্তু ব্যাসের সাপেক্ষে চাক্‌তির জাড্য ভ্রামক,

$$I_{PQ}=\frac{Mr^2}{4}$$

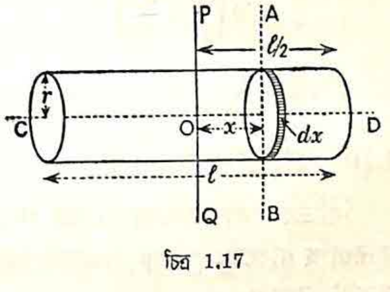
$$\therefore \quad I_{AB}=\frac{Mr^2}{4}+Mr^2$$

$$=\tfrac{5}{4}Mr^2 \qquad \cdots(1.54)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\frac{\sqrt{5}}{2}r$ $\cdots(1.55)$

(d) **ভারকেন্দ্র দিয়া ও উহার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে একটি নিরেট চোঙের জাড্য ভ্রামক** (MI of a solid circular cylinder about an axis passing through its centre of gravity and perpendicular to its length)

মনে করি, PQ একটি ঘূর্ণাক্ষ যাহা চোঙের ভারকেন্দ্র O দিয়া ও চোঙের দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে গমন করিয়াছে। CD হইল নিরেট চোঙটির নিজস্ব অক্ষ (চিত্র 1.17)।



চিত্র 1.17

ধরা যাক, চোঙের ভর M, ব্যাসার্ধ r এবং দৈর্ঘ্য l. চোঙটি সুষম বলিয়া উহার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর হইবে $\frac{M}{l}$; আমরা যদি O বিন্দু হইতে x দূরত্বে dx প্রস্থের একটি পাতলা চাক্‌তি কল্পনা করি তবে উহার ভর,

$$=\frac{M}{l}\times dx$$

$\therefore$ ব্যাস AB সাপেক্ষে চাক্‌তিটির জাড্য ভ্রামক

$=\frac{1}{4}\times$ চাক্‌তির ভর $\times$ (ব্যাসার্ধ $)^2$

$$=\tfrac{1}{4}\times\frac{M}{l}dx\times r^2$$

$$=\frac{Mr^2}{4l}dx$$

এখন সমান্তরাল-অক্ষ উপপাদ্য অনুসারে PQ অক্ষের সাপেক্ষে চাকতিটির জাড্য ভ্রামক,

$$=\frac{Mr^2}{4l}dx+\frac{M}{l}dx\times x^2$$

উক্ত জাড্য ভ্রামককে $x=0$ ও $x=l/2$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে আমরা এক অর্ধের জাড্য ভ্রামক পাইব। অতঃপর উহাকে দ্বিগুণ করিলে সমগ্র চোঙটির জাড্য ভ্রামক পাওয়া যাইবে। এই জাড্য ভ্রামক I হইলে,

$$I=2\int_0^{l/2}\left(\frac{Mr^2}{4l}dx+\frac{M}{l}x^2dx\right)$$

$$=\frac{2M}{l}\left(\int_0^{l/2}\frac{r^2}{4}dx+\int_0^{l/2}x^2dx\right)$$

$$=\frac{2M}{l}\left(\frac{r^2}{4}\cdot\frac{l}{2}+\frac{l^3}{8\times 3}\right)$$

$$=M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) \qquad \cdots(1.56)$$

এবং আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ, $K=\frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2+\frac{l^2}{3}\right)}$ $\qquad\cdots(1.57)$

1.10 রাউথের সূত্র (Routh's rule)

বিভিন্ন অক্ষ বরাবর বিভিন্ন বস্তুর জাড্য ভ্রামকের যে মান আমরা পূর্বে নির্ণয় করিয়াছি রাউথের সূত্রের সাহায্যে ঐ সকল ফলাফল সহজেই স্মরণ রাখা যায়। সূত্রটি নিম্নরূপ :

কোন বস্তুর ভরকেন্দ্র দিয়া অতিক্রান্ত পরস্পরের অভিলম্ব তিনটি প্রতিসম অক্ষ (axis of symmetry) লইলে, যে কোন অক্ষের সাপেক্ষে ঐ বস্তুর জাড্য ভ্রামক হইবে,

$$I=\frac{\text{বস্তুর ভর}\times\text{অপর দুইটি অক্ষের অর্ধেকের বর্গের যোগফল}}{3,\ 4\ \text{অথবা}\ 5}$$

আয়তাকার পাতের ক্ষেত্রে এই হর হইবে 3, বৃত্তাকার বা উপবৃত্তাকার পাতের ক্ষেত্রে হর হইবে 4 এবং গোলকের ক্ষেত্রে হর হইবে 5।

1.10.1 রাউথের সূত্রের প্রয়োগ (Applications of Routh's rule)

(a) আয়তাকার পাতবিশিষ্ট বস্তু : পাতের অভিলম্বভাবে ভারকেন্দ্র দিয়া অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক,

$$I=\frac{M}{3}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{M}{12}\left(l^2+b^2\right)$$

(*b*) গোল চাক্‌তি : চাক্‌তির তলের অভিলম্বভাবে কেন্দ্র দিয়া অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক,

$$I=\frac{M}{4}\left(r^2+r^2\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}Mr^2$$

(*c*) নিরেট গোলক : যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে গোলকের জাড্য ভ্রামক,

$$I=\frac{M}{5}\left(r^2+r^2\right)$$

$$=\tfrac{2}{5}Mr^2$$

1.11 রৈখিক ও ঘূর্ণগতিসম্পন্ন বস্তুর মোট শক্তি (Total energy of a body having both translational and rotational motion)

কোন বস্তু গড়াইতে গড়াইতে সম্মুখের দিকে অগ্রসর হইলে ঐ বস্তু যুগপৎ দুই প্রকারের গতির অধিকারী হয়—রৈখিক গতি ও ঘূর্ণগতি। সুতরাং গড়ানো বস্তুটির মোট গতিশক্তি হইতেছে রৈখিক গতিশক্তি ও ঘূর্ণগতির দরুন আবর্ত গতিশক্তির সমষ্টির সমান।

এখন, গড়ানো বস্তুটির ভর M ও ভরকেন্দ্রের রৈখিক বেগ v হইলে,

চাকাটির রৈখিক গতিশক্তি $=\frac{1}{2}Mv^2$

এবং আবর্ত গতিশক্তি $=\frac{1}{2}I\omega^2$

$\therefore$ মোট গতিশক্তি = রৈখিক গতিশক্তি + আবর্ত গতিশক্তি

$$=\tfrac{1}{2}Mv^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$=\tfrac{1}{2}Mv^2+\tfrac{1}{2}MK^2\omega^2 \qquad [\because I=MK^2]$$

$$=\tfrac{1}{2}M(v^2+K^2\omega^2)$$

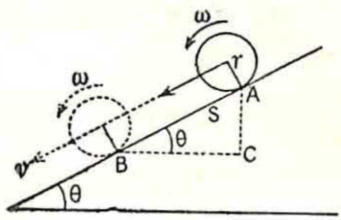
$$=\tfrac{1}{2}M\left(v^2+K^2\frac{v^2}{r^2}\right) \qquad [\because v=\omega r]$$

$$=\tfrac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right) \qquad \cdots(1.58)$$

1.12 নত তল বরাবর গড়াইয়া পড়া বস্তুর ত্বরণ (Acceleration of a body rolling down an inclined plane)

মনে করি, একটি অমসৃণ নত বা আনত তল বরাবর M ভরবিশিষ্ট একটি গোলক গড়াইয়া পড়িতেছে। ধরা যাক, অনুভূমিক রেখার সহিত ঐ তলের নতি θ (চিত্র 1.18)।

নত তল বরাবর গোলকটি যদি s দূরত্ব অতিক্রম করিয়া A হইতে B তে আসে তবে উহার খাড়া AC উচ্চতা পতন হইবে।



চিত্র 1.18

$\therefore$ গোলক কর্তৃক ব্যয়িত স্থিতি-শক্তি $= Mg.AB$

$$= Mg.s.\sin\theta$$

কিন্তু আমরা জানি গোলক কর্তৃক অর্জিত মোট গতিশক্তি

$$= \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right)$$

যেহেতু, অর্জিত মোট গতিশক্তি = ব্যয়িত স্থিতিশক্তি

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right) = Mg.s.\sin\theta$$

অথবা, $$v^2\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right) = 2g.s.\sin\theta \qquad \cdots(1.59)$$

't' অবকাশের সাপেক্ষে সমীকরণ (1.59) কে অবকলন করিয়া পাই,

$$2v\frac{dv}{dt}\left(1+\frac{K^2}{r^2}\right) = 2g\,\frac{ds}{dt}\sin\theta \qquad \cdots(1.60)$$

কিন্তু আমরা জানি,

নত তল বরাবর ত্বরণ, $f = \frac{dv}{dt}$

এবং নত তল বরাবর গতিবেগ, $v = \frac{ds}{dt}$

$$\therefore \quad 2vf\left(1+\frac{K}{r^2}\right) = 2g\,v\sin\theta$$

বা, $$f = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{r^2}} \qquad \cdots(1.61)$$

11.3 সমান ভর ও ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলক এবং একটি ফাঁপা গোলকের সনাক্তকরণ (Identification of a solid and a hollow sphere of same mass and radius)

আমরা দেখিয়াছি, নত তল বরাবর গড়ানো কোন গোলাকার বস্তুর ত্বরণ,

$$f=\frac{g \sin \theta}{1+\frac{K^2}{r^2}}$$

বস্তুটি যদি নিরেট গোলক হয় তবে,

$$K^2=\tfrac{2}{5}r^2$$

এবং তখন, $f_s=\dfrac{g \sin \theta}{1+\frac{2}{5}}=\frac{5}{7}g \sin \theta$ ···(1.62)

আবার, বস্তুটি যদি ফাঁপা গোলক হয় তবে,

$$K^2=\tfrac{2}{3}r^2$$

এবং তখন, $f_h=\dfrac{g \sin \theta}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}\, g \sin \theta$ ···(1.63)

$$\therefore \quad f_s>f_h$$

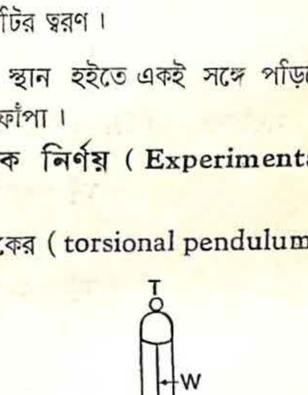
অর্থাৎ, নিরেট গোলকটির ত্বরণ > ফাঁপা গোলকটির ত্বরণ।

অতএব গোলক দুইটিকে কোন নত তলের একই স্থান হইতে একই সঙ্গে পড়িতে দিলে যেটি দ্রুত গড়াইবে সেইটি নিরেট এবং অপরটি ফাঁপা।

1.14 পরীক্ষার মাধ্যমে বস্তুর জাড্য ভ্রামক নির্ণয় (Experimental determination of MI of a body)

সুষম বা অসম বস্তুর জাড্য ভ্রামক ব্যাবর্তন দোলকের (torsional pendulum) সাহায্যে পরীক্ষাগারে নির্ণয় করা যায়।

চিত্র 1.19 এ একটি ব্যাবর্তন দোলক দেখানো হইয়াছে। ব্যাবর্তন শির (torsion head) T হইতে এক তার W দ্বারা কাচের জানালাযুক্ত বাক্স B এর মধ্যে একটি দোলনা R ঝুলানো আছে। বাক্সের উপর দিকে দুইটি সরু ও লম্বা কাটা জাগয়া (S, S) আছে। দোলনাটি এমনভাবে ঝুলানো হয় যাহাতে দোলনার ব্যাবর্তন দোলন হইলে, উহা তারকে অক্ষ করিয়া দুলিতে পারে।



চিত্র 1.19

পরীক্ষার সময়ে ব্যাবর্তন শিরে একটু মোচড় দিয়া খালি দোলনাকে দোলাইয়া উহার দোলনকাল নির্ণয় করিতে হইবে। এই দোলনকাল T_1 হইলে,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{\tau}} \qquad \cdots(1.64)$$

এইবার M ভরবিশিষ্ট আয়তাকার দণ্ড লইলাম, উহার দৈর্ঘ্য l, প্রস্থ b এবং জাড্য ভ্রামক I_2 হইলে,

$$I_2 = \frac{M}{12}\left(l^2 + b^2\right) \qquad \cdots(1.65)$$

আয়তাকার দণ্ডটিকে দোলনার উপর রাখিয়া পূর্বের ন্যায় দোলনকাল নির্ণয় করিতে হইবে। লক্ষ্য রাখিতে হইবে যেন তারটি দণ্ডের কেন্দ্রবিন্দু দিয়া যায়। এই অবস্থায় দোলনকাল T_2 হইলে,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\left(\frac{I_1 + I_2}{\tau}\right)} \qquad \cdots(1.66)$$

অতঃপর দণ্ডটিকে দোলনা হইতে সরাইয়া ঐ স্থানে পরীক্ষাধীন দণ্ড রাখিয়া পূর্বের ন্যায় দোলনকাল নির্ণয় করা হইল। এখন যদি দোলানকাল T_3 এবং পরীক্ষাধীন দণ্ডের জড়তা ভ্রামক I_3 হয় তবে,

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\left(\frac{I_1 + I_3}{\tau}\right)} \qquad \cdots(1.67)$$

সমীকরণ (1.64), (1.66) ও (1.67) এর বর্গ লইয়া পাই,

$$T_1^2 = 4\pi^2\frac{I_1}{\tau}$$

$$T_2^2 = 4\pi^2\left(\frac{I_1 + I_2}{\tau}\right)$$

$$T_3^2 = 4\pi^2\left(\frac{I_1 + I_3}{\tau}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{T_3^2 - T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = \frac{4\pi^2.I_3.\tau}{4\pi^2.I_2.\tau} = \frac{I_3}{I_2}$$

$$\text{বা,} \quad I_3 = I_2\frac{T_3^2 - T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \qquad \cdots(1.68)$$

সমীকরণ (1.68) এর সাহায্যে পরীক্ষাধীন দণ্ডটির জাড্য ভ্রামক I_3 নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ (Examples)

1. 5 cm ব্যাসার্ধের একটি গোলকের আবর্তনের কার্যকর ব্যাসার্ধ (i) ব্যাসের সাপেক্ষে এবং (ii) স্পর্শকের সাপেক্ষে নির্ণয় কর।

(If the radius of a sphere be 5 cm, find its radius of gyration (i) about its diameter and (ii) about a tangent.)

(i) ব্যাসের সাপেক্ষে গোলকের আবর্তনের কার্যকর ব্যাসার্ধ K হইলে, গোলকের জাড্য ভ্রামক $= MK^2 = \frac{2}{5}Mr^2$

অর্থাৎ, $K^2 = \frac{2}{5}.(5)^2 = 10$ $[\because \ r = 5 \text{ cm}]$

$\therefore \quad K = 3.162$ cm.

(ii) স্পর্শকের সাপেক্ষে গোলকের আবর্তনের কার্যকর ব্যাসার্ধ K হইলে, গোলকের জাড্য ভ্রামক $= MK^2 = \frac{7}{5}Mr^2$

অর্থাৎ, $K^2 = \frac{7}{5}r^2$

$= \frac{7}{5}.(5)^2 = 35$

$\therefore \quad K = 5.92$ cm.

2. 10 cm দীর্ঘ ও 20 cm ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলাকার চোঙের নিজ অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক নির্ণয় কর। উহার উপাদানের ঘনত্ব 9 g/c.c.

(Calculate the moment of inertia of a solid circular cylinder of radius 20 cm and length 10 cm about its own axis. Density of its material is 9 g/c. c.) (C. U. '74)

M চোঙের ভর এবং r ব্যাসার্ধ হইলে নিজ অক্ষের সাপেক্ষে নিরেট চোঙের জাড্য ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{2}Mr^2$$

এখানে, $M = \pi r^2 l \times \rho$

$= 3.14 \times (20)^2 \times 10 \times 9$ gs

$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 3.14 \times (20)^2 \times 10 \times 9 \times (20)^2$

$= \frac{1}{2} \times 3.14 \times 90 \times (20)^4$

$= 2.26 \times 10^7 \text{ g cm}^2.$

3. 500 kg ভর ও 2 metres ব্যাসের একটি ফ্লাই-হুইল প্রতি মিনিটে 500 বার আবর্তন করে। ফ্লাই-হুইলের সমস্ত ভর উহার বেড়ে জমা আছে ধরিয়া লইয়া উহার শক্তি ও জাড্য ভ্রামকের মান নির্ণয় কর।

(A fly-wheel of mass 500 kg and 2 metres diameter makes 500 revolutions per minute. Assuming the mass to be concentrated at the rim calculate the energy of rotation of the fly-wheel.) (C. U. '65)

এখানে,

$$M=500\ \text{kg}=5\times10^5\ \text{g}$$
$$r=1\ \text{metres}=100\ \text{cm}$$
$$n=500/\text{minute}=\tfrac{500}{60}/\text{second}$$

সুতরাং ফ্লাই-হুইলের কৌণিক বেগ, $\omega=2\pi n$

$$=2\pi\times\tfrac{500}{60}$$
$$=\tfrac{50}{3}\pi\ \text{radians/second}$$

এখন, ফ্লাই-হুইলের জাড্য ভ্রামক I হইলে, আমরা জানি,

$$I=Mr^2$$
$$=5\times10^5\times(100)^2$$
$$=5\times10^9\ \text{g. cm}^2$$

এবং উহার আবর্তন গতিশক্তি

$$=\tfrac{1}{2}I\omega^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\times5\times10^9\times(\tfrac{50}{3}\pi)^2$$
$$=68.475\times10^{11}\ \text{ergs.}$$

4. m ভর ও r ব্যাসার্ধের একটি গোল চাক্‌তি একটি টেবিলের উপর দিয়া গড়াইয়া পড়িতেছে। কৌণিক বেগ ω হইলে দেখাও যে চাক্‌তিটির মোট গতিশক্তি $E=\frac{3}{4}mr^2\omega^2$।

(A circular disc of mass m and radius r is set rolling on a table. If ω be the angular velocity, show that total energy is given log, $E=\frac{3}{4}mr^2\omega^2$.) (C. U. '77)

আমরা জানি,

চাক্‌তির মোট গতিশক্তি = রৈখিক গতিশক্তি + আবর্তন গতিশক্তি

এখন, চাক্‌তিটির রৈখিক গতিশক্তি

$$=\tfrac{1}{2}mv^2$$
$$=\tfrac{1}{2}mr^2\omega^2 \qquad (\because\ v=r\omega)$$

এবং উহার আবর্তন গতিশক্তি

$$=\tfrac{1}{2}I\omega^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}mr^2\times\omega^2$$

[$\because$ ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক, $I=\frac{1}{2}mr^2$]

$$=\tfrac{1}{4}mr^2\omega^2$$

$\therefore$ মোট গতিশক্তি, $E=\frac{1}{2}mr^2\omega^2+\frac{1}{4}mr^2\omega^2$

$$=\tfrac{3}{4}mr^2\omega^2$$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. টর্ক (বা বলের ভ্রামক) ও কৌণিক ত্বরণ কাহাকে বলে? উভয়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(What are torque and angular acceleration? Find the relation between them.) (C. U. '61)

2. জাড্য ভ্রামকের সংজ্ঞা লিখ ও উহার ভৌত তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর। আবর্তনের কার্যকরী ব্যাসার্ধ বা চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলিতে কি বোঝ?

(Define moment of inertia and explain its physical significance. What do you mean by the radius of gyration?) (C. U. '65)

3. জড়তা-ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধের সংজ্ঞা লিখ। 'a' ব্যাসার্ধ ও M ভরের একটি চ্যাপ্টা গোলাকার চাক্‌তির (i) কেন্দ্র দিয়া এবং তলের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে ও (ii) উহার যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় কর।

(Define the terms: Moment of inertia and radius of gyration. Calculate the moment of inertia of a flat circular disc of radius 'a' and mass 'M' about (i) an axis through its centre and perpendicular to its and (ii) any diameter.) (C. U, '77)

4. জড়তা-ভ্রামকের সংজ্ঞা লিখ। একটি গোলাকার পাতলা আংটির কেন্দ্র দিয়া এবং আংটির তলের অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে আংটির জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় কর এবং উহা হইতে যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে ঐ আংটির জড়তা-ভ্রামক বাহির কর।

(Define moment of inertia. Derive an expression for the moment of inertia of a thin circular ring about an axis perpendicular to its plane and passing through its centre. Hence find the moment of inertia of a thin circular ring about a diameter.) (C. U. '68)

5. যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে একটি নিরেট গোলকের জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় কর।

(Calculate the moment of inertia of a solid sphere about a diameter.) (C. U. '62)

6. দ্বন্দ্বের ভ্রামক ও কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা লিখ।

(Define the terms: 'Moment of couple' and 'Angular momentum'.) (C. U. '75)

7. কোন অক্ষ বেড়িয়া আবর্তনরত বস্তুর গতিশক্তির সমীকরণটি বাহির কর।

(Derive an expression for the kinetic energy of a body rotating about an axis.) (C. U. '66, '75)

8. একটি চোঙাকৃতি দণ্ডের আপন অক্ষ বেড়িয়া জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় কর।

(Find the moment of inertia of a cylindrical rod about its own axis.) (B. U. '67 ; C. U. '74)

9. জড়তা-ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধের রাশিমালা উপপাদন কর : (i) একটি গোলাকার চাক্‌তির কেন্দ্র দিয়া এবং চাক্‌তির তলের সহিত অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে এবং (ii) একটি গোলীয় খোলকের যে কোন ব্যাস বরাবর অক্ষের সাপেক্ষে।

(Derive the expression for the moment of inertia and radius of gyration of (i) a circular disc about an axis passing through the centre and perpendicular to the plane, (ii) a spherical shell about any diameter.) (C. U. '66)

10. পাতসদৃশ বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য লম্ব-অক্ষ উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর। ঐ উপপাদ্যের সাহায্যে একটি গোলাকার চাক্‌তির যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে জড়তা-ভ্রামক নির্ণয় কর।

(State and prove the perpendicular-axis theorem for a laminar body. Hence calcutate the moment of inertia of a circular disc about any of its diameters.) (C. U. '68)

11. একই ভর ও একই আকারের দুইটি গোলক তোমাকে দেওয়া হইল। উহাদের একটি ফাঁপা তবে বেশী ঘনত্বের উপাদানে তৈয়ারী এবং অপরটি নিরেট কিন্তু কম ঘনত্বের উপাদানে তৈয়ারী। তুমি কি উপায়ে ফাঁপা গোলক কোনটি তাহা বুঝিবে ব্যাখ্যা কর।

(You are given two spheres of same mass and size ; one being hollow and made of a substance of higher density, while the other is solid but made of a substance of lower density. Explain how will you identify the hollow one.) (C. U. '54)

12. একটি নিরেট গোলক একটি সমতলের উপর না পিছলাইয়া যদি গড়াইতে থাকে, তবে উহার সরল রৈখিক গতিশক্তি এবং আবর্ত গতিশক্তির অনুপাত কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

(If a solid sphere rolls on a plane without slipping, calculate what is the ratio of its translational kinetic energy to the rotational kinetic energy.) (C. U. '78) [*Ans.* $\frac{5}{2}$]

13. একটি সরু দণ্ডের দৈর্ঘ্য l এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m। দণ্ডটি উহার দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু দিয়া অভিলম্বভাবে গমনকারী অক্ষের চতুর্দিকে ω বেগে আবর্তন করিলে দেখাও যে উহার গতিশক্তি $\frac{1}{24}m\omega^2 l^3$।

(Show that the kinetic energy of a thin rod of length l and mass

m per unit length rotating about an axis through the middle point and perpendicular to its length with angular velocity ω is $\frac{1}{24} m\omega^2 l^3$.)
(C. U. '44)

14. 50 g ভর ও 2 cm ব্যাসের একটি গোল চাক্‌তি খাড়াভাবে একটি মসৃণ সমতলের উপর দিয়া গড়াইতেছে। চাক্‌তিটির রৈখিক বেগ 5 cm/second হইলে উহার মোট গতিশক্তি নির্ণয় কর।

(A flat circular disc of mass 50 g and diameter 2 cm rolls on its edge on a smooth horizontal surface and moves with a velocity of 5 cm/second. Calculate its total kinetic energy.)
(C. U. '75) [*Ans*. 937·5 ergs]

15. গোল চাক্‌তির আকারের একটি ফ্লাই-হুইলের ভর 1 kg ও ব্যাসার্ধ 50 cm। আবর্তন গতিবেগ প্রতি সেকেণ্ডে 10 হইতে 20 বৃদ্ধি করিতে উহার উপর কি পরিমাণ কার্য করিতে হইবে ?

(A fly-wheel in the form of a uniform circular disc has a radius of 50 cm and a mass of 1 kg. Calculate the work which must be done on the fly-wheel to increase the speed of rotation from 10 to 20 revolutions/second.) (C. U. '66) [*Ans*. 7.407×10^9 ergs]

16. একটি নিরেট গোলাকার বল একটি টেবিলের উপর দিয়া গড়াইতেছে। উহার মোট গতিশক্তির কত অংশ আবর্তন গতিশক্তি ?

(A solid spherical ball is set rolling on a table. What fraction of its total energy is rotational ?) [*Ans*. $\frac{2}{7}$]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

মহাকর্ষ, অভিকর্ষ ও শক্তি

(Gravitation, Gravity and Energy)

2.1 সূচনা (Introduction)

গ্রহ-নক্ষত্রদের স্বরূপ সম্পর্কে অতি প্রাচীনকাল হইতেই বিজ্ঞানীদের ভিতর অপরিসীম আগ্রহ লক্ষ্য করা যায়। ষোড়শ শতাব্দীর মধ্যভাগে ডেনমার্ক জোতির্বিদ্ ব্রে (Brahe) মঙ্গল গ্রহের গতিবিধি সম্পর্কে কিছু মূল্যবান্ তথ্য সংগ্রহ করেন। পরবর্তী কালে 1609 খ্রীষ্টাব্দে ঐ একই জায়গার অপর এক জোতির্বিদ্ জন কেপলার সিদ্ধান্ত করেন যে, গ্রহগুলি কোন এক বলের প্রভাবে সূর্যকে কেন্দ্র করিয়া ক্রমাগত ঘুরিতেছে। কিন্তু কি ধরনের বলের দ্বারা এইরূপ ঘটিতেছে কেপলার তাহা সঠিকভাবে বুঝিতে পারেন নাই। পরে অপর এক বিশ্ববিশ্রুত বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র আবিষ্কারের পর এই সমস্যার সমাধান হয়।

2.2 গ্রহের গতি সম্পর্কিত কেপলারের সূত্রাবলী (Kepler's laws of planetary motion)

সূর্যের চতুর্দিকে গ্রহের গতিবিধি লক্ষ্য করিয়া কেপলার নিম্নলিখিত তিনটি সূত্র প্রতিষ্ঠা করেন :

(i) সূর্যকে একটি ফোকসে রাখিয়া গ্রহগুলি সূর্যের চারিপাশে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে পরিভ্রমণ করে।

(ii) সূর্য ও গ্রহের সংযোজক সরলরেখা (দূরক) সমান অবকাশে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে—অর্থাৎ একক সময়ে অতিক্রান্ত ক্ষেত্রফল ধ্রুবক।

(iii) কোন গ্রহের সূর্যকে একবার পরিভ্রমণ করিতে যে সময় লাগে তাহার বর্গ সূর্য হইতে উক্ত গ্রহের গড় দূরত্বের ত্রিঘাতের সমানুপাতিক।

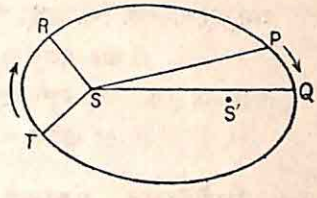
[(i) The path of a planet is an elliptical orbit, with the sun at one of the foci.

(ii) The radius joining the planet and the sun sweeps out equal areas in equal times, i.e. the area swept out per unit time is constant.

(iii) The square of the time period of each planet is proportional to the cube of its mean distance from the sun.]

আমরা জানি কোন উপবৃত্তের দুইটি নাভি থাকে। 2.1 নং চিত্রে ধরা যাক, S নাভিটি সূর্যের অবস্থিতি। কেপলারের প্রথম সূত্র অনুযায়ী যে কোন গ্রহ এক উপবৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করে, যাহার একটি নাভি হইবে S। ইহাই প্রথম সূত্র।

আবার মনে করি, কোন গ্রহের P অবস্থান হইতে Q অবস্থানে আসিতে যে সময় লাগে, T হইতে R অবস্থিতিতে আসিতেও সেই একই সময় প্রয়োজন হয়। অর্থাৎ, PQS-এর ক্ষেত্রফল ও TSR এর ক্ষেত্রফল সমান হইবে। ইহাই কেপলারের দ্বিতীয় সূত্র।



চিত্র 2.1

আবার ধরা যাক, কোন গ্রহের সূর্যকে একবার সম্পূর্ণ পরিভ্রমণ করিতে যে সময় লাগে অর্থাৎ পর্যায় কাল = T এবং সূর্য হইতে গ্রহের গড় দূরত্ব = r। তৃতীয় সূত্রানুসারে $T^2 \propto r^3$।

2.3 নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র (Newton's law of gravitation)

এই বিশ্বের যে কোন দুইটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বলের মান বস্তুকণা দুইটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক ও উহাদের ভিতরকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক হয়। ইহাই নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র।

মনে করি, দুইটি বস্তুকণার ভর m_1 ও m_2 এবং উহাদের মধ্যে দূরত্ব d। যদি আকর্ষণ বল F হয় তবে,

$$F \propto m_1 m_2 \quad (\text{যখন } d = \text{ধ্রুবক})$$

এবং $$F \propto \frac{1}{d^2} \quad (\text{যখন } m_1 \text{ ও } m_2 \text{ ধ্রুবক})$$

$$\therefore \quad F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (\text{যখন } m_1, m_2, d \text{ সকলেই পরিবর্তনশীল})$$

বা, $$F = G.\frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \cdots (2.1)$$

এখানে G একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবককে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (Gravitational Constant) বলে। সুতরাং দুইটি একক ভরের বস্তুকণা পরস্পর হইতে একক দূরত্বে অবস্থান করিলে উহারা পরস্পরকে যে বল দ্বারা আকর্ষণ করিবে তাহাকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলা যাইতে পারে। সি. জি. এস্. পদ্ধতি অনুযায়ী G এর মান $6{\cdot}66 \times 10^{-8}$ dynes। ইহার অর্থ এই যে দুইটি 1 gm ভরের বস্তুকণা যদি পরস্পর হইতে 1 cm দূরে রাখা হয় তবে উহারা পরস্পরকে $6{\cdot}66 \times 10^{-8}$ dynes বল দ্বারা আকর্ষণ করিবে।

2.3.1 G-এর একক (Unit of G)

সমীকরণ (2.1) হইতে পাই,

$$G = \frac{Fd^2}{m_1 m_2} \quad \cdots (2.2)$$

এখন সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক ডাইন, দূরত্বের একক সেণ্টিমিটার ও ভরের একক গ্র্যাম।

$\therefore$ G এর একক = সেমি^{3} / গ্র্যাম / সেকেণ্ড^2 ।

অনুরূপে, এফ. পি. এস্. পদ্ধতি অনুযায়ী,

G এর একক = ফুট^3 / পাউণ্ড / সেকেণ্ড^2

এবং এম. কে. এস্. পদ্ধতিতে

G এর একক = মিটার^3 / কিলোগ্রাম / সেকেণ্ড^2 ।

2.4 নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রের বিশ্বজনীনতা (Universality of Newton's law of gravitation)

দুইটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল উহাদের ভর ও দূরত্বের উপর নির্ভরশীল। ইহা কখনও বস্তু দুইটির প্রকৃতি, ধর্ম বা তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে না। এমনকি যে মাধ্যমে উহারা অবস্থিত তাহার পরিবর্তন হইলেও আকর্ষণ বলের মান একই থাকে। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, আন্তর্গ্রহিক (inter-planetary) দূরত্বের ক্ষেত্রে যেমন তেমনি ক্ষুদ্র পার্থিব দূরত্বের ক্ষেত্রেও মহাকর্ষ সূত্র সমভাবে প্রযোজ্য। মহাকর্ষ সূত্রের সাহায্য লইয়া বিজ্ঞানীরা সূর্য, পৃথিবী ও অন্যান্য গ্রহের ওজন, উহাদের পারস্পরিক দূরত্ব ও গতিপথের সঠিক সন্ধান পাইয়াছেন।

অবশ্য আইনস্টাইনের অপেক্ষবাদ বা আপেক্ষিক বাদের (Theory of Relativity) ভিত্তিতে বিচার করিলে মহাকর্ষ সূত্রের সামান্য বিচ্যুতি দেখা যাইবে। আপেক্ষিক তত্ত্ব অনুযায়ী ভর বেগের উপর নির্ভরশীল। ফলে দূরত্ব একই থাকা সত্ত্বেও বেগ বৃদ্ধির সহিত এই আকর্ষণ বলের মান সামান্য পরিবর্তিত হয়। ইহা ছাড়া আন্তরাণবিক দূরত্বের ক্ষেত্রেও এই সূত্র প্রযোজ্য নয়।

2.5 নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হইতে কেপলারের সূত্রাবলী (Kepler's laws from Newton's law of gravitation)

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হইতে কেপলারের দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্র সহজেই নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, সূর্য ও অন্য কোন গ্রহের ভর যথাক্রমে M ও m এবং গ্রহটি সূর্যকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করিতেছে।

$\therefore$ মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল $= G\dfrac{Mm}{r^2}$

আবার যদি ω ও T যথাক্রমে গ্রহটির কৌণিক বেগ ও পর্যায়কাল হয় তবে,

অপকেন্দ্র বল $= m\omega^2 r$

$$= m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . r \quad \left[\because \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\right]$$

যেহেতু গ্রহটির অপকেন্দ্র বল সূর্যের আকর্ষণ বলকে প্রতিমিত করে ও গতির সাম্য বজায় রাখে, সুতরাং

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r$$

বা, $$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}\cdot r^3 \qquad \cdots \quad (2.3)$$

অর্থাৎ, $T^2\propto r^3$ $\left[\because \ \frac{4\pi^2}{GM}=\text{ধ্রুবক}\right]$

ইহা কেপলারের তৃতীয় সূত্র।

আবার সমীকরণ (2.3) হইতে পাই,

$$\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{GM}{r^3}$$

বা, $$\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

বা, $$\omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \qquad \cdots \quad (2.4)$$

এখন, 2π কোণ আবর্তনে πr^2 ক্ষেত্রফল হয়,

$\therefore$ ω কোণের জন্যে ক্ষেত্রফল $=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\pi r^2$

$$=\frac{r^2}{2}\cdot\omega$$

$$=\frac{r^2}{2}\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(GMr)}$$

$$=\text{ধ্রুবক}$$

$\therefore$ একক সময়ে যে ক্ষেত্রফল পরিক্রমা করে তাহা একটি ধ্রুবক।

ইহাই কেপলারের দ্বিতীয় সূত্র।

আবার, আমরা বৃত্তকে উপবৃত্তের একটি বিশেষ ক্ষেত্র হিসাবে মনে করিতে পারি। সুতরাং কেপলারের প্রথম সূত্রের সহিত আমাদের অঙ্গীকারের বিশেষ তারতম্য নাই।

2.6 মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয় (Determination of the Gravitational constant)

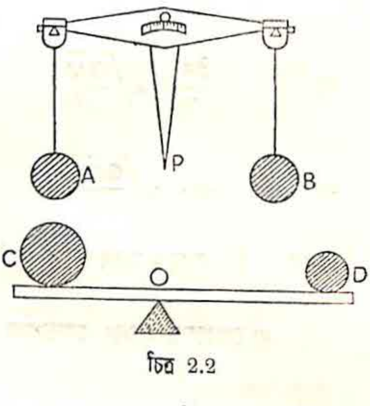
যে সমস্ত পদ্ধতির দ্বারা G এর মান নির্ণয় করা হয় তাহাদের দুইটি পৃথক শ্রেণীতে বিভক্ত করা যাইতে পারে। যথা—

(i) পাহাড় ও খনি পদ্ধতি (Mountain and mine method) অথবা বৃহৎ স্কেল পরীক্ষা পদ্ধতি (Large scale experiment method) এবং (ii) পরীক্ষাগার পদ্ধতি (Laboratory method)।

বিভিন্ন পরীক্ষার সাহায্যে পরীক্ষাগারে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান ক্যাভেণ্ডিস (Cavendish), বয়েস (Boys), হাইল (Heyl), পয়েণ্টিং (Poynting) প্রভৃতি বিজ্ঞানীরা নির্ণয় করেন। নিম্নে পয়েণ্টিং-এর পদ্ধতি সংক্ষেপে আলোচনা করা হইল।

2.61 পয়েণ্টিং-এর পদ্ধতি (Poynting's method)

দুইটি গোলকের পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে তুলার সাহায্যে ওজন করিয়া পয়েণ্টিং মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয় করেন। চিত্র 2.2-এ এই পদ্ধতির নকশা দেখানো হইয়াছে।



চিত্র 2.2

দুইটি সীসার তৈয়ারী সম-ওজনের গোলক A ও B একটি সুবেদী তুলাদণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে ঝুলানো আছে। A গোলকটির ঠিক নিচেয় সীসার তৈয়ারী অপর একটি বড় গোলক C একটি অনুভূমিক টেবিলের উপর বসানো আছে। O বিন্দুকে অক্ষ করিয়া টেবিলটি অনুভূমিক তলে ঘুরিতে পারে। এই পরীক্ষায় A ও B গোলক দুইটির প্রত্যেকটির ওজন 50 lb ও C গোলকটির ওজন 350 lb লওয়া হয়। C গোলকের ভারে টেবিলটি যাহাতে উল্টাইয়া না পড়ে সেই জন্য আর একটি অপেক্ষাকৃত ছোট গোলক D কে অক্ষবিন্দু O হইতে কিছুদূরে রাখা হয়।

পরীক্ষার সময়ে প্রথমে টেবিল ঘুরাইয়া C গোলকটিকে A গোলকের নিচে রাখা হয়। তখন ইহাদের মধ্যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণের দরুন তুলাদণ্ডের A প্রান্তটি কিছুটি ঝুঁকিয়া পড়িবে। পরে টেবিল ঘুরাইয়া অনুরূপে C গোলকটিকে B গোলকের নিচে রাখিলে পুনরায় একই ঘটনা লক্ষ্য করা যাইবে। P সূচক হইতে মোট বিক্ষেপ পাওয়া যাইবে।

মনে করি, বড় গোলক A বা B এর ভর m এবং C-এর ভর M; A ও C এর কেন্দ্রবিন্দুর মধ্যে দূরত্ব r ও তুলাদণ্ডের দৈর্ঘ্য $2l$.

∴ A গোলকের উপর C গোলকের নিম্নাভিমুখী আকর্ষণ বল

$$=G\frac{Mm}{r^2}$$

এখন, C গোলকটিকে A গোলকের নিচ হইতে B গোলকের নিচে আনার ফলে দ্বন্দ্বের পরিবর্তন $= G\frac{Mm}{r^2} \times 2l$.

এই দ্বন্দ্ব প্রযুক্ত হওয়ায় সূচকের মোট বিক্ষেপ θ হইলে, একক বিক্ষেপের দরুণ দ্বন্দ্ব $= \frac{2GMml}{r^2\theta}$ ···(2.5)

আবার, মনে করি m_1g ওজনের রাইডারকে (rider) তুলাদণ্ডের আলম্ব বিন্দু হইতে x দূরত্বে রাখার ফলে সূচকের বিক্ষেপ হইল α. সুতরাং

α বিক্ষেপের দরুন দ্বন্দ্ব $= m_1gx$

$\therefore$ একক বিক্ষেপের দরুন দ্বন্দ্ব $= \frac{m_1gx}{\alpha}$ ···(2.6)

সমীকরণ (2.5) ও (2.6) সমান বলিয়া আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{2GMml}{r^2\theta} = \frac{m_1gx}{\alpha}$$

বা, $G = \frac{m_1gxr^2\theta}{2Mml\alpha}$ ···(2.7)

সমীকরণ (2.7) এর ডানদিকের রাশিগুলির মান জানা থাকায় G এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

2.6.2 G-এর সর্বজনস্বীকৃত মান (Accepted value of G)

G নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি বিশ্লেষণ করিলে দেখা যায় যে G এর মান সর্বক্ষেত্রে সমান নয়। বিভিন্ন পরীক্ষালব্ধ ফল হইতে বিচার বিবেচনা করিয়া G এর একটি সর্বজনস্বীকৃত মান গ্রহণ করা হইয়াছে। G এর এই মান হইল $(6{\cdot}67 \pm 0{\cdot}005) \times 10^{-8}$ c.g.s. unit.

2.7 পৃথিবীর ভর ও গড় ঘনত্ব (Mass of and mean density of the earth)

আমরা জানি, M পৃথিবীর ভর ও r পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হইলে ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত m ভরের কোন বস্তুকে পৃথিবী যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তাহা,

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

এখন, অভিকর্ষজ ত্বরণ g হইলে বস্তুটির ওজন $= mg$.

যেহেতু পৃথিবীর দ্বারা বস্তুটির উপর প্রযুক্ত আকর্ষণ বলের মান বস্তুটির ওজনের সমান, সুতরাং আমরা লিখিতে পারি,

$$G\frac{Mm}{r^2}=mg$$

অথবা, $$M=\frac{gr^2}{G} \quad \cdots(2.8)$$

সমীকরণ (2.8) এ g, r ও G এর মান বসাইয়া ভর নির্ণয় করা যায়।

আবার, পৃথিবীকে একটি গোলক হিসাবে কল্পনা করিলে,

উহার আয়তন $=\frac{4}{3}\pi r^3$

এবং ভর $=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ ($\rho=$ গড় ঘনত্ব) $\cdots(2.9)$

সমীকরণ (2.8) ও (2.9) সমান বলিয়া আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{gr^2}{G}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

বা, $$\rho=\frac{3g}{4\pi rG} \quad \cdots(2.10)$$

সমীকরণ (2.10) এর সাহায্যে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় করা যায়। সর্বজন-স্বীকৃত এই মান হইল $(5{\cdot}517\pm0{\cdot}004)$ g/c. c.

2.8 সূর্যের ভর (Mass of the Sun)

সূর্য হইতে কোন গ্রহের দূরত্ব ও সূর্যের চতুর্দিকে উহার আবর্তন কাল জানা থাকিলে, মহাকর্ষীয় সূত্রের সাহায্যে সূর্যের ভর নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি, কোন বস্তুকে বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করিতে হইলে অভিকেন্দ্রিক বলের প্রয়োজন হয়। সুতরাং পৃথিবী যদি r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করে তবে যে অভিকেন্দ্রিক বলের প্রয়োজন তাহা

$$=m\omega^2r$$

$$=mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad \left[\because \quad \omega=\frac{2\pi}{T}\right]$$

$$=mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

আবার সূর্য পৃথিবীকে যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তাহা

$$=G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\therefore \quad mr\frac{4\pi^2}{T^2}=G\frac{Mm}{r^2}$$

বা, $$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2} \quad \cdots(2.11)$$

এখন, পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব $(r)=1{\cdot}49\times10^{13}$ cm
পৃথিবীর আবর্তন কাল $(T)=365\times24\times60\times60$ seconds

এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $(G)=6{\cdot}67\times10^{-8}$ c.g.s. unit

$$\therefore \text{ সূর্যের ভর, } M=\frac{4\pi^2\times(1{\cdot}49\times10^{13})^3}{6{\cdot}67\times10^{-8}\times(365\times24\times60\times60)^2}$$

$$=1{\cdot}97\times10^{33} \text{ gms (প্রায়)।}$$

2.6 মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র ও ক্ষেত্রের প্রাবল্য (Gravitational field and intensity of the field)

কোন বস্তুর চতুর্দিকে যতটা স্থান ব্যাপিয়া উহার আকর্ষণ বল অনুভূত হয়, সেই স্থানকে ঐ বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে একক ভরের কোন বস্তু রাখিলে উহা যে আকর্ষণ বল অনুভব করে তাহাকে উক্ত মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে ঐ বিন্দুর প্রাবল্য বলে।

M ও m ভরের দুইটি বস্তুকে r দূরত্বে রাখিলে, নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী, উহাদের মধ্যে আকর্ষণ বল,

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

যদি $m=1$ হয় তবে,

$$F=G\frac{M}{r^2} \qquad \cdots(2.12)$$

অর্থাৎ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের ঐ বিন্দুতে প্রাবল্য হইবে $\frac{GM}{r^2}$.

সি. জি. এস্. পদ্ধতি অনুযায়ী মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে প্রাবল্যের একক ডাইন এবং এফ. পি. এস্. পদ্ধতিতে পাউণ্ডাল।

2.10 মহাকর্ষীয় বিভব ও বিভব বৈষম্য (Gravitational potential and potential difference)

একক ভরের কোন বস্তুকে অসীম হইতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনিতে মোট যে পরিমাণ কার্য করিতে হয় তাহাকে ঐ বিন্দুতে বিভব বলে। এক্ষেত্রে যে কার্য সম্পাদিত হয় তাহা বস্তুদ্বয়ের মধ্যে আকর্ষণ বলই করিয়া থাকে, বাহিরের কোন শক্তিকে করিতে হয় না। সুতরাং কৃত কার্য ঋণাত্মক হইবে। ফলে, কোন বিন্দুতে কোন বস্তু বা বস্তুসমূহের মহাকর্ষীয় বিভব ঋণাত্মক হইবে।

অনুরূপে, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে দুইটি বিন্দুর মধ্যে বিভব বৈষম্য বলিতে বোঝায় একক ভরের কোন বস্তুকে এক বিন্দু হইতে অপর বিন্দুতে লইয়া যাইতে যে

$$\text{রিঙের ক্ষেত্রফল} = \text{পরিধির দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}$$
$$= 2\pi a \sin\theta \times a d\theta$$
$$= 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$$
$$\text{এবং রিঙের ভর} = 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta . \rho$$

রিং খুব সরু হওয়ায় ইহার পরিধির উপরকার সকল বিন্দুই P বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে। মনে করি, এই দূরত্ব x।

সুতরাং রিঙের জন্য P বিন্দুতে বিভব

$$dV = -G . \frac{2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta . \rho}{x} \qquad \cdots(2.15)$$

এখন ত্রিভুজ EKP হইতে পাই,

$$EP^2 = EK^2 + KP^2$$
$$= EK^2 + (OP - OK)^2$$
$$x^2 = (a \sin\theta)^2 + (r - a\cos\theta)^2$$
$$= a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \qquad \cdots(2.16)$$

সমীকরণ (2.16) কে অবকলন করিয়া (differentiate) পাই,

$$2xdx = 2ar \sin\theta\, d\theta$$

$$\text{বা, } x = \frac{ar \sin\theta\, d\theta}{dx} \qquad \cdots(2.17)$$

এক্ষণে সমীকরণ (2.15) ও (2.17) হইতে পাই,

$$dV = -G . \frac{2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta . \rho}{ar \sin\theta\, d\theta} . dx$$

$$= -\frac{2\pi a \rho G}{r} . dx \qquad \cdots(2.18)$$

সমীকরণ (2.18) কে সমাকলন করিয়া (integrate) সমগ্র খোলকের বিভব পাওয়া যাইবে। অতএব P বিন্দুতে বিভব,

$$V = -\int_{r-a}^{r+a} \frac{2\pi a \rho G}{r} dx$$

$$= -\frac{2\pi a \rho G}{r} \Big[x\Big]_{r-a}^{r+a}$$

$$= -\frac{2\pi a \rho G}{r} \Big[2a\Big]$$

$$= -\frac{4\pi a^2 \rho G}{r} \qquad \cdots(2.19)$$

কিন্তু সমগ্র খোলকের ভর, $M=4\pi a^2\rho$

$$\therefore \quad V=-G\frac{M}{r} \qquad \cdots(2.20)$$

আবার, খোলকের দরুন P বিন্দুতে তীব্রতা F ধরিলে,

$$F=-\frac{dV}{dr}$$

$$=-\frac{d}{dr}\left(\frac{GM}{r}\right)$$

$$=G\frac{M}{r^2} \qquad \cdots(2.21)$$

(ii) **যখন P বিন্দু খোলকের পৃষ্ঠে অবস্থিত** (When the point P is on the shell)

এক্ষেত্রে সমাকলনের সীমা হইবে $x=0$ এবং $x=2a$

$$\therefore \quad V=-\frac{2\pi a\rho G}{r}\int_0^{2a} dx$$

$$=-\frac{2\pi a\rho G}{r}.2a$$

$$=-G\frac{4\pi a^2\rho}{r}$$

$$=-G\frac{M}{r}$$

$$=-G\frac{M}{a} \qquad (\because \quad r=a) \qquad \cdots(2.22)$$

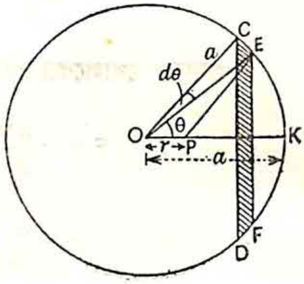
এবং প্রাবল্য, $F=-\frac{dV}{da}$

$$=-\frac{d}{da}\left(-\frac{GM}{a}\right)$$

$$=\frac{GM}{a^2} \qquad \cdots(2.23)$$

(iii) **যখন P বিন্দু খোলকের অভ্যন্তরে** (When the point P is within the shell)

এক্ষেত্রে P বিন্দুটি খোলকের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া (চিত্র 2.6) সমাকলনের সীমা হইবে $(a-r)$ হইতে $(a+r)$ পর্যন্ত। অতএব, P বিন্দুতে বিভব,



চিত্র 2.6

$$V = -\frac{2\pi a\rho G}{r}\int_{a-r}^{a+r} dx$$

$$= -\frac{2\pi a\rho G}{r}.2r$$

$$= -G.4\pi a\rho$$

$$= -G\frac{4\pi a^2\rho}{a}$$

$$= -\frac{GM}{a} \qquad \cdots(2.24)$$

এবং প্রাবল্য, $F = -\frac{dV}{dr}$

$$= -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{a}\right)$$

$$= 0 \qquad \cdots(2.25)$$

অর্থাৎ খোলকের ভিতরে প্রাবল্যের মান শূন্য।

2.14 একটি নিরেট গোলকের দরুণ কোন বিন্দুতে বিভব ও প্রাবল্য (Potential and intensity at a point due to a solid sphere)

(i) **বিন্দুটি যখন গোলকের বাহিরে** (When the point is outside the sphere)

একটি নিরেট গোলককে আমরা অসংখ্য পাতলা, এককেন্দ্রী গোল খোলকে বিভক্ত করিতে পারি যাহাদের ভর যথাক্রমে m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি। মনে করি, গোলকের বাহিরে কেন্দ্রবিন্দু O হইতে r দূরে একটি বিন্দু P আছে।

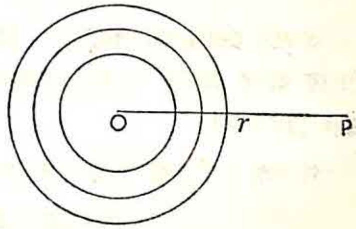
আমরা জানি, খোলকের বাহিরে কোন বিন্দুতে বিভব $= -\frac{GM}{r}$.

অতএব, P বিন্দুতে উপরি-উক্ত অসংখ্য খোলকগুলির বিভব,

$$V = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{r} - \frac{Gm_3}{r} - \cdots$$

$$= -\frac{G}{r}\left(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\right)$$

$$= -\frac{GM}{r} \quad \cdots \quad (2.26)$$



চিত্র 2.7

যেখানে, M = নিরেট গোলকের ভর।

আবার, P বিন্দুতে নিরেট গোলকের তীব্রতা,

$$F = -\frac{dV}{dr}$$

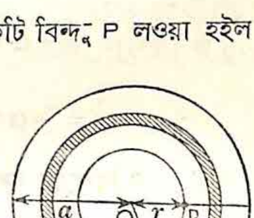
$$= -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right)$$

$$= \frac{GM}{r^2} \quad \cdots \quad (2.27)$$

(ii) **বিন্দুটি যখন গোলকের অভ্যন্তরে** (When the point is inside the sphere)

গোলকের অভ্যন্তরে কেন্দ্রবিন্দু O হইতে r দূরে একটি বিন্দু P লওয়া হইল (চিত্র 2.8)। মনে করি, গোলকের ঘনত্ব ρ এবং উহার ব্যাসার্ধ a।

এখন, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি গোলক অংকন করিলে সমগ্র গোলকটি দুই অংশে বিভক্ত হইবে—( ) একটি r ব্যাসার্ধযুক্ত ছোট নিরেট গোলক এবং (ii) একটি $(a-r)$ বেধবিশিষ্ট গোল খোলক। ছোট গোলকের ঠিক পৃষ্ঠে কিন্তু খোলকের অভ্যন্তরে P বিন্দুটি অবস্থিত। ফলে, ঐ দুই অংশের বিভবের যোগফল P বিন্দুতে সমগ্র গোলকের বিভব হইবে।



চিত্র 2.8

ভিতরের ছোট নিরেট গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ উহার ভর $= \frac{4}{3}\pi r^3 . \rho$

সুতরাং ঐ গোলকের দরুণ বিভব,

$$V = -G.\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r}$$

$$= -\tfrac{4}{3}G\pi r^2 \rho \qquad \cdots \quad (2.28)$$

এক্ষণে খোলকের দরুণ P বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করিবার জন্য ঐ খোলকের ভিতর অপর একটি পাতলা এককেন্দ্রী খোলক কল্পনা করিলাম ; উহার ব্যাসার্ধ x এবং বেধ dx ।

পাতলা খোলকের উপরতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi x^2$

এবং উহার আয়তন $= 4\pi x^2 .dx$

$\therefore$ উহার ভর $= 4\pi x^2 .dx.\rho$

সুতরাং পাতলা খোলকের দরুণ P বিন্দুতে বিভব

$$= -G.\frac{4\pi x^2 d.x\ \rho}{x}$$

$$= -G\cdot 4\pi x \rho dx$$

ইহাকে $x=r$ এবং $x=a$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে P বিন্দুতে $(a-r)$ বেধের খোলকের দরুণ বিভব পাওয়া যাইবে। ইহাকে V″ ধরিলে

$$V'' = -G.4\pi\rho\int_r^a x\cdot dx$$

$$= -G\cdot 4\pi\rho\left[\frac{x^2}{2}\right]_r^a$$

$$= -G.2\pi\rho(a^2 - r^2) \qquad \cdots \quad (2\ 29)$$

$\therefore$ P বিন্দুতে সমগ্র গোলকের দরুণ বিভব,

$$V = V' + V''$$

$$= -\tfrac{4}{3}G\pi r^2\rho - 2G\pi\rho(a^2 - r^2)$$

$$= -\tfrac{4}{3}G\pi\rho\left(r^2 + \frac{3a^2 - 3r^2}{2}\right)$$

$$= -\tfrac{4}{3}G\pi\rho\left(\frac{3a^2 - r^2}{2}\right)$$

$$= -GM\left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}\right) \quad [\because\ M = \text{গোলকের ভর} = \tfrac{4}{3}\pi a^3\rho] \quad \cdots (2\ 30)$$

এবং P বিন্দুতে গোলকের দরুণ তীব্রতা,

$$F = -\frac{dV}{dr}$$

$$= -\frac{d}{dr}\left[GM\frac{(3a^2 - r^2)}{2a^3}\right]$$

$$= \frac{GM}{2a^3}\ \frac{d}{dr}(r^2)$$

$$= \frac{GM}{a^3}r \qquad \cdots(2.31)$$

$$\therefore\ \ F \propto r$$

অতএব নিরেট গোলকের ভিতরে কোন বিন্দুতে তীব্রতা গোলকের কেন্দ্র হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বের সমানুপাতিক।

2.15 অভিকর্ষ ও অভিকর্ষজ ত্বরণ (Gravity and acceleration due to gravity)

ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত বা ইহার কাছাকাছি কোন বস্তুকে পৃথিবী যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তাহাকে অভিকর্ষ বলে। আমরা জানি, বিশ্বে যে কোন দুইটি বস্তুর ভিতর আকর্ষণকে মহাকর্ষ বলে। এই দুইটি বস্তুর ভিতর একটি যদি পৃথিবী ও অপরটি ভূ-পৃষ্ঠে বা তাহার কাছাকাছি অবস্থিত কোন বস্তু হয়, তবে সেই বিশেষ ক্ষেত্রে মহাকর্ষকে অভিকর্ষ বলা হইয়া থাকে।

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে আমরা জানি যে, কোন বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করিলে বস্তুটিতে ত্বরণের সৃষ্টি হয়। মনে করি, পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে r দূরত্বে m ভরের একটি বস্তু আছে। পৃথিবীর ভর M হইলে, পৃথিবী বস্তুকে যে বল দ্বারা আকর্ষণ করিবে তাহা

$$= G\frac{Mm}{r^2}$$

= পৃথিবীর অভিকর্ষীয় বল।

সুতরাং বোঝা যাইতেছে যে, কোন বস্তুকে যদি উপর হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হয় তবে উহা অভিকর্ষীয় বলের প্রভাবে নিচের দিকে পড়িতে থাকিবে। ফলে উহাতে একটি ত্বরণের সৃষ্টি হইবে। এই ত্বরণকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে এবং ইহাকে 'g' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

নিম্নলিখিত কারণে প্রধানত g-এর মান পরিবর্তিত হইয়া থাকে :

(i) পৃথিবী-পৃষ্ঠ হইতে কোন স্থানের উচ্চতা বা গভীরতার জন্য।

(ii) পৃথিবীর অসম আকৃতির জন্য।

(iii) পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য।

2.16 বস্তুর ওজন (Weight of a body)

কোন বস্তুর ওজন বলিতে পৃথিবী যে বল দ্বারা বস্তুটিকে আকর্ষণ করে তাহাই বুঝি। নিউটনের গতিসূত্র অনুযায়ী,

বল = ভর × ত্বরণ

∴ m ভরের কোন বস্তুর ওজন

= ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ

বা, $W = mg$

কোন একটি বস্তুর ওজন পৃথিবী-পৃষ্ঠে যাহা হইবে, সূর্যে তাহার ওজন হইবে 27 গুণ বেশী ; কারণ সূর্যে g-এর মান পৃথিবীতে g-এর মান অপেক্ষা 27 গুণ ভারী, একই কারণে চাঁদে লইয়া গেলে উহার ওজন হইবে ছয় ভাগের এক ভাগ।

2.17 শক্তি (Energy)

পদার্থ বিজ্ঞান অনুযায়ী যাহা কোন কিছু কার্য করিতে সমর্থ তাহারই কিছু শক্তি আছে বলিয়া ধরা হয়। অর্থাৎ, কোন বস্তু বা পদার্থের কার্য করিবার ক্ষমতাকে উহার শক্তি বলে। প্রকৃতপক্ষে, শক্তি ও কার্য একই ধরণের জিনিষ এবং একই একক দ্বারা উভয়কে প্রকাশ করা হইয়া থাকে। আমরা এখানে যান্ত্রিক শক্তি সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করিব।

যান্ত্রিক শক্তিকে মূলত দুইভাগে ভাগ করা হয় : (i) স্থিতিশক্তি (Potential energy) ও (ii) গতিশক্তি (Kinetic energy)।

(i) স্থিতিশক্তি : স্বাভাবিক অবস্থা বা অবস্থান হইতে পরিবর্তন করিয়া যদি কোন বস্তুকে অন্য অবস্থা বা অবস্থানে আনা হয় তবে উহা কিছু শক্তি সঞ্চয় করে। বস্তুর এই স্থিতির জন্য যে শক্তি সঞ্চিত হয় তাহাকে উহার স্থিতিশক্তি বলে।

ধরা যাক, মাটিতে অল্প পোঁতা একটি পেরেক আছে। একটি হাতুড়ীকে কিছু উপরে উঠাইয়া উহার উপর ফেলিলে পেরেকটি মাটিতে আরো পুঁতিয়া যাইবে, কিন্তু পেরেকের মাথায় হাতুড়ী ছোয়াইয়া রাখিলে উহা আর মাটিতে ঢুকিবে না, এক্ষেত্রে পেরেক মাটিতে পুঁতিয়া যাওয়ার অর্থ কিছু কার্য সম্পাদিত হইল। হাতুড়ী এই কাজ করিবার শক্তি সংগ্রহ করে তখনই যখন হাতুড়ীকে কিছু উপরে তোলা হয়।

(ii) গতিশক্তি : যে কোন গতিশীল বস্তু উহা গতিশীল অবস্থায় থাকার জন্য কিছু শক্তি লাভ করে। বস্তুর এই শক্তিকে গতিশক্তি বলে।

তীব্র স্রোতযুক্ত পাহাড়ী নদীতে জলস্রোতের সঙ্গে সঙ্গে পাথরের টুকরাগুলিও গড়াইয়া যায়। পাথরের টুকরাগুলি গড়াইবার জন্য যে কাজ করা প্রয়োজন জল তাহা সম্পাদিত করে। এক্ষেত্রে জল ঐ কাজ সম্পন্ন করার শক্তি সংগ্রহ করে উহার গতি হইতে।

2.18 গতিশক্তির পরিবর্তন ক্রিয়ারত বলের কার্যের সমান (Change in k. e. is equal to work done by the acting force)

মনে করি, m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু u বেগ লইয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় যাত্রা করিয়াছে। ঐ রেখা বরাবর বস্তুটির উপর P বল প্রয়োগ করার ফলে ধরা যাক s দূরত্ব যাওয়ার পর উহার বেগ v হইল।

এখন বস্তুটির আদি গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mu^2$

এবং s দূরত্ব যাওয়ার পর গতিশক্তি $=\frac{1}{2}mv^2$

$\therefore$ গতিশক্তির পরিবর্তন $=\frac{1}{2}m(v^2-u^2)$

কিন্তু আমরা জানি,

$$v^2=u^2+2fs$$

অথবা, $$v^2-u^2=2fs$$

সুতরাং গতিশক্তির পরিবর্তন $=\frac{1}{2}m.2fs$

$$=mfs$$

$$=p.s$$

অর্থাৎ গতিশক্তির পরিবর্তন = ক্রিয়ারত বলের দ্বারা সম্পাদিত কার্যের সমান।

2.19 শক্তির রূপ, রূপান্তর ও অবিনশ্বরতা (Different forms, transformation and conservation of energy)

শক্তি মূলত এক হইলেও ইহাকে সাতটি পৃথক শ্রেণীতে বিভক্ত করা যাইতে পারে : (i) যান্ত্রিক শক্তি (mechanical energy), (ii) তাপশক্তি (heat energy), (iii) আলোক শক্তি (light energy), (iv) শব্দ শক্তি (sound energy), (v) চৌম্বক শক্তি (magnetic energy), (vi) তড়িৎ শক্তি (electrical energy) ও (vii) রাসায়নিক শক্তি (chemical energy)।

শক্তিকে সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না ; শুধু ইহার রূপান্তর সম্ভব। বিজ্ঞানীরা বিশ্বাস করেন, এই বিশ্ব সৃষ্টির প্রথম দিনে যে পরিমাণ শক্তি ছিল আজও তাহা বিদ্যমান। শক্তি রূপান্তরিত হইলে উহা সম-পরিমাণে অন্যরূপে দেখা যাইবে। ফলে বিশ্বের সামগ্রিক শক্তির ভাণ্ডারে কোনরূপ তারতম্য ঘটিবে না, ইহাই শক্তির অবিনশ্বরতা।

2.20 মুক্তিবেগ (Escape velocity)

আমরা জানি, কোন বস্তুকে উপরের দিকে ছুঁড়িয়া দিলে অভিকর্ষের ফলে উহা আবার মাটিতে আসিয়া পড়ে। কিন্তু বস্তুটিকে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করিতে গিয়া যদি এমন বেগ প্রয়োগ করা হয় যে উহা পৃথিবীর অভিকর্ষীয় ক্ষেত্র পার হইয়া যায়, তবে বস্তুটি আর পৃথিবী-পৃষ্ঠে ফিরিয়া আসিবে না। যে ন্যূনতম বেগে বস্তুকে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করিলে উহা আর ভূ-পৃষ্ঠে ফিরিয়া আসে না তাহাকে মুক্তিবেগ বলে।

মনে করি, পৃথিবীর ভর M ও বস্তুটির ভর m এবং পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে বস্তুর দূরত্ব x ।

$$\therefore \text{ অভিকর্ষীয় বল, } F = G\frac{Mm}{x^2} \qquad \cdots (2.32)$$

বস্তুটি যদি অভিকর্ষীয় বলের dx পরিমাণ উপরে উঠে তবে,

$$\text{কৃতকার্য} = F \times dx$$

$$= G\frac{Mm}{x^2}dx$$

এখন, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ r হইলে অভিকর্ষীয় ক্ষেত্র ছাড়াইতে বস্তুটিকে মোট যে পরিমাণ কার্য করিতে হইবে তাহা,

$$= \int_r^\infty G\frac{Mm}{x^2}dx$$

$$= GMm\int_r^\infty \frac{dx}{x^2}$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_r^\infty$$

$$= G\frac{Mm}{r}$$

আবার বস্তুটির মুক্তিবেগ v_e হইলে উহার প্রাথমিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_e^2$ । এই গতিশক্তি ব্যয় করিয়াই বস্তুটি অভিকর্ষ ক্ষেত্রের সীমানা ছাড়াইয়া যাইবে। অতএব আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{r}$$

$$\text{অথবা, } v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \qquad \cdots (2.33)$$

কিন্তু, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

$$\text{অথবা, } GM = gr^2 \qquad \cdots (2.34)$$

$$\therefore v_e = \sqrt{\frac{2gr^2}{r}} = \sqrt{2gr} \qquad \cdots (2.35)$$

উপরি-উক্ত সমীকরণ হইতে দেখা যাইতেছে যে মুক্তিবেগ বস্তুর ভরের উপর নির্ভরশীল নয়।

যদি,

$$g = 980 \text{ cm/s}^2$$

এবং $r = 64 \times 10^7$ cm হয়

তবে মুক্তিবেগ, $v_e = \sqrt{2 \times 980 \times 64 \times 10^7}$

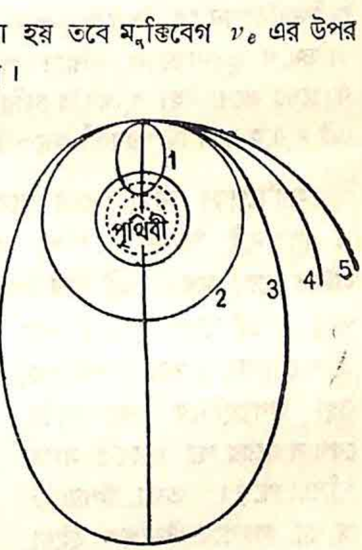
$= 11{\cdot}23 \times 10^5$ cm/second

$= 25{,}000$ miles/hour.

সুতরাং কোন বস্তুকে 25,000 miles/hour বেগ অপেক্ষা বেশী বেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করিলে উহা আর পৃথিবীতে ফিরিবে না।

কোন বস্তুকে যদি v বেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হয় তবে মুক্তিবেগ v_e এর উপর নির্ভর করিয়া আমরা নিম্নলিখিত অবস্থাগুলি পাইব।

(i) যদি $v^2 < \frac{v_e^2}{2}$ হয়, তবে বস্তুটি উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী পরিভ্রমণ করিবে এবং অবশেষে পৃথিবীতে ফিরিয়া আসিবে। 2.9 চিত্রে 1 নং দ্বারা বস্তুর এই গতিপথ প্রদর্শিত হইয়াছে।



চিত্র 2.9

(ii) যদি $v^2 = \frac{v_e^2}{2}$ হয়, তবে বস্তুটি পৃথিবীকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তাকার কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করিবে। 2.9 চিত্রে 2 নং দ্বারা বস্তুর গতিপথ দেখানো হইয়াছে।

(iii) যদি $v_e^2 > v^2 > \frac{v_e^2}{2}$ হয় তবে পৃথিবীকে একটি ফোকসে রাখিয়া বস্তুটি পৃথিবীকে উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করিবে। 2.9 চিত্রে 3 নং দ্বারা কক্ষপথটি দেখানো হইয়াছে।

(iv) যদি $v = v_e$ হয় তবে বস্তুটির গতিপথ একটি অধিবৃত্ত হইবে এবং উহা আর পৃথিবীতে ফিরিবে না। 2.9 চিত্রে কক্ষপথটি 4 নং দ্বারা চিহ্নিত করা হইয়াছে।

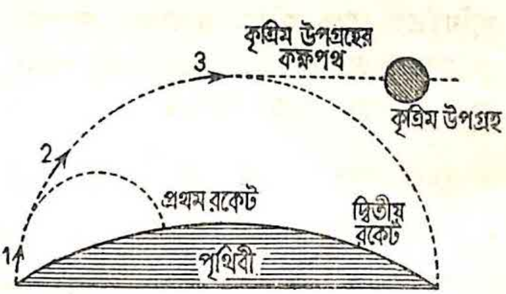
(v) যদি $v > v_e$ হয় তবে বস্তুটি পরাবৃত্তাকার পথে পৃথিবীর অভিকর্ষীয় কেন্দ্র ছাড়াইয়া যাইবে এবং আর ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসিবে না। 2.9 চিত্রে 5 নং দ্বারা এই গতিপথ দেখানো হইয়াছে।

2.21 কৃত্রিম উপগ্রহ (Artificial satellite)

আমরা দেখিয়াছি যদি $v_e^2 > v^2 > \frac{v^2}{2}$ হয় অর্থাৎ বস্তুর উৎক্ষেপণ বেগ যদি 18,000 miles/hour হইতে 25,000 miles/hour এর মধ্যে হয় তবে উহা পৃথিবীর একটি কৃত্রিম উপগ্রহ হিসাবে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করিবে। কিন্তু বেগ যদি 25,000 miles/hour অপেক্ষা অনেক বেশী হয় তবে উহা পৃথিবীর মাধ্যাকর্ষণ শক্তি ছাড়াইয়া একটি কৃত্রিম গ্রহরূপে সূর্যকে প্রদক্ষিণ করিবে। কৃত্রিম উপগ্রহই হউক বা গ্রহই হউক উভয় ক্ষেত্রেই যে প্রচণ্ড উৎক্ষেপণ বেগ সঞ্চারের প্রয়োজন হয় তাহা করা হয় বহুস্তরযুক্ত রকেটের মাধ্যমে।

সোভিয়েট বিজ্ঞানীরা প্রথম কৃত্রিম উপগ্রহ উৎক্ষেপের পূর্বে হিসাব করিয়া দেখিয়াছিলেন যে, উহাকে ভূ-পৃষ্ট হইতে প্রায় 560 মাইল ঊর্ধ্বে তুলিয়া উহার গতির অভিমুখ ভূসমান্তরাল করিতে পারিলে উহার বেগ ও পৃথিবীর আকর্ষণ এই উভয় কারণের জন্যে উহা পৃথিবীর চারিদিকে ঘণ্টায় 18,000 মাইল বেগে প্রদক্ষিণ করিবে। এই দুরূহ কার্যটি পরবর্তী কালে তিনটি স্তরের রকেট দ্বারা সম্পাদিত হইয়াছে।

সর্বাপেক্ষা নিম্ন স্তরের রকেটটি প্রথমে কাজ করিতে শুরু করে। উহা উপগ্রহ ও অপর দুই স্তরের রকেটসহ প্রথমে খাড়া উপরে উঠিয়া পরে আস্তে আস্তে বাঁক লইতে শুরু করে। এই স্তর উপগ্রহটির বেগের প্রায় $\frac{1}{6}$ অংশ যোগানোর পর খসিয়া পড়ে। এই সময় দ্বিতীয় স্তর কাজ শুরু করে এবং উহা উপগ্রহটির বেগের প্রায় $\frac{1}{2}$ অংশ যোগায় ও পরে খসিয়া পড়ে। এই সময়ে তৃতীয় স্তরের কাজ শুরু হয় এবং উহা উপগ্রহটিকে প্রয়োজনীয় বেগ সঞ্চারের পর পূর্বের ন্যায় খসিয়া পড়ে। তখন উপগ্রহটি আপন কক্ষপথে উপস্থিত হইয়া নির্দিষ্ট বেগে পৃথিবী পরিক্রমণ শুরু করে। চিত্র 2.10এ ইহা বোঝানো হইয়াছে।



চিত্র 2.10

বৃত্তাকার পথে পৃথিবী পরিভ্রমণ করিতে একটি কৃত্রিম উপগ্রহের যে অনুভূমিক বেগ প্রয়োজন তাহা আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে নির্ণয় করিতে পারি।

ধরা যাক, h উচ্চতায় অবস্থান করিয়া m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করিতেছে। এক্ষেত্রে, উপগ্রহটির উপর পৃথিবীর অভিকর্ষীয় বল = উপগ্রহটির অপকেন্দ্রিক বল।

এমন, M পৃথিবীর ভর ও r উহার ব্যাসার্ধ হইলে, উপগ্রহটির উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল $= G\dfrac{Mm}{(r+h)^2}$

যেখানে, $(r+h)=$ পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে কৃত্রিম উপগ্রহটির দূরত্ব।

আবার, উপগ্রহটির অপকেন্দ্রিক বল $= \dfrac{mv^2}{r+h}$

$$\therefore \quad G\frac{Mm}{(r+h)^2} = \frac{mv^2}{r+h}$$

অথবা, $$v^2 = \frac{GM}{(r+h)}$$

কিন্তু আমরা জানি, কৃত্রিম উপগ্রহটি ভূ-পৃষ্ঠে থাকিলে পৃথিবী যে বল দ্বারা উহাকে আকর্ষণ করিত তাহা উহার ওজনের সমান হইত।

অর্থাৎ, $$G\frac{Mm}{r^2} = mg$$

অথবা, $$GM = r^2 g$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{r^2 g}{(r+h)}$$

অথবা, $$v = r\sqrt{\frac{g}{r+h}} \qquad \ldots\ldots(2.36)$$

উপরি-উক্ত সমীকরণের সাহায্যে আমরা সহজেই প্রয়োজনীয় অনুভূমিক বেগের মান জানিতে পারি।

উদাহরণ (Examples)

1. 800 gram ভরের একটি গোলক উহার কেন্দ্র হইতে 4 cm দূরে অবস্থিত অপর একটি 4 gram ভরের গোলককে 13×10^{-6} dynes বল দ্বারা আকর্ষণ করিতেছে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং পৃথিবী-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 980 cm/s^2 হইলে পৃথিবীর ভর নির্ণয় কর।

(A sphere of mass 800 gram attracts another of mass 4 gram with a force 13×10^{-6} dynes when their centres are 4 cm apart. Calculate the mass of the earth, given radius of the earth = 6400 km and acceleration due to gravity at its surface 980 cm/s^2.)

(P. U. '65)

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হইতে আমরা জানি,

$$F = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

এখানে, $F = 13 \times 10^{-6}$ dynes

$m_1 = 800$ gram,

$m_2 = 4$ gram,

এবং $d = 4$ cm

$$\therefore \quad G = \frac{Fd^2}{m_1 m_2}$$

$$= \frac{13 \times 10^{-6} \times (4)^2}{800 \times 4}$$

$$= 6{\cdot}5 \times 10^{-8} \text{ c. g. s. unit}$$

এখন, পৃথিবীর ভর $M = \frac{r^2 g}{G}$

এখানে, $r = 6400$ km

$= 64 \times 10^7$ cm

এবং $g = 980$ cm/s^2

$$\therefore \quad M = \frac{(64 \times 10^7)^2 \times 980}{6{\cdot}5 \times 10^{-8}}$$

$$= 6{\cdot}1 \times 10^{27} \text{ gram}$$

2. পৃথিবী যদি 6·37 million metres ব্যাসার্ধের এবং 7 80 gram/c.c. ঘনত্বের লোহার তৈয়ারী একটি নিরেট গোলক হইত তবে উহার পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত হইত ? দেওয়া আছে, $G = 6{\cdot}658 \times 10^{-8}$ c. g. s. unit.

(If the earth were a solid sphere of iron of radius 6·37 million metres and density 7·86 g/c.c., what would be the value of gravity at its surface taking $G = 6.658 \times 10^{-8}$ c. g. s. units ?)

(C. U. '32)

আমরা জানি,

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{r^2}$

$$= \frac{G.\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} \qquad (\rho = \text{ঘনত্ব})$$

$$= \frac{4\pi G r \rho}{3}$$

এখানে, $G = 6{\cdot}658 \times 10^{-8}$ c.g.s. unit.

$r = 6{\cdot}37 \times 10^{8}$ cm,

এবং $\rho = 7{\cdot}86$ gram/c.c.

$$\therefore \quad g = \frac{4 \times 22 \times 6{\cdot}658 \times 10^{-8} \times 6{\cdot}37 \times 10^{8} \times 7{\cdot}86}{3 \times 7}$$

$$= 1396 \text{ cm/s}^2.$$

3. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য হইতে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $= 6300$ km., $g = 980$ cm/s^2 এবং $G = 6{\cdot}66 \times 10^{-8}$ c.g.s. unit।

(Calculate the mean density of the earth from the following data : its radius $= 6300$ km, $g = 980$ cm/s^2 and $G = 6{\cdot}66 \times 10^{-8}$ c.g.s. unit.) (C. U. '63)

আমরা জানি,

$$M = \frac{r^2 g}{G}$$

অথবা, $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{r^2 g}{G}$ (ρ = ঘনত্ব)

অথবা, $\rho = \frac{3g}{4\pi r G}$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{980 \times 7}{22 \times 63 \times 10^{7} \times 6{\cdot}66 \times 10^{-8}}$$

$$= 5{\cdot}57 \text{ gram/c.c.}$$

4. মনে করি চাঁদ পৃথিবীর চতুর্দিকে 27 দিনে $3{\cdot}8 \times 10^{5}$ km ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে একবার প্রদক্ষিণ করিতেছে এবং টাইটান শনিগ্রহের চতুর্দিকে 16 দিনে $1{\cdot}23 \times 10^{6}$ km ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে একবার প্রদক্ষিণ করিতেছে। পৃথিবী ও শনিগ্রহের ভরের তুলনা কর।

(Assuming that the moon describes a circular orbit of radius $3{\cdot}8 \times 10^{5}$ km about the earth in 27 days and the Titan describes a circular orbit of radius $1{\cdot}23 \times 10^{6}$ km about the Saturn in 16 days. Compare the mass of the earth and the Saturn.)

(C. U. '65)

কোন উপগ্রহ M ভরের কোন গ্রহের চতুর্দিকে ω কৌণিক বেগ লইয়া যদি r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে পরিভ্রমণ করে তবে

$$M=\frac{\omega^2 r^3}{G}$$

$$=\frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} \qquad \left(\because \quad \omega=\frac{2\pi}{T}\right)$$

ধরা যাক, পৃথিবীর ভর $= M_E$

এবং শনিগ্রহের ভর $= M_S$

$$\therefore \quad M_E=\frac{4\pi^2\times(3{\cdot}8\times10^5)^3}{(27)^2\times G}$$

$$\text{এবং } M_S=\frac{4\pi^2\times(1{\cdot}2^3\times10^6)^3}{(16)^2\times G}$$

$$\therefore \quad \frac{M_E}{M_S}=\frac{(3{\cdot}8\times10^5)^3\times(16)^2}{(1{\cdot}23\times10^6)^3\times(27)^2}$$

$$=\frac{1}{96{\cdot}6}$$

5. চাঁদের ভর পৃথিবীর-ভরের $\frac{1}{80}$ ভাগ এবং চাঁদের ব্যাস পৃথিবীর ব্যাসের $\frac{1}{4}$ ভাগ। চন্দ্র-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

(The mass of the moon is $\frac{1}{80}$ that of the earth and its diameter is $\frac{1}{4}$ that of the earth. Find the acceleration due to gravity on Moon's surface.)

মনে করি,

পৃথিবীর ভর $= M$, পৃথিবীর ব্যাস $= d$

এবং চাঁদের ভর $= M'$, চাঁদের ব্যাস $= d'$

এখন, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g=\frac{GM}{r^2}$

$$=\frac{GM}{(d/2)^2}=\frac{4GM}{d^2}$$

এবং চন্দ্র-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g'=\frac{4GM'}{d'^2}$

কিন্তু, $M'=\frac{1}{80}M$

এবং $d'=\frac{1}{4}d$

$$\therefore \quad g'=\frac{4GM}{5d^2}$$

সুতরাং

$$\frac{g'}{g}=\frac{4GM}{5d^2}\times\frac{d^2}{4GM}$$
$$=\frac{1}{5}$$
$$\therefore \quad g'=\frac{g}{5}$$

6. পৃথিবীর অভিকর্ষীয় ক্ষেত্র হইতে মুক্ত হইতে একটি বস্তুকে ন্যূনতম কত বেগে উৎক্ষেপ করিতে হইবে নির্ণয় কর ; অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, $g=980$ cm/s^2 এবং গোলীয় পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r=6{\cdot}4\times10^8$ cm। বায়ুর বাধা উপেক্ষণীয়।

(Find the minimum velocity of projection for a body to escape from the earth's gravitational field, if the acceleration due to the earth's gravity, $g=980$ cm/s^2 and the radius of the spherical earth $r=6{\cdot}4\times10^8$ cm. Neglect the air resistance.)

(C. U. '67)

আমরা জানি, মুক্তিবেগ $v_e=\sqrt{2gr}$

এখানে, $g=980$ cm/s^2

এবং $r=6{\cdot}4\times10^8$ cm

$$\therefore \quad v_e=\sqrt{2\times980\times6{\cdot}4\times10^8}\ \text{cm/second}$$
$$=112\times10^4\ \text{cm/second.}$$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। এই সূত্র কি সার্বিকভাবে সঠিক ? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দেখাও।

(State and explain Newton's law of gravitation. Is the law universally correct ? Give reasons for your answer.) (C. U. '45)

2. (a) অভিকর্ষ, (b) মহাকর্ষীয় বিভব ও (c) মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলিতে কি বুঝ ?

(What do you mean by the terms (*a*) Gravity, (*b*) Gravitational potential and (*c*) Gravitational constant ?) (C. U. '63, '69)

3. মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলিতে কি বুঝ ? পরীক্ষাগারে নির্ভুলভাবে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর।

(What is meant by Gravitational Constant ? Describe a laboratory method of accurately determining the gravitational constant.)

(C. U. '65, '67)

4. সংজ্ঞা লিখ: (a) মহাকর্ষীয় বিভব এবং (b) মহাকর্ষীয় ধ্রুবক। পয়েন্টিং এর পদ্ধতি অনুসারে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান কিভাবে নির্ণয় করা হয়, তাহা বর্ণনা কর।

(Define the terms : (*a*) Gravitational potential and (*b*) Gravitational constant.

Describe Poynting's method for the determination of gravitational constant.) (C. U. '80)

5. 'মহাকর্ষীয় বিভব' ও 'মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র' বলিতে কি বুঝ ব্যাখ্যা কর। একটি নিরেট গোলকের দরুণ গোলকের ভিতরে ও বাহিরে কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব ও মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের মান বাহির কর।

(Explain the terms 'Gravitational potential' and 'Gravitational field'. Derive expressions for these due to a solid sphere for points both inside and outside the sphere.) (C. U. '66)

6 একটি বস্তুকে পৃথিবীর অভিকর্ষীয় ক্ষেত্রের বাহিরে লইয়া যাইতে উহাকে ন্যূনতম কত বেগে উৎক্ষেপ করিতে হইবে তাহা বাহির কর।

(Find an expression for the minimum velocity with which a body is to be projected from the earth so that it would just go beyond the gravitational field of the earth.) (C. U. '59)

7. 1 kg ভরের দুইটি গোলকের কেন্দ্র পরস্পর হইতে 20 cm দূরে অবস্থিত। উহাদের ভিতর আকর্ষণ বল কত নির্ণয় কর যখন $g=980$ cm/s^2 ; পৃথিবীর ভর $=4\times10^{27}$ gram, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $=6\times10^8$ cm.

(Find the gravitational force of attraction exerted between two spheres of mass 1 kg placed with their centres 20 cm apart. Given, $g=980$ cm/s^2, mass of the earth $=4\times10^{27}$ gram and radius of the earth $=6\times10^8$ cm.) (C. U. '55)

[Ans. $14{\cdot}7\times10^{-5}$ dynes]

8. 20 cm ও 2 cm ব্যাসের দুইটি সীসার গোলকের কেন্দ্র পরস্পর হইতে 100 cm দূরে অবস্থিত। গোলক দুইটির ভিতর আকর্ষণ বল নির্ণয় কর। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $=6{\cdot}67\times10^8$ cm ; পৃথিবীর গড় ঘনত্ব $=5{\cdot}53$ gram/c.c. ; সীসার আপেক্ষিক গুরুত্ব $=11{\cdot}5$; $g=980$ cm/s^2।

(Two lead spheres of 20 cm and 2 cm diameter respectively are placed with the centres 100 cm apart. Calculate the force of attraction between the spheres, given the radius of the earth as $6{\cdot}67\times10^8$ cm and its mean density as 5·53 gram/c.c, ; sp. gravity of lead $=11{\cdot}5$, $g=980$ cm/s^2.) (C. U. '66)

[Ans. $1{\cdot}53\times10^{-4}$ dynes]

9. পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর, যখন $G=6.7\times10^{-8}$ c. g. s. unit, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $=6.4\times10^{8}$ cm এবং $g=981$ cm/s^2.

(Givan $G=6.7\times10^{-8}$ c.g.s. unit, radius of the earth 6.4×10^{8} cm and $g=981$ cm/s^2. Calculate the mean density of the earth.)
(C. U. '71) [Ans. 5,464 gram/c.c.]

10. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য হইতে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $=6.4\times10^{8}$ cm, $G=6.8\times10^{-8}$ c. g. s. unit, $g=981$ cm/s^2.

(Find the mean density of the earth from the following data : Radius of the earth $=6.4\times10^{8}$ cm, $G=6.8\times10^{-8}$ c. g. s. unit, $g=981$ cm/s^2)
(C. U. '75)
[Ans. 5·38 gram/c.c.]

11. নিম্নপ্রদত্ত মানগুলির সাহায্যে পৃথিবীর ভর নির্ণয় কর। $G=6.8\times10^{-8}$ c. g. s. units, $g=981$ cm/s^2, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $=6400$ km.

(Find the mass of the earth with the help of the following data : $G=6.8\times10^{-8}$ c.g.s. unit, $g=981$ cm/s^2, mean radius of the earth $=6400$ km.)
(C. U. '73 ; New syllabus '80)
[Ans. 5.9×10^{27} gram]

12. ভূপৃষ্ঠ হইতে 1600 km ঊর্ধ্বে পৃথিবীর কেন্দ্রকে কেন্দ্র করিয়া এবং উহার চতুর্দিকে বৃত্তাকারপথে পরিভ্রমণরত একটি কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ প্রতি ঘণ্টায় কত কিলোমিটার হইবে ? পৃথিবীকে একটি গোলক হিসাবে মনে করা যাইতে পারে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $=6400$ km, পৃথিবীর ভর $=6\times10^{27}$ gram এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $=6.7\times10^{-8}$ c. g. s. unit

(What should be the velocity in km per hour of an earth satellite revolving round the earth at an altitude of 1600 km above the earth along a circular trajectory with the centre of the circle coinciding with the centre of the earth, which may be assumed spherical ? Given, radius of the earth $=6400$ km mass of the earth $=6\times10^{27}$ g and the gravitational constant $=6.7\times10^{-8}$ c.g s. unit.)
(C. U. '66)
[Ans. 25,560 km/hour]

13. $G=6.66\times10^{-8}$ c.g.s. unit, পৃথিবীর ভর, $M=5.97\times10^{27}$ gram এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R=6.37\times10^{8}$ cm হইলে ভূ-পৃষ্ঠ হইতে কোন বস্তুর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর।

(Calculate the velocity of escape of a body from the earth's field if $G=6.66\times10^{-8}$ c.g.s. unit, $M=5.97\times10^{27}$ gram, $R=6.37\times10^{8}$ cm)
(C. U. '59) [Ans. 11.18×10^{5} cm/s]

14. সূর্য ও পৃথিবীর ভিতর দূরত্ব 1.49×10^{13} cm এবং $G=6.66\times10^{-8}$ c g.s. unit হইলে সূর্যের ভর নির্ণয় কর। 365 দিনে এক বৎসর ধরিয়া লও।

(Calculate the mass of the sun, given that the distance between the sun and the earth is 1.49×10^{13} cm and $G=6.66\times10^{-8}$ c.g.s. unit. Take the year to consist of 365 days.)
(C. U. '66)
[Ans. 1.97×10^{33} gram]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

স্থিতিস্থাপকতা

(Elasticity)

3.1 সূচনা (Introduction)

আমরা জানি, পাতলা একখণ্ড লম্বা রবারকে অথবা ইস্পাতের তৈয়ারী একটি স্প্রীংকে টানিয়া ছাড়িয়া দিলে উহা পূর্বের অবস্থায় ফিরিয়া আসে। এক্ষেত্রে বস্তুর উপর বলপ্রয়োগের ফলে উহার আকার বা আয়তনের কিছু পরিবর্তন হয়। কিন্তু এই বাহ্যিক বলকে বাধা দেওয়ার জন্য বস্তুর অভ্যন্তরে একটি প্রতিক্রিয়া বলের উৎপত্তি হয় যাহা উক্ত বাহ্যিক বল তুলিয়া লইলেই বস্তুটিকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়া আনে। যে ধর্মের ফলে বাহির হইতে প্রযুক্ত বল অপসারণ করিলে বিকৃত বস্তু পূর্বাবস্থায় ফিরিয়া আসে তাহাকে উক্ত বস্তুর স্থিতিস্থাপকতা বলে।

স্থিতিস্থাপকতা পদার্থের একটি সাধারণ ধর্ম। যে বস্তুর বাধাদানের ক্ষমতা যত বেশী তাহার স্থিতিস্থাপকতা তত অধিক, এই হিসাবে, রবার অপেক্ষা লোহার স্থিতিস্থাপকতা অনেক বেশী।

3.2 স্থিতিস্থাপকতা সম্পর্কিত কয়েকটি সংজ্ঞা (Some definitions in connection with elasticity)

(*i*) **স্থিতিস্থাপক** (Elastic) : যে সমস্ত বস্তু কম-বেশী স্থিতিস্থাপকতা দর্শায় তাহাদের স্থিতিস্থাপক বস্তু বলে। বস্তুর উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল তুলিয়া লইলে যদি উহা সম্পূর্ণরূপে পূর্বের অবস্থায় ফিরিয়া আসে তবে বস্তুটিকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক (perfectly elastic) বলা হয়।

(ii) **স্থিতিস্থাপক সীমা** (Elastic limit) : বলের একটি নির্দিষ্ট সীমা পর্যন্ত প্রত্যেক বস্তুই পূর্ণ স্থিতিস্থাপকতা দর্শায়। প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের ঐ সর্বোচ্চ সীমাকে পদার্থের স্থিতিস্থাপক সীমা বলে। ভিন্ন ভিন্ন পদার্থের স্থিতিস্থাপক সীমা বিভিন্ন। হীরা বা স্টীলের স্থিতিস্থাপক সীমা খুব বেশী কিন্তু সীসার খুব কম।

(iii) **যথার্থ নমনীয় ও যথার্থ দৃঢ়** (Perfectly plastic and perfectly rigid) : প্রযুক্ত বল অপসারণের পর কোন বস্তু যদি পুরোপুরি বিকৃত অবস্থায় থাকিয়া যায় তবে উহাকে যথার্থ নমনীয় বস্তু বলা হয়। অপরপক্ষে, কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের পরিমাণ যত বেশী হোক না কেন, তা সত্ত্বেও যদি উহার কোন বিকৃতি না ঘটে তবে উহাকে যথার্থ দৃঢ় বলা হয়। কোন বস্তুই যথার্থ নমনীয় বা যথার্থ দৃঢ় নয়।

(iv) **বিকৃতি** (Strain) : বাহির হইতে প্রযুক্ত বল যখন কোন স্থিতিস্থাপক বস্তুর উপর ক্রিয়া করে তখন বস্তুর দৈর্ঘ্য, আকার বা আয়তনের পরিবর্তন হয়। এই পরিবর্তনকে বিকৃতি বলে। একক মাত্রায় বস্তুর যে পরিবর্তন হয় তাহার দ্বারা বিকৃতির পরিমাপ করা হইয়া থাকে।

(v) **পীড়ন** (Stress) : বাহির হইতে প্রযুক্ত বলের দ্বারা কোন বস্তুকে বিকৃত করিলে স্থিতিস্থাপকতা গুণে পদার্থের ভিতর এক প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভব হয়। এই প্রতিক্রিয়া বল বাহিরের বলকে প্রতিরোধ করিবার চেষ্টা করে এবং বল অপসারিত হইলে বস্তুকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়া আনিতে সাহায্য করে। বস্তুর ভিতর উদ্ভূত এই প্রতিক্রিয়া বলকে পীড়ন বলা হয়। প্রতি একক ক্ষেত্রফলে বস্তুর উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল দ্বারা পীড়নের পরিমাপ করা হয়।

$$\text{অর্থাৎ, পীড়ন} = \frac{\text{প্রযুক্ত বল}}{\text{তলের ক্ষেত্রফল}}$$

সি. জি এস্. পদ্ধতিতে পীড়নের একক dynes/sq. cm এবং এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে poundals/sq. ft.

বাহ্যিক বল বস্তুর তলের সহিত আনতভাবে ক্রিয়া করিলে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে তলের অভিলম্ব দিকে ঐ বলের যে উপাংশ পাওয়া যাইবে তাহাকে অভিলম্ব পীড়ন (normal stress) বলা হয় এবং প্রতি একক ক্ষেত্রফলে তলের সমান্তরালে যে উপাংশ পাওয়া যাইবে তাহাকে স্পার্শিনী (tangential) বা কৃন্তন পীড়ন (shearing stress) বলা হইয়া থাকে।

(vi) **সহন ভার** (Breaking weight) : যদি বস্তুর উপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল ক্রমশ বৃদ্ধি করা যায় তবে বস্তুটির এমন এক অবস্থায় আসিবে যখন উহা আর ভার সহ্য করিতে না পারিয়া ভাঙ্গিয়া বা ছিঁড়িয়া যাইবে। উক্ত ভারকে সহন বা ভঞ্জক ভার বলে।

3.3 হুকের সূত্র (Hooke's law)

বিজ্ঞানী রবার্ট হুক 1671 খ্রীষ্টাব্দে স্থিতিস্থাপকতার এক সূত্র বিবৃত করেন। সূত্রটি এইরূপ : 'স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর পীড়ন ও বিকৃতি পরস্পরের সমানুপাতিক'

$$\text{অর্থাৎ, পীড়ন} \propto \text{বিকৃতি}$$

$$\text{অথবা, } \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} = \text{ধ্রুবক}$$

এই ধ্রুবককে বলা হয় স্থিতিস্থাপক গুণাংক (modulus of elasticity)।

3.4 বিভিন্ন প্রকার বিকৃতি ও স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক (Different types of strain and moduli of elasticity)

বাহ্যিক বলের দ্বারা বস্তুর দৈর্ঘ্য, আয়তন ও আকারের পরিবর্তন অনুযায়ী

বিকৃতি বিভিন্ন প্রকারের হইয়া থাকে ; ফলে স্থিতিস্থাপক গুণাংকও বিভিন্ন হইবে। যথা—

(i) **অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি ও ইয়ং গুণাংক** (Longitudinal strain and Young's modulus) : যদি কোন বস্তুর বাহ্য বলের প্রভাবে শুধু দৈর্ঘ্যের হ্রাস-বৃদ্ধি হয় তবে উক্ত পরিবর্তনকে অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি বলে এবং ঐ অবস্থায় পীড়নকে বলে অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন (Longitudinal stress)।

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন ও অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে ইয়ং গুণাংক বলে।

$$\text{অর্থাৎ, ইয়ং গুণাংক } (Y) = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

(ii) **আয়তন বিকৃতি** (Volume strain) ও **আয়তন বিকার গুণাংক** (Bulk modulus) : যদি কোন বস্তুর বাহ্য বলের প্রভাবে শুধু আয়তনের হ্রাস-বৃদ্ধি হয় তবে উক্ত পরিবর্তনকে আয়তন বিকৃতি বলা হয় এবং ঐ অবস্থায় পীড়নকে বলে আয়তন পীড়ন (volume stress)।

আয়তন পীড়ন ও আয়তন বিকৃতির অনুপাতকে আয়তন বিকার গুণাংক বলে।

$$\text{অর্থাৎ, আয়তন বিকার গুণাংক } (K) = \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$$

V আয়তনের কোন বস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফলে চতুর্দিক হইতে লম্বভাবে p বল প্রয়োগ করিলে যদি বস্তুর আয়তন v হ্রাস পায় তবে,

$$\text{আয়তন বিকৃতি} = \frac{v}{V}$$

$$\text{এবং আয়তন পীড়ন} = p$$

$$\therefore \quad K = \frac{p}{v/V} = \frac{pV}{v} \qquad \cdots (3.1)$$

আয়তন বিকার গুণাংককে কখনও কখনও অসংনম্যতা (incompressibility) বলা হইয়া থাকে। ইহার বিপরীতকে বলা হয় সংনম্যতা (compressibility)। অতএব, বস্তুর আয়তন বিকৃতি গুণাংক K হইলে, উহার

$$\text{সংনম্যতা} = \frac{1}{K}.$$

(iii) **কৃন্তন বিকৃতি** (Shearing strain) ও দৃঢ়তা গুণাংক (Rigidity modulus) : যদি কোন বস্তুর বাহ্য বলের প্রভাবে শুধু আকারের পরিবর্তন হয়, তবে ঐ ধরণের বিকৃতিকে কৃন্তন বিকৃতি এবং ঐ অবস্থায় পীড়নকে কৃন্তন পীড়ন shearing stress) বলে।

কৃন্তন পীড়ন ও কৃন্তন বিকৃতির অনুপাতকে বলা হয় দৃঢ়তা গুণাঙ্ক।

$$\text{অর্থাৎ, দৃঢ়তা গুণাঙ্ক } (n) = \frac{\text{কৃন্তন পীড়ন}}{\text{কৃন্তন বিকৃতি}}$$

3.5 পোয়াসঁর অনুপাত (Poisson's ratio)

কোন তারে টান দিলে অর্থাৎ উহার দৈর্ঘ্য বরাবর বল প্রয়োগ করিলে তারটি লম্বা হইয়া যায় অর্থাৎ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হয়। কিন্তু সঙ্গে সঙ্গে উহার ব্যাস কিছুটা হ্রাস পায়। অর্থাৎ অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির সহিত তারটির পার্শ্বীয় বিকৃতি (lateral strain) ঘটিয়া থাকে। স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে, পার্শ্বীয় বিকৃতি অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির সমানুপাতিক। অর্থাৎ,

$$\text{পার্শ্বীয় বিকৃতি} \propto \text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}$$

$$\text{বা,}\quad \frac{\text{পার্শ্বীয় বিকৃতি}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \text{ধ্রুবক } (\sigma)\text{।}$$

এই ধ্রুবককে পোয়াসঁর অনুপাত বলে।

মনে করি, একটি তারের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য ও ব্যাস যথাক্রমে L ও D এবং উহার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ও ব্যাসের হ্রাস l ও d.

$$\text{এখন, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি} = \frac{l}{L}$$

$$\text{এবং}\quad \text{পার্শ্বীয় বিকৃতি} = \frac{d}{D}$$

$$\text{সুতরাং পোয়াসঁর অনুপাত } (\sigma) = \frac{\frac{d}{D}}{l/L} = \frac{dL}{Dl}$$

যদি একটি একক ঘনক লওয়া হয় তবে,

$L = 1$ এবং $D = 1$.

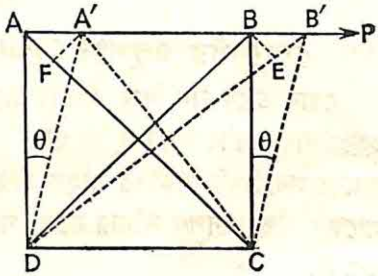
$$\sigma = \frac{d}{l}$$

$$= \frac{\text{একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন}}{\text{একক দৈর্ঘ্যের অনুদৈর্ঘ্য প্রসারণ}}$$

3.6 কৃন্তন পারস্পরিক অভিলম্ব দিকে সংকোচন এবং সমান প্রসারণের সমতুল্য (A shear is equivalent to a compression and an equal extension at right angles to each other)

মনে করি, ABCD একটি ঘনকের সম্মুখতল (চিত্র 3.1)। উহার সর্বনিম্ন তল CD টেবিলের উপর দৃঢ়ভাবে আটকানো রহিয়াছে। উহার সর্বোচ্চ তল AB-তে

একটি বল P প্রয়োগ করায় A বিন্দু A′ বিন্দুতে এবং B বিন্দু B′ বিন্দুতে সরিয়া গেল। ফলে AC কর্ণ সংকুচিত হইয়া A′C এবং BD কর্ণ দৈর্ঘ্যে প্রসারিত হইয়া B′D হইল। CD তলের সাপেক্ষে AB তলের কৌণিক সরণ যদি θ ধরা হয় তবে এক্ষেত্রে কৃন্তন বিকৃতি θ হইবে। অতএব আমরা দেখিতে পাইতেছি যে, কৃন্তন বিকৃতির দরুণ AC কর্ণের দৈর্ঘ্য হ্রাস এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইল।



চিত্র 3.1

A′ বিন্দু হইতে AC-এর উপর A′F এবং B বিন্দু হইতে B′D-এর উপর BE লম্ব অঙ্কিত করিলাম। কোণ θ খুব ছোট বলিয়া BEB′ ত্রিভুজটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে। সুতরাং $\angle BB'E = 45^\circ$ (প্রায়)।

এখন, BD-এর দৈর্ঘ্যের প্রসারণ $= EB'$

$$= BB' \cos BB'E$$

$$= BB' \cos 45^\circ$$

$$= \frac{BB'}{\sqrt{2}}$$

আবার, $\theta = \tan\theta = \dfrac{BB'}{BC}$

অর্থাৎ $BB' = BC \times \theta$

$$\therefore \quad EB' = \frac{BC \times \theta}{\sqrt{2}}$$

কিন্তু $BD^2 = BC^2 + CD^2$

$$= 2BC^2 \quad (\because \; BC = CD)$$

অথবা, $BC = \dfrac{BD}{\sqrt{2}}$

সুতরাং $EB' = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\theta}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{BD}{2} \cdot \theta$$

∴ কর্ণ BD-এর প্রসারণ বিকৃতি

$$=\frac{\frac{BD}{2}\theta}{BD}$$

$$=\frac{\theta}{2}$$

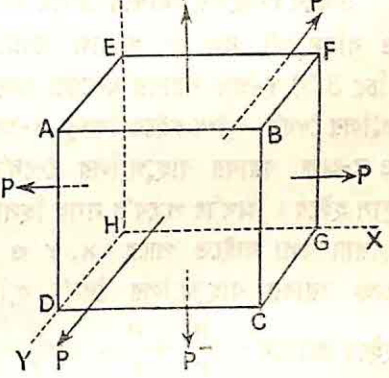
অনুরূপ দেখানো যায় যে, AC কর্ণের সংকোচন বিকৃতি

$$=\frac{\theta}{2}$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, কৃন্তন θ পরস্পর অভিলম্ব দিকে প্রসারণ-বিকৃতি $\frac{\theta}{2}$ এবং সংকোচন বিকৃতি $\frac{\theta}{2}$-এর সমতুল্য।

3.7 স্থিতিস্থাপক ধ্রুব সংখ্যাগুলির ভিতর পারস্পরিক সম্পর্ক (Inter-relations among the elastic constants)

তিনটি স্থিতিস্থাপক গুণাংক ও পোয়াসঁর অনুপাত—এই চারটি রাশিকে স্থিতিস্থাপক ধ্রুব সংখ্যা বলে। নিম্নলিখিতরূপে ইহাদের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করা যায়।



চিত্র 3.2

(i) একটি একক আয়তনের ঘনক ABCDEFGH লওয়া হইল, যাহার বাহুগুলি চিত্র 3.2-এর ন্যায় X-অক্ষ, Y-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর প্রসারিত। AEHD এবং BFGC তল দুইটির মধ্যে মধ্য বিন্দুতে এবং তলের অভিলম্বভাবে দুইটি বহির্মুখী ও সমান বল P প্রয়োগ করা হইলে X-অক্ষ বরাবর ঘনকের বাহুগুলির (যথা AB, EF, CD ও HG) দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইবে কিন্তু Y-অক্ষ (AE, BF, DH ও CG) এবং Z-অক্ষ (যথা AD, BC, EH ও FG) বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের হ্রাস হইবে।

X-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি e হইলে,

$$Y=\frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

$$= \frac{P/1}{e/1}$$ (∵ ঘনকটির প্রত্যেকটি তলের ক্ষেত্রফল একক ও প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্যও একক)

$$= \frac{P}{e}$$

$\therefore \quad e = \frac{P}{Y}$ = একক দৈর্ঘ্যের অনুদৈর্ঘ্য প্রসারণ।

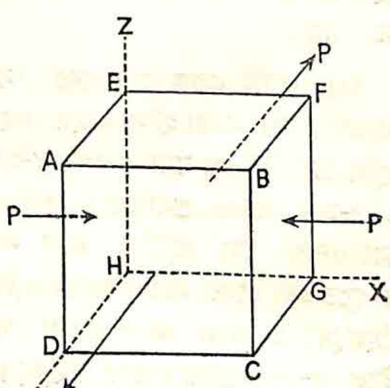
$$\therefore \quad \sigma = \frac{\text{একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন}}{\text{একক দৈর্ঘ্যের অনুদৈর্ঘ্য প্রসারণ}}$$

$$= \frac{\text{একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন}}{P/Y}$$

বা, একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন $= \sigma \frac{P}{Y}$

সুতরাং বল প্রয়োগের ফলে X-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইল $\frac{P}{Y}$ কিন্তু Y-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের হ্রাস হইল $+\sigma\frac{P}{Y}$ অর্থাৎ দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধি হইল $-\sigma\frac{P}{Y}$।

এক্ষণে Y-অক্ষের সমান্তরালভাবে ABCD ও EFGH তলের মধ্য বিন্দুতে দুইটি সমান ও বহির্মুখী বল P প্রয়োগ করিলে (চিত্র 3.3) Y-অক্ষ বরাবর ঘনকের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইবে কিন্তু X-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের হ্রাস হইবে। অর্থাৎ পূর্বের ন্যায় হিসাব করিয়া বলা যাইতে পারে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইবে যথাক্রমে $-\sigma\frac{P}{Y}$, $+\frac{P}{Y}$ ও $-\sigma\frac{P}{Y}$.



চিত্র 3.3

অনুরূপে Z-অক্ষ বরাবর AEFB ও DHGC তলের মধ্য বিন্দুতে আরও দুইটি সমান ও বহির্মুখী বল প্রয়োগ করিলে Z-অক্ষ বরাবর ঘনকের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের প্রসারণ হইবে কিন্তু X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সংকোচন হইবে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে X-অক্ষ, Y-অক্ষ ও -অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইবে যথাক্রমে $-\sigma\frac{P}{Y}$, $-\sigma\frac{P}{Y}$ ও $+\frac{P}{Y}$.

উপরি-উক্ত ছয়টি বল ঘনকের উপর একই সাথে ক্রিয়া করিলে উহার প্রতিটি বাহুর মোট প্রসারণ

$$=\frac{P}{Y}-\sigma\frac{P}{Y}-\sigma\frac{P}{Y}$$

$$=\frac{P}{Y}\ (1-2\sigma)$$

এখন, ঘনকটির প্রতিটি বাহুর প্রাথমিক দৈর্ঘ্য $=1$

এবং উহার প্রাথমিক আয়তন $=1^3=1$

$\therefore$ ঘনকটির প্রতিটি বাহুর বর্তমান দৈর্ঘ্য

= প্রাথমিক দৈর্ঘ্য + প্রসারণ

$$=1+\frac{P}{Y}(1-2\sigma)$$

অতএব উহার বর্তমান আয়তন

$$=\left\{1+\frac{P}{Y}(1-2\sigma)\right\}^3$$

$$=1+\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)$$

অর্থাৎ ঘনকটির আয়তনের পরিবর্তন

= বর্তমান আয়তন − প্রাথমিক আয়তন

$$=1+\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)-1$$

$$=\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)$$

অতএব, আয়তন বিকৃতি $=\dfrac{\text{আয়তনের পরিবর্তন}}{\text{প্রাথমিক আয়তন}}$

$$=\frac{\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)}{1}$$

$$=\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)$$

সুতরাং আয়তন গুণাংক $=\dfrac{\text{চাপ}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$

$$= \frac{\text{বল/তলের ক্ষেত্রফল}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$$

$$= \frac{P/1}{\frac{3P}{Y}(1-2\sigma)}$$

$$\text{বা,}\quad K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

$$\text{অর্থাৎ,}\qquad Y = 3K(1-2\sigma) \qquad \cdots(3.2)$$

সমীকরণ (3.2) Y, K ও σ-এর ভিতর সম্পর্ক নির্দেশ করে।

(ii) একটি একক আয়তনের ঘনক ABCDEFGH লওয়া হইল যাহার বাহুগুলি যথাক্রমে X-অক্ষ, Y-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর প্রসারিত। তল ABCD ও EFGH-এর মধ্য বিন্দুতে Y-অক্ষের সমান্তরালভাবে দুইটি সমান ও বহির্মুখী বল P এবং তল ADHE ও BCGF-এর মধ্য বিন্দুতে X-অক্ষ বরাবর দুইটি সমান ও অন্তর্মুখী বল P প্রয়োগ করা হইল।

Y-অক্ষের সমান্তরাল বহির্মুখী বল প্রয়োগ করার ফলে Y-অক্ষ বরাবর ঘনকটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হইবে কিন্তু X-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য হ্রাস পাইবে। অনুরূপে X-অক্ষের সমান্তরাল অন্তর্মুখী বল প্রয়োগ করায় X-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য হ্রাস হইবে কিন্তু Y-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাইবে।

এক্ষণে, Y-অক্ষ বরাবর ঘনকের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি e হইলে

$$Y = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

$$= \frac{P/1}{e/1} = \frac{P}{e}$$

$$\therefore\quad e = \frac{P}{Y}$$

$$\text{এবং}\quad \sigma = \frac{\text{একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন}}{\text{একক দৈর্ঘ্যের অনুদৈর্ঘ্য প্রসারণ}}$$

$$= \frac{\text{একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন}}{\frac{P}{Y}}$$

$$\therefore\quad \text{একক দৈর্ঘ্যের পার্শ্বীয় সংকোচন} = \sigma\frac{P}{Y}$$

সুতরাং X-অক্ষ ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য হ্রাস পাইবে $\sigma\frac{P}{Y}$ অর্থাৎ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাইবে $-\sigma\frac{P}{Y}$। অনুরূপে X-অক্ষ বরাবর অন্তর্মুখী বল প্রয়োগ করায় Y ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাইবে $\sigma\frac{P}{Y}$।

উপরি-উক্ত চারটি বল ঘনকটির উপর যুগপৎ ক্রিয়া করিলে X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির দৈর্ঘ্য প্রসারণ হইবে :

X-অক্ষ বরাবর

$$-\frac{P}{Y}-\sigma\frac{P}{Y}=-(1+\sigma)\frac{P}{Y}$$

Y-অক্ষ বরাবর

$$\frac{P}{Y}+\sigma\frac{P}{Y}=(1+\sigma)\frac{P}{Y}$$

Z-অক্ষ বরাবর

$$-\sigma\frac{P}{Y}+\sigma\frac{P}{Y}=0$$

অর্থাৎ X-অক্ষ বরাবর ঘনকটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সংকোচন ও Y-অক্ষ বরাবর প্রসারণ হইবে কিন্তু Z-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির কোনরূপ পরিবর্তন হইবে না। X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর বাহুগুলির সংকোচন ও প্রসারণের মান সমান বলিয়া ঘনকটির X-Y তলের কৃন্তন বিকৃতি দেখা যাইবে। ঐ কৃন্তন বিকৃতি θ হইলে

$$\theta=2\times(1+\sigma)\frac{P}{Y}$$

এখন,

$$\text{দৃঢ়তা গুণাঙ্ক}=\frac{\text{কৃন্তন পীড়ন}}{\text{কৃন্তন বিকৃতি}}$$

$$=\frac{P/1}{\theta}$$

$$\text{বা,}\quad n=\frac{P}{2\frac{P}{Y}(1+\sigma)}$$

$$=\frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

অর্থাৎ, $Y=2n(1+\sigma)$ ...(3.3)

সমীকরণ (3.3) Y, n ও σ এর ভিতর সম্পর্ক নির্দেশ করে।

(iii) K, n ও σ এর ভিতর সম্পর্ক

সমীকরণ (3.2) ও (3.3) হইতে পাই,

$$3K(1-2\sigma)=2n(1+\sigma)$$

বা, $$\sigma(2n+6K)=3K-2n$$

$$\therefore \quad \sigma=\frac{3K-2n}{2n+6K} \qquad \cdots(3.4)$$

(iv) Y, K ও n এর ভিতর সম্পর্ক

সমীকরণ (3.2) ও (3.3) হইতে পাই,

$$\frac{Y}{3K}=1-2\sigma \qquad \cdots(3.5)$$

এবং $$\frac{Y}{n}=2+2\sigma \qquad \cdots(3.6)$$

সমীকরণ (3.5) ও (3.6) যোগ করিয়া পাই,

$$\frac{Y}{3K}+\frac{Y}{n}=3$$

বা, $$\frac{Y(n+3K)}{3nK}=3$$

$$\therefore \quad Y=\frac{9nK}{n+3K} \qquad \cdots(3.7)$$

3.7.1 পোয়াসঁর অনুপাতের সীমাস্থ মান (Limiting Values of Poisson's Ratio)

সমীকরণ (3.2) ও (3.3) হইতে পাই,

$$\frac{3K}{2n}=\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}$$

K ও n ধনাত্মক বলিয়া $\frac{3K}{2n}$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}$ একটি ধনাত্মক রাশি।

এখন যদি σ-এর মান $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বেশী হয় তবে $\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}$ এর লব ধনাত্মক ও হর ঋণাত্মক হইবে। ফলে $\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}$ ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ $\frac{3K}{2n}$ ঋণাত্মক হইবে। কিন্তু তাহা

অসম্ভব। আবার যদি σ এর মান -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় (-2, -3 ইত্যাদি) তবে $\frac{1+\sigma}{1-2\sigma}$ এর লব ঋণাত্মক কিন্তু হর ধনাত্মক হইবে। ফলে $\frac{3K}{2n}$ ঋণাত্মক হইবে, যাহা অসম্ভব।

সুতরাং σ এর মান -1 ও $+\frac{1}{2}$ এর ভিতর থাকিবে।

3.8 বস্তুর বিকৃতির দরুণ কৃতকার্য (Work done in deforming a body)

বাহির হইতে বলপ্রয়োগের দ্বারা কোন বস্তুকে বিকৃত করিলে বস্তুটির উপর যে পরিমাণ কার্য করা হয় তাহা স্থিতিশক্তিরূপে বস্তুতে সঞ্চিত থাকে। বস্তুর বিকৃতি উৎপাদনে যে কার্য সম্পাদিত হয় তাহা নিম্নে আলোচনা করা হইল।

অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি (Longitudinal strain): মনে করি, L দৈর্ঘ্যের একটি তারে F বল প্রয়োগ করায় l দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি হইল। এই দৈর্ঘ্যবৃদ্ধিকে আমরা অসংখ্য ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি dl এর সমষ্টি হিসাবে মনে করিতে পারি।

dl দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি ঘটাইতে কৃতকার্যের পরিমাণ $= F \times dl$

$\therefore$ l দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি করিতে মোট কৃতকার্য, $W = \int_0^l F\,dl$

কিন্তু, ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = \frac{F/a}{l/L}$ ($a =$ তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল)

বা, $F = Y\frac{la}{L}$

$$\therefore \quad W = \int_0^l Y\frac{la}{L}\,dl$$

$$= \frac{Ya}{L}\int_0^l l\,dl$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Yal^2}{L}$$

$$= \frac{1}{2}Y\left(\frac{l}{L}\right)^2 . La$$

$$= \frac{1}{2}Y\left(\frac{l}{L}\right)^2 \times \text{তারের আয়তন}$$

∴ প্রতি একক আয়তনে কৃতকার্য=প্রতি একক আয়তনে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ

$$=\frac{1}{2}Y\left(\frac{l}{L}\right)^2$$

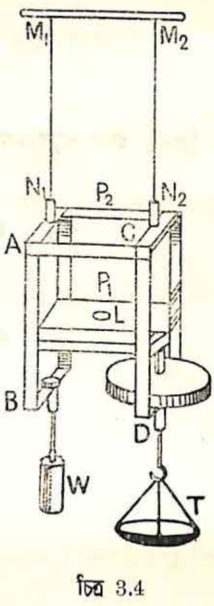
$$=\frac{1}{2}\ \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}\ (\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি})^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\text{পীড়ন}\times\text{বিকৃতি}$$

আয়তন বিকৃতি বা কৃন্তন বিকৃতির ক্ষেত্রেও উপরি-উক্ত সম্পর্ক অনুরূপে দেখানো যাইতে পারে।

3.9 সার্লের পদ্ধতিতে পরীক্ষাগারে ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় (Determination of Young's modulus by Searle's method in a laboratory)

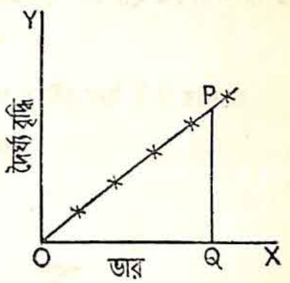
চিত্র 3.4 এ এই পদ্ধতির পরীক্ষা ব্যবস্থা দেখানো হইয়াছে। একটি দৃঢ় সমতল ও অনুভূমিক অবলম্বন হইতে দুইটি তার M_1N_1 ও M_2N_2কে ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। তার দুইটির নিচে দুইটি চতুষ্কোণ ধাতব ফ্রেম AB ও CD আটকানো আছে। উল্লম্ব তলে ফ্রেম দুইটি যাহাতে সহজে নড়া-চড়া করিতে পারে সেইজন্য দুইটি ধাতব পাত P_1 ও P_2 ফ্রেম দুইটির সহিত আটকানো রহিয়াছে। P_1 পাতের উপর একটি স্পিরিট লেভেল L আছে, যাহার একপ্রান্ত স্থির অবলম্বনে থাকে ও অপরপ্রান্ত একটি মাইক্রোমিটার স্ক্রু S এর উপর বসানো থাকে। AB ফ্রেমের নিম্ন-প্রান্তে একটি ওজন W ও CD ফ্রেমের নিম্নপ্রান্তে একটি তুলাপাত্র T রাখা হয়।



চিত্র 3.4

পরীক্ষাকালে তুলাপাত্রে কিছু ওজন চাপাইলে স্পিরিট লেভেলের বুদ্বুদ একপ্রান্তে সরিয়া যায়। মাইক্রোমিটার স্ক্রু ঘুরাইয়া লেবেলটিকে পূর্ব অবস্থায় ফিরাইয়া আনা হয় এবং প্রথম ও দ্বিতীয় পাঠের অন্তর হইতে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নির্ণয় করা হয়। বিভিন্ন ওজন প্রয়োগ করিয়া মাইক্রোমিটার স্ক্রু-এর সাহায্যে এইভাবে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি দেখা হয়। অতঃপর X-অক্ষ বরাবর বিভিন্ন ভার ও Y-অক্ষ বরাবর আনুষঙ্গিক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির মান বসাইলে চিত্রে 3.5-এর ন্যায় একটি সরলরেখা পাওয়া যাইবে। লেখচিত্রটির

উপর সুবিধামত একটি বিন্দু P লইয়া ঐ বিন্দু হইতে X-অক্ষের উপর PQ লম্ব টানিলে OQ-এর মান ভার এবং PQ-এর মান ঐ ভারে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নির্দেশ করিবে।

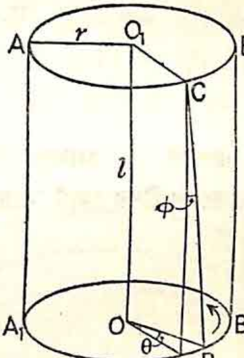


চিত্র 3.5

লেখ হইতে M ও l এর মান সমীকরণ $Y=\frac{MgL}{\pi r^2 l}$-এ বসাইয়া ইয়ং গুণাঙ্ক Y নির্ণয় করা যাইবে। একটি স্ক্রু গেজ দ্বারা পরীক্ষণীয় তার M_1N_1-এর ব্যাস ও স্কেল দ্বারা তারের দৈর্ঘ্য L মাপা হয়।

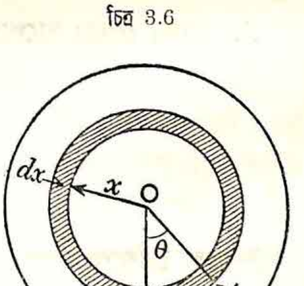
3.10 চোঙের অথবা তারের ব্যাবর্তন বা মোচড় (Torsion of a cylinder or of a wire)

একপ্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করিয়া কোন চোঙ বা তারের অপর প্রান্তে যদি মোচড় প্রয়োগ করা হয়, তবে উহা নিজ অক্ষের সাপেক্ষে কিছু পাক খাইতে থাকিবে। এই অবস্থায় তারটির শুধু আকৃতির পরিবর্তন হয় কিন্তু দৈর্ঘ্য বা ব্যাস অপরিবর্তিত থাকে ; অর্থাৎ তারটির মোচড় বিকৃতি দেখা যায়। তারের স্থিতিস্থাপকতা গুণে উহার ভিতর অপর একটি দ্বন্দ্বের উদ্ভব হয় যাহা তারটিকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়া যাইতে সাহায্য করে। এই দুই দ্বন্দ্বের ভ্রামক পরস্পর সমান ও বিপরীত।



চিত্র 3.6

মনে করি, l দৈর্ঘ্য ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি চোঙ লওয়া হইল যাহার উপরের প্রান্ত AB দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ (চিত্র 3.6)। ধরা যাক, নিম্নপ্রান্ত A_1B_1-এ তীর চিহ্নের দিকে একটি মোচড় দ্বন্দ্ব (twisting couple) প্রয়োগ করার ফলে OP ব্যাসার্ধ θ কোণে মোচড় খাইয়া OP_1 অবস্থানে আসিল। আবার, চোঙের উপর অবস্থিত এবং OO_1 রেখার বেড়ের সমান্তরাল কোন রেখা CP বিবেচনা করিলে মোচড়ের জন্য ইহা ϕ কোণ ঘুরিয়া CP_1 অবস্থানে সরিয়া আসিবে।



চিত্র 3.7

এক্ষণে, নিরেট চোঙটিকে আমরা কতকগুলি সমাক্ষীয় (co-axial) চোঙাকৃতি খোলকের সমষ্টি বলিয়া ধরিতে পারি। মনে করি, ঐরূপ একটি চোঙাকৃতি খোলকের ব্যাসার্ধ x এবং প্রস্থ dx (চিত্র 3.7)। মোচড় কোণ ϕ এর মান সর্বাধিক হইবে যখন $x=r$ এবং ন্যূনতম

হইবে যখন $x=0$। P ও P_1 বিন্দু দুইটি যদি x ব্যাসার্ধের ফাঁপা চোঙের বেড়ের উপর অবস্থিত হয় এবং মোচড় কোণ ϕ হয় তবে 3.6 চিত্র হইতে পাই,

$$PP_1 = l\phi$$

আবার 3.7 চিত্র হইতে পাই,

$$PP_1 = x\theta$$

$$\therefore \quad l\phi = x\theta$$

$$\text{অথবা,} \quad \phi = \frac{x\theta}{l} \qquad \cdots \qquad (3.8)$$

চোঙের উপাদানের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক n এবং মোচড় পীড়ন F হইলে,

$$n = \frac{\text{মোচড় পীড়ন}}{\text{মোচড় বিকৃতি}}$$

$$= \frac{F}{\phi}$$

$$\text{বা,} \quad F = n\phi$$

$$= \frac{nx\theta}{l} \qquad \cdots (3.9)$$

[সমীকরণ (3.8) হইতে ϕ এর মান বসাইয়া]

এক্ষণে, x ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ফাঁপা চোঙের মুখের ক্ষেত্রফল $= 2\pi x dx$ এবং ঐ ক্ষেত্রফলের উপর মোট মোচড় বল = পীড়ন × ক্ষেত্রফল

$$= \frac{nx\theta}{l} \cdot 2\pi x dx$$

$$= \frac{2\pi n\theta}{l} x^2 dx$$

$\therefore$ OO_1 রেখার সাপেক্ষে ঐ বলের ভ্রামক

$$= \frac{2\pi n\theta}{l} x^2 dx \times x$$

$$= \frac{2\pi n\theta}{l} x^3 dx$$

উপরের রাশিকে $x=0$ এবং $x=r$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে সমগ্র চোঙের উপর মোচড় দ্বন্দ্বের ভ্রামক পাওয়া যাইবে,

$$\therefore \quad \text{মোট মোচড় দ্বন্দ্বের ভ্রামক} = \int_0^r \frac{2\pi n\theta}{l} x^3 dx$$

$$=\frac{2\pi n\theta}{l}\left[\frac{x^4}{4}\right]_o^r$$

$$=\frac{\pi n\theta r^4}{2l}$$

এখন $\theta=1$ রেডিয়ান হইলে,

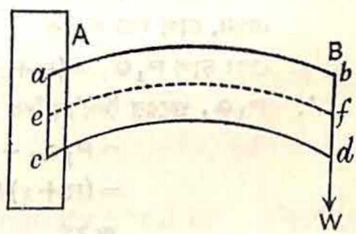
প্রতি একক পাকে মোচড় দ্বন্দ্বের ভ্রামক $=\frac{\pi n r^4}{2l}$ ।

ইহাকে চোঙের ব্যাবর্তনীয় দৃঢ়তা (torsional rigidity) বলে।

3.11 বাঁকাইবার দরুণ দণ্ডের বিকৃতি ও নমনাঙ্ক (Deformation of a Beam by Bending and Bending Moment)

একটি গোল বা আয়তাকার সুষম প্রস্থচ্ছেদযুক্ত রড, যাহার বেধ দৈর্ঘ্যের তুলনায় খুব কম তাহাকে বীম বা দণ্ড বলে। একটি বীমের একপ্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকাইয়া অপর প্রান্তে ভার প্রয়োগ করিলে উহা প্রযুক্ত বলের ভ্রামকের দরুণ বাঁকিয়া যাইবে। পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা গুণে বীমের বিকৃতির সঙ্গে সঙ্গে উহার ভিতর এক প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি হয় যাহা বীমকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়া আনিতে চেষ্টা করে। সাম্যাবস্থায় বাঁকাইবার দরুণ দ্বন্দ্বের ভ্রামক ও প্রত্যানয়নকারী দ্বন্দ্বের ভ্রামক পরস্পরের সমান ও বিপরীতমুখী হইবে।

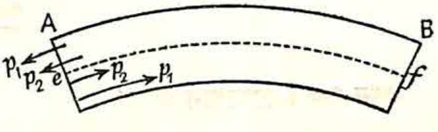
ধরা যাক, অতি ক্ষুদ্র বেধের অসংখ্য পাতলা স্তর পরপর রাখিয়া একটি বীম তৈয়ারী হইয়াছে। চিত্র 3.8 এ, AB একটি বীম, যাহার A প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকানো ও B প্রান্তে একটি ভার W চাপানো আছে। বীমটি অসংখ্য পাতলা স্তরের সমষ্টি বলিয়া কল্পনা করিলে ab হইবে বাহিরের দিকের একটি স্তর ও cd ভিতর দিকের।



চিত্র 3.8

B প্রান্তে W ভার প্রয়োগ করার ফলে ab এর মত বাহিরের স্তরগুলি সম্প্রসারিত ও cd এর মত ভিতরের স্তরগুলি সংকুচিত হইবে। ঐরূপ দুই স্তরের মধ্যস্থলে ef স্তরের ন্যায় এমন একটি স্তর পাওয়া যাইবে যাহার কোন সংকোচন বা প্রসারণ ঘটিবে না। ঐ স্তরকে উদাসীন তল (neutral surface) বলা যাইতে পারে। বাহির হইতে প্রযুক্ত দ্বন্দ্ব যে তলে ক্রিয়া করে অর্থাৎ যে তলে বীমটি বাঁকে তাহাকে নমনতল (plane of bending) বলে। নমনতল দ্বারা উদাসীন তলকে লম্বভাবে ছেদ করিলে যে ছেদ রেখা পাওয়া যাইবে তাহাকে উদাসীন অক্ষ (neutral axis) বলা হয়। চিত্রে ef রেখা হইতেছে একটি উদাসীন অক্ষ।

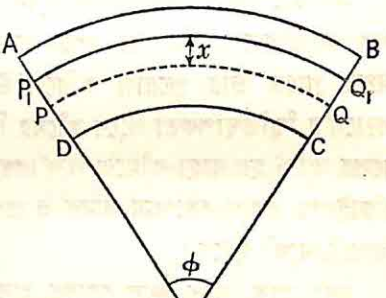
স্থিতিস্থাপকতা হইতে উদ্ভূত প্রতিক্রিয়া বল দ্বারা বীমটির বিভিন্ন স্তরের প্রসারণ বা সংকোচন বাধাপ্রাপ্ত হয়। চিত্র 3.9 এ p_1, p_2 এরূপ প্রতিক্রিয়া বল। এই প্রতিক্রিয়া বলগুলি কতকগুলি দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করে যাহাদের লব্ধিকে বলা হয় অন্তঃনমনাঙ্ক (internal bending moment)। বাহির হইতে প্রযুক্ত বল W ও বীমের যে কোন ছেদগামী W এর প্রতিক্রিয়া বল যে দ্বন্দ্ব সৃষ্টি করে তাহাকে বহিঃনমনাঙ্ক (external bending moment) বলে। সাম্য অবস্থায় অন্তঃনমনাঙ্ক বহিঃনমনাঙ্ককে প্রশমিত করিয়া থাকে।



চিত্র 3.9

3.11.1 নমনাঙ্ক বা বক্রনের ভ্রামক (Bending Moment)

মনে করি, দণ্ডের কোন একটি ক্ষুদ্র অংশ ABCDকে বৃত্তের চাপের আকারে বাঁকানো হইয়াছে (চিত্র 3.10)। উদাসীন অক্ষ PQ বক্রতা কেন্দ্র Oতে ϕ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। ধরা যাক PQ এর বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) R, PQ হইতে x দূরত্বে আর একটি স্তর P_1Q_1 কল্পনা করিলাম, যাহার বক্রতা ব্যাসার্ধ হইবে $(R+x)$।



চিত্র 3.10

এখন, চাপ $PQ = R\phi$

এবং চাপ $P_1Q_1 = (R+x)\phi$

$\therefore$ P_1Q_1 স্তরের দৈর্ঘ্যবৃদ্ধি

$$= P_1Q_1 - PQ$$
$$= (R+x)\phi - R\phi$$
$$= x\phi$$

অর্থাৎ P_1Q_1 স্তরের অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \dfrac{\text{দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য}}$

$$= \frac{x\phi}{R\phi} = \frac{x}{R}$$

এখন, দণ্ডের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = \dfrac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

$\therefore$ P_1Q_1 স্তরে উদ্ভূত পীড়ন $= Y \times$ বিকৃতি

$$= Y \times \frac{x}{R} = \frac{Y}{R}x$$

অর্থাৎ P_1Q_1 স্তরের ভিতর মোট উৎপন্ন বলের পরিমাণ

p = পীড়ন × প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

$= \frac{Y}{R}x \cdot a$ (ধরা যাক, a = প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল)

উদাসীন অক্ষের সাপেক্ষে উৎপন্ন বলের ভ্রামক

$$= px$$

$$= \frac{Y}{R}ax^2$$

∴ ABCD অংশের মোট ভ্রামক $= \frac{Y}{R}\Sigma ax^2$ ... ...(3.10)

সমীকরণ (3.10)এ Σax^2 রাশিটি উদাসীন অক্ষের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামক সদৃশ। এই কারণে Σax^2কে প্রস্থচ্ছেদ a এর জ্যামিতিক জড়তা ভ্রামক (geometrical moment of inertia) বলে। ABCD তলের ক্ষেত্রফল A এবং উদাসীন অক্ষের সাপেক্ষে উহার চক্রগতির ব্যাসার্ধ x হইলে

$$\Sigma ax^2 = AK^2$$

∴ সমীকরণ (3.10) হইতে পাই,

ABCD অংশের মোট ভ্রামক বা অন্তঃনমনাঙ্ক

$$= \frac{Y}{R} \cdot AK^2$$

$$= \frac{Y}{R} \cdot I \qquad \cdots(3.11)$$

যেখানে, $I = AK^2$

YI রাশিকে দণ্ডটির নমন দৃঢ়তা (flexural rigidity) বলা হয়। বাঁকানোর বিরুদ্ধে দণ্ড যে প্রতিরোধ সৃষ্টি করে নমন দৃঢ়তা বলিতে তাহাই বুঝায়।

সাম্যাবস্থায় অন্তঃনমনাঙ্ক ও বহিঃনমনাঙ্ক সমান বলিয়া আমরা লিখিতে পারি,

বহিঃনমনাঙ্ক $= \frac{YAK^2}{R} = \frac{YI}{R}$

যদি R = 1 ধরা হয় তবে,

বহিঃনমনাঙ্ক $= YAK^2 = YI$

কোন দণ্ডের একক বক্রতা ব্যাসার্ধ উৎপন্ন করিতে প্রয়োজনীয় বহিঃনমনাঙ্ককে দণ্ডের নমন দৃঢ়তা বলে।

(a) দণ্ডটি গোলাকার হইলে,

$A = \pi r^2$ (r = দণ্ডের ব্যাসার্ধ)

এক্ষেত্রে PQ হইবে দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাস

$\therefore$ ব্যাসের সাপেক্ষে ABCD অংশের জড়তা ভ্রামক $= \frac{Mr^2}{4}$

কিন্তু $MK^2 = \frac{Mr^2}{4}$ (K = চক্রগতির ব্যাসার্ধ)

অথবা, $K^2 = \frac{r^2}{4}$

$$\therefore \quad I = AK^2$$

$$= \pi r^2 . \frac{r^2}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} r^4$$

সুতরাং নমনাঙ্ক $= \frac{Y}{R} \cdot \frac{\pi}{4} r^4$

$$= \frac{\pi Y r^4}{4R}$$

(b) দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদ আয়তাকার হইলে,

$$A = b \times d$$

যেখানে b ও d ABCD তলের যথাক্রমে প্রস্থ ও বেধ।

ABCD তলের ভর M হইলে AB-এর সমান্তরাল PQ অক্ষের সাপেক্ষে ABCD তলের জড়তা ভ্রামক,

$$= \frac{Md^2}{12}$$

কিন্তু $MK^2 = \frac{Md^2}{12}$

$$\therefore \quad K^2 = \frac{d^2}{12}$$

$\therefore$ নমনাঙ্ক $= \frac{Y}{R} AK^2$

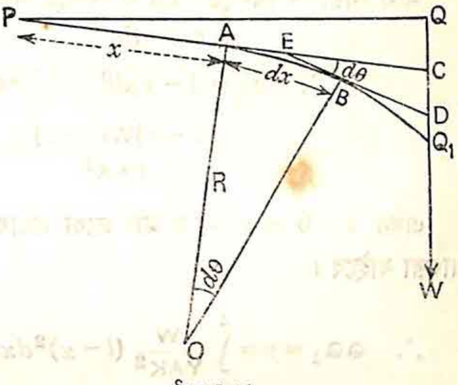
$$= \frac{Y}{R} \cdot \frac{bd^3}{12}$$

$$= \frac{Ybd^3}{12R}$$

3.12 ক্যান্টিলিভার (Cantilever)

একটি অনুভূমিক দণ্ডের একপ্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকাইয়া অপর প্রান্তে ভার চাপাইলে, ঐ দণ্ডকে ক্যাণ্টিলিভার বা কর্ণলম্ব বলে।

ধরা যাক, l দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি কর্ণলম্বের P প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকাইয়া Q প্রান্তে W ভার চাপানো হইল। PQ হইতেছে একটি উদাসীন অক্ষ, যাহা ভার চাপানোর ফলে PQ_1 অবস্থানে গিয়াছে (চিত্র 3.11)। বদ্ধপ্রান্ত P হইতে x দূরত্বে A বিন্দুতে দণ্ডের একটি ছেদ কল্পনা করিলাম। W ভারের জন্য বহিঃনমনাঙ্ক $= W \times AQ_1 = W(l-x)$।



চিত্র 3.11

কিন্তু দণ্ডের বিকৃতির ফলে উহার ভিতরে যে প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভব হয় তাহারা কতকগুলি দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করে। ঐ দ্বন্দ্বগুলির লব্ধি বা অন্তঃনমনাঙ্ক

$$=\frac{YAK^2}{R}$$

$$\therefore \quad W(l-x)=\frac{YAK^2}{R} \qquad \cdots \quad (3.11)$$

এইবার, A বিন্দুর খুব নিকটে dx দূরে অপর একটি বিন্দু B লওয়া হইল। dx খুব ছোট বলিয়া B বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ A বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধের সমান ধরা যাইতে পারে।

এখন, চিত্র 3.11 হইতে পাই,

$$\text{চাপ } AB = R \times d\theta = dx \text{ যেখানে } \angle ACB = dx$$

$$\text{অথবা,} \quad R=\frac{dx}{d\theta} \qquad \cdots (3.12)$$

সমীকরণ (3.11) এ R এর মান বসাইয়া পাই,

$$W(l-x)=YAK^2 \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{অথবা,} \quad d\theta=\frac{W(l-x)}{YAK^2}dx \qquad \cdots (3.13)$$

AC ও BD দুইটি স্পর্শক A ও B বিন্দুতে টানা হইল ; এখন, OA ও OB বক্রতা

ব্যাসার্ধদ্বয় AC ও BD স্পর্শকদ্বয়ের উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে অভিলম্ব হওয়ায়, $\angle CED = d\theta$ হইবে।

মনে করি, A বিন্দুর নিচে B বিন্দুর অবনমন

$$= CD = dy$$

$$\therefore \quad dy = (l-x)d\theta \qquad [\text{ AB খুব ছোট বলিয়া }]$$

$$= \frac{(l-x)W(l-x)}{YAK^2}dx \qquad \cdots(3.14)$$

এখন $x=0$ ও $x=l$ সীমার মধ্যে সমাকলন করিলে দণ্ডের মোট অবনমন QQ_1 পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad QQ_1 = y = \int_0^l \frac{W}{YAK^2}(l-x)^2 dx$$

$$= \frac{W}{YAK^2}\left[\int_0^l l^2 dx - \int_0^l 2lx dx + \int_0^l x^2 dx\right]$$

$$= \frac{W}{YAK^2}\frac{l^3}{3}$$

$$= \frac{Wl^3}{3YAK^2}$$

$$= \frac{Wl^3}{3YI} \quad (\because \; I = AK^2) \qquad \cdots(3.15)$$

দণ্ডটি আয়তাকার হইলে,

$$K^2 = \frac{d^2}{12}$$

$$\therefore \quad y = \frac{Wl^3 \times 12}{3YAd^2}$$

$$= \frac{4Wl^3}{Ybd^3} \qquad (\because \; A = bd) \qquad \cdots(3.16)$$

3.13 তরল ও বায়বীয় পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা (Elasticity of liquids and gases)

তরলের সামান্য আয়তন স্থিতিস্থাপকতা আছে; কিন্তু অনুদৈর্ঘ্য স্থিতিস্থাপকতা বা কৃন্তন স্থিতিস্থাপকতা নাই।

গ্যাসের দুই রকমের স্থিতিস্থাপকতা আছে—(i) সমোষ্ণ স্থিতিস্থাপকতা ও (ii) রুদ্ধতাপ স্থিতিস্থাপকতা।

উদাহরণ (Examples)

1. 628 cm দৈর্ঘ্য ও 2 mm ব্যাসের একটি উল্লম্ব স্টীলের তারের 1 mm দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ঘটাইতে কত কিলোগ্রাম ভার চাপানো প্রয়োজন নির্ণয় কর। স্টীলের ইয়ং গুণাঙ্ক $=2\times10^{12}$ c. g. s. একক, $g=980$ cm/s^2।

(Find the load in kilograms to stretch a vertical steel wire 628 cm long and 2 mm in diameter by 1 mm in length. Y for steel$=2\times10^{12}$ c.g.s. units, $g=980$ cm/s^2.) (C. U. '66)

আমরা জানি,

ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y=\dfrac{4MgL}{\pi d^2 l}$

অথবা, $M=\dfrac{\pi d^2 l Y}{4gL}$

এখানে,

$L=628$ cm

$l=1$ mm$=\frac{1}{10}$ cm

$d=2$ mm$=\frac{2}{10}$ cm

$g=980$ cm/s^2

$Y=2\times10^{12}$ dynes/sq. cm

$$\therefore\quad M=\frac{22\times(\frac{2}{10})^2\times\frac{1}{10}\times2\times10^{12}}{7\times4\times980\times628}$$

$=10{\cdot}21$ kg.

2. 6 metre লম্বা ও 1 mm ব্যাসের একটি স্টীলের তারে 30 kg ওজন চাপানো হইল। তারটির দৈর্ঘ্য 1·21 cm বৃদ্ধি পাইলে স্টীলের বিকৃতি, পীড়ন ও গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

(A steel wire 6 metres long and 1 mm in diameter is subjected to a tension of 30 kg. If it elongates by 1·21 cm, find the strain, stress and Young's modulus for the material.) (C. U. '70)

এখানে,

$L=6$ metres$=600$ cm

$l=1{\cdot}21$ cm

$d=1$ mm$=0{\cdot}1$ cm

এবং $mg=30$ kg$=30\times1000\times980$ dynes

$\therefore$ অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{l}{L} = \frac{1{\cdot}21}{600}$

$$= \frac{121}{6} \times 10^{-4}$$

$$= 20{\cdot}16 \times 10^{-4}$$

অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন $= \frac{4\ mg}{\pi d^2}$

$$= \frac{4 \times 30 \times 1000 \times 980}{\frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2}$$

$$= 3{\cdot}74 \times 10^9 \text{ dynes/cm}^2$$

ইয়ং গুণাঙ্ক Y $= \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

$$= \frac{3{\cdot}74 \times 10^9}{20{\cdot}16 \times 10^{-4}}$$

$$= 18{\cdot}5 \times 10^{11} \text{ dynes/sq. cm.}$$

3. একটি তারের উপাদানের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক ও পোয়াসঁর অনুপাতের মান যথাক্রমে $2{\cdot}87 \times 10^{11}$ dynes/sq. cm এবং 0·379। ইহার ইয়ং গুণাঙ্কের মান বাহির কর।

(The modulus of rigidity and Poisson's ratio of the material of a wire $2{\cdot}87 \times 10^{11}$ dynes/sq. cm and 0·379 respectively. Find out the value of Young's modulus.) (C. U. '73, '78)

আমরা জানি,

$$Y = 2n(1+\sigma)$$

এখানে, $n = 2{\cdot}87 \times 10^{11}$ dynes/sq. cm

এবং $\sigma = 0{\cdot}379$

$$\therefore\ Y = 2 \times 2{\cdot}87 \times 10^{11}(1+0{\cdot}379)$$

$$= 2 \times 2{\cdot}87 \times 10^{11} \times 1{\cdot}379$$

$$= 7{\cdot}91 \times 10^{11} \text{ dynes/sq. cm.}$$

4. 0·01 sq. cm প্রস্থচ্ছেদ এবং 200 cm দৈর্ঘ্যের একটি সুষম ধাতব তারকে 0·5 cm প্রসারিত করিতে কত কার্য করিতে হইবে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $Y = 2 \times 10^{12}$ dynes/sq. cm.

(Find the work done in stretching a uniform metal wire of cross-section 0·01 sq. cm and length 200 cm through 0·5 cm. Given $Y = 2 \times 10^{12}$ dynes/sq. cm.) (C. U. '71, '73)

আমরা জানি,

$$\text{কৃত কার্য, } W = \frac{1}{2}\frac{YAl^2}{L}$$

এখানে, $A = 0{\cdot}01$ sq. cm

$L = 200$ cm

$l = 0{\cdot}5$ cm

এবং $Y = 2 \times 10^{12}$ dynes/sq. cm

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}\frac{2 \times 10^{12} \times 0{\cdot}01(0{\cdot}5)^2}{200}$$

$$= 1{\cdot}25 \times 10^7 \text{ ergs} = 1{\cdot}25 \text{ joule.}$$

5. রূপার ইয়ং গুণাঙ্ক ও আয়তন বিকার গুণাঙ্ক যথাক্রমে $7{\cdot}25 \times 10^{11}$ dynes/sq. cm ও 11×10^{11} dynes/sq. cm হইলে রূপার পোয়াসঁর অনুপাত নির্ণয় কর।

(If Young's modulus and Bulk modulus for silver be $7{\cdot}25 \times 10^{11}$ dynes/sq. cm and 11×10^{11} dynes/sq cm respectively, find the Poisson's ratio for silver.)

আমরা জানি, $Y = 3K(1 - 2\sigma)$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{Y}{3K}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7{\cdot}25 \times 10^{11}}{3 \times 11 \times 10^{11}}\right)$$

$$= 0{\cdot}39.$$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. ইয়ং গুণাঙ্ক, আয়তন বিকার গুণাঙ্ক ও পোয়াসঁর অনুপাত—ইহাদের সংজ্ঞা লিখ এবং উহাদের মধ্যে সম্বন্ধ বাহির কর।

(Define Young's modulus, bulk modulus and Poisson's ratio and derive an expression showing the relation between them.) (C. U. '76)

2. —সংজ্ঞা লিখ : (a) ইয়ং গুণাঙ্ক, (b) দৃঢ়তা গুণাঙ্ক এবং (c) পোয়াসঁর অনুপাত। ইহাদের মধ্যে একটি সম্বন্ধ বাহির কর।

(Define : (a) Young's modulus, (b) modulus of rigidity and (c) Poisson's ratio. Derive a relation between them.)

(C. U. '71, '78)

3. দেখাও যে পোয়াসঁর অনুপাত -1 এবং $+\frac{1}{2}$ এর মধ্যে অবস্থান করে।

(Show that the value of Poisson's ratio lies between -1 and $+\frac{1}{2}$) (C. U. '62)

4. স্থিতিস্থাপক বস্তুর ইয়ং গুণাঙ্ক, আয়তন বিকার গুণাঙ্ক, দৃঢ়তা গুণাঙ্ক ও পোয়াসঁর অনুপাতের ভিতর সম্পর্ক বাহির কর।

(Find the relationship between the Young's modulus, bulk modulus, modulus of rigidity and Poisson's ratio of elastic bodies.)

(C. U. '73)

5. দৃঢ়তা গুণাঙ্কের সংজ্ঞা লিখ। দেখাও যে, কৃন্তন হইল পরস্পর লম্ব অভিমুখে প্রসারণ ও সংকোচনের সমতুল্য।

(Define modulus of rigidity. Show that a shear is equivalent to a compression and an extension at right angles to each other.)

(C. U Old '66)

6. দৃঢ়তা গুণাঙ্কের সংজ্ঞা লিখ। একটি তারের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর এবং ঐ পদ্ধতিতে যে সূত্র ব্যবহার করিবে তাহা বাহির কর।

(Define the coefficient of rigidity. Describe a method of finding the coefficient of rigidity of a wire and deduce the formula to be used.) (C. U. '67, '75)

7. ক্রমবর্ধমান ভার চাপাইলে সুষম প্রস্থচ্ছেদের একটি ধাতব তারের স্থিতিস্থাপক ব্যবহার কিরূপে পরিবর্তিত হয় আলোচনা কর এবং স্থিতিস্থাপক সীমা ব্যাখ্যা কর।

(Discuss the elastic behaviour of a solid metallic wire of uniform cross-section under a gradually increasing load and explain elastic limit.) (C. U. '63)

8. ক্যান্টিলিভার বলিতে কি বুঝ ব্যাখ্যা কর। একটি ক্যান্টিলিভারের মুক্ত প্রান্তে ভার চাপাইলে ঐ প্রান্তের অবনমন কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

(Explain what do you mean by a cantilever. Determine an expression for the depression due to a load attached to the free end of a cantilever.)

9 একটি তারকে টানিয়া সম্প্রসারণ করিতে কি পরিমাণ কার্য করিতে হইবে নির্ণয় কর এবং তাহা হইতে তারের প্রতি একক আয়তনে তারের শক্তি নির্ণয় কর।

(Find an expression for the work done in stretching a wire and hence find the energy per unit volume of the wire.)

(C. U. Sp. '66)

10. কোন সুষম তারের উপাদানের ইয়ং গুণাংক নির্ণয় করিবার উপযোগী একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর। প্রয়োজনীয় সূত্রটি ব্যক্ত কর।

(Describe a suitable method for the determination of Young's modulus of a material in the form of a uniform wire. State the necessary formula.) (C. U. New syllabus '80)

11. $12 \times 10^{-5}/^{\circ}C$ দৈর্ঘ্য প্রসারণ গুণাংকবিশিষ্ট একটি ধাতব দণ্ডের উষ্ণতা মাত্রা $10^{\circ}C$ বৃদ্ধি করা হইল। দণ্ডের দৈর্ঘ্য প্রসারণ বন্ধ করিতে কি পরিমাণ সংনমন পীড়ন প্রয়োগ করিতে হইবে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $Y = 2 \times 10^{12}$ CGS একক।

(A metal rod having coefficient of linear expansion $11{\cdot}2 \times 10^{-5}/^{\circ}C$ has its temperature raised by $10^{\circ}C$. Calculate the inear compressive stress required to present expansion of the rod. Given that $Y = 2 \times 10^{12}$ CGS units.)

[Ans. 24×10^{7} dynes/sq. cm]

12. 1 sq mm প্রস্থচ্ছেদ এবং 2 metres দৈর্ঘের একটি সুষম তারকে 1 mm প্রসারিত করিতে কত কার্য করিতে হইবে বাহির কর। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাংক $= 2 \times 10^{12}$ dynes/sq. cm।

(Find out the work done in stretching a uniform wire of cross-section 1 sq. mm and length 2 metres through 1 mm if the Young's modulus for the material of the wire is 2×10^{12} dynes/sq. cm.) (C. U. '65) [Ans. 0·05 joule]

13. 1·5 cm প্রস্থ ও 1 cm বেধের একটি আয়তাকার দণ্ড 80 cm ব্যবধানে দুইটি ক্ষুরধারের উপর অনুভূমিকভাবে রাখা আছে। দণ্ডটির মধ্যস্থলে 8 kg ওজন চাপাইলে মধ্যস্থলে সর্বাধিক অবনমন কত হইবে তাহা নির্ণয় কর; যদি দণ্ডের উপাদানের ইয়ং গুণাংক 20×10^{11} dynes/sq. cm হয়।

(A bar of rectangular section having its breadth 1·5 cm and depth 1 cm is supported horizontally on two knife edges distant 80 cm. Calculate the maximum depression produced by a load of 8 kg in the middle if Young's modulus of the material is 20×10^{11} dynes/sq. cm.) (C. U. '62) [Ans. 0·335 cm]

14. একটি 1 মিটার দীর্ঘ, 1 বর্গ মি. মি. প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কোন তারকে 2 কিলোগ্রাম ওজন দ্বারা সম্প্রসারণ করা হইল। তারের সম্প্রসারণ নির্ণয় কর। $Y = 2 \times 10^{12}$ dynes/sq. cm; $g = 980$ cm/s^2.

(A metal wire 1 metre long and 1 sq. mm cross-section is stretched with a weight of 2 kg. Find the elongation of the wire. $Y = 2 \times 10^{12}$ dynes/sq. cm, $g = 980$ cm/s^2.)

(C. U. New Syllabus, '80) [Ans. 0·098 mm]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

পৃষ্ঠ-টান

(Surface Tension)

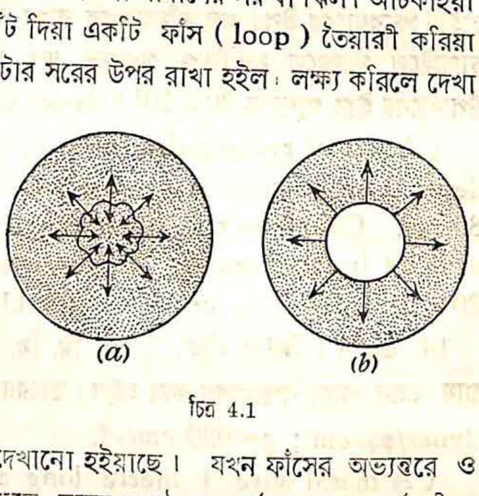
4.1 সূচনা (Introduction)

বৃষ্টির একটি ফোঁটা বা খুব অল্প পরিমাণ পারদ লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে উহা সর্বদা গোলীয় (spherical) আকার ধারণ করে। আমরা জানি, কোন নির্দিষ্ট আয়তনের বেলায় গোলকের ক্ষেত্রফল সর্বাপেক্ষা কম হইয়া থাকে। অর্থাৎ বলিতে পারি যে তরল বিন্দু নিজ হইতেই জ্যামিতিক এমন একটা রূপ গ্রহণ করে যেখানে ক্ষেত্রফল সর্বাপেক্ষা ন্যূনতম হয়।

একটি তৈলবিহীন সূঁচ জলের উপর সাবধানে রাখিয়া দিলে দেখা যাইবে যে সূঁচটি জলের উপর ভাসিয়া থাকে এবং যেখানে উহা জলতল স্পর্শ করে সেখানে জলের পৃষ্ঠ সামান্য অবনমিত হয়। অনুরূপে, মাকড়সা জলের উপর দিয়া যখন হাঁটিয়া যায় তখন যেখানে মাকড়সার পা পড়ে সেই স্থলে একটু অবনমিত হইতে দেখা যায়।

এই সমস্ত ঘটনা হইতে বলা যাইতে পারে যে, তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ সর্বদা যেন একটি টান টান অবস্থায় থাকে এবং উহা ক্ষেত্রফল সংকুচিত করিবার চেষ্টা করে। নিম্নের সহজ পরীক্ষাটির দ্বারা ইহা ভালভাবে বোঝানো যাইতে পারে।

একটি তারের গোল আংটা তৈয়ারী করিয়া উহাকে সাবান জলে ডুবাইয়া তুলিয়া আনিলে দেখা যাইবে যে আংটার ভিতর একটি পাতলা সাবানের সর বা ঝিলী আটকাইয়া আছে। এক্ষণে, এক টুকরা সুতায় গিঁট দিয়া একটি ফাঁস (loop) তৈয়ারী করিয়া উহাকে সাবান জলে একটু ভিজাইয়া আংটার সরের উপর রাখা হইল। লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে, ফাঁসটি সরের উপর এলোমেলোভাবে অবস্থান করিতেছে। একটি সরু সূঁচ দিয়া ফাঁসের ভিতরের সর ফুটা করিয়া দিলে সর অদৃশ্য হইয়া যাইবে কিন্তু সঙ্গে সঙ্গে ফাঁসটি আঁট হইয়া একটি পরিপূর্ণ গোলীয় আকার ধারণ করিবে।



চিত্র 4.1

চিত্র 4.1 (a) ও (b) তে ইহা যথাক্রমে দেখানো হইয়াছে। যখন ফাঁসের অভ্যন্তরে ও বাহিরে সর ছিল তখন উহার প্রতি বিন্দুতে সরের পৃষ্ঠের স্পর্শকভাবে অন্তর্মুখী ও বহির্মুখী সমবল প্রযুক্ত হইতেছিল ও উহারা প্রতি বিন্দুতে পরস্পরকে প্রশমিত করিতেছিল। ফলে ফাঁসের উপর উহাদের কোন প্রভাব না থাকার দরুণ উহা সরের

উপর এলোমেলোভাবে পড়িয়াছিল। কিন্তু ফাঁসের অভ্যন্তরস্থ সর অদৃশ্য হইলে অন্তর্মুখী বলও অপসারিত হইল কিন্তু বাহিরের সরের জন্য বহির্মুখী বল ঠিকই প্রযুক্ত হইতে লাগিল। ইহার ফলে ফাঁসটি গোলীয় আকার ধারণ করে। সুতরাং বোঝা যাইতেছে যে, ফাঁস ও লোহার রিঙের ভিতরকার সর যেন টান টান হইয়া থাকে এবং ন্যূনতম ক্ষেত্রফলযুক্ত স্থান অধিকার করে।

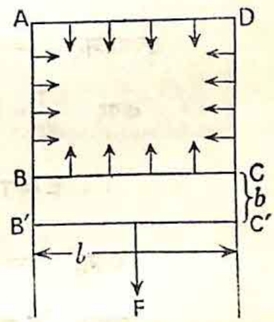
এই সমস্ত ঘটনা হইতে বোঝা যায় যে, তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ বরাবর সর্বদাই একটা টান আছে যাহা তরলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভরশীল নয়। তরল পৃষ্ঠের এই টানকে তরলের পৃষ্ঠ-টান বলা হয়।

সংজ্ঞা : কোন তরল পৃষ্ঠের উপর যদি একটি রেখা কল্পনা করা হয় তবে ঐ রেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যে, রেখার সহিত লম্বভাবে ও পৃষ্ঠের স্পর্শকরূপে রেখার উভয় পার্শ্বে যে বল ক্রিয়া করে তাহাকে ঐ তরলের পৃষ্ঠ-টান বলে। সি. জি. এস. পদ্ধতিতে ইহার একক dyne/cm এবং ইহার মাত্রা একক MT^{-2}।

4.2 পৃষ্ঠ-শক্তি (Surface energy)

আমরা দেখিয়াছি যে তরলের মুক্ত পৃষ্ঠে সর্বদাই একটি টান ক্রিয়া করে এবং উহা তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল হ্রাস করিবার চেষ্টা করে। কাজেই এই অবস্থায় তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি করিতে হইলে কিছু কার্য করিবার প্রয়োজন হয়। ঐ কার্য স্থিতিশক্তি রূপে তরল পৃষ্ঠে সঞ্চিত থাকে। ইহাকে পৃষ্ঠ-শক্তি বলে।

মনে করি, ABCD একটি তারের ফ্রেম, যাহার BC বাহুটি AB এবং DC বাহু বরাবর বাধাহীনভাবে চলাচল করিতে পারে (চিত্র 4.2)। সাবান জলে ফ্রেমটি ডুবাইয়া তুলিয়া আনিলে ABCD স্থানে একটি পাতলা পর্দা আটকাইয়া থাকিবে। ঐ পর্দা পৃষ্ঠ-টানের দরুণ ফ্রেমের প্রত্যেকটি বাহুকে ভিতরের দিকে টানিতে চাহিবে ; কিন্তু BC ছাড়া অপর বাহুগুলি আটকানো থাকায় উহারা স্থির থাকিবে। পৃষ্ঠ-টান ক্রিয়া করিয়া BC তারকে AD বাহুর দিকে ধীরে ধীরে টানিয়া লইবে। সুতরাং BC বাহুকে স্থির রাখিতে হইলে উহার উপর বিপরীত দিকে সমান বলপ্রয়োগ করিতে হইবে।



চিত্র 4.2

ধরা যাক, BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= l$ এবং পর্দার পৃষ্ঠ-টান $= T$

$\therefore$ BC তারের উপর AD অভিমুখে মোট বল $= 2l.T$, যেহেতু পর্দার উপরে ও নিচে দুইটি পৃষ্ঠ আছে এবং উভয়েরই পৃষ্ঠ-টান T।

সুতরাং BC কে স্থির রাখিতে হইলে উহার উপর বিপরীতমুখী যে বল প্রয়োগ করিতে হইবে তাহা,

$$F = 2l.T \quad \cdots(4.1)$$

এখন, BC তারকে ধীরে ধীরে b দূরত্ব সরাইয়া B′C′ অবস্থানে লইয়া গেলে যে কার্য করিতে হইবে তাহা,

$$= F \,.\, b$$
$$= 2\, l \,.\, T \,.\, b$$

ইহার ফলে পর্দার উপর এবং নিচ উভয় দিকের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পাইবে lb পরিমাণ ; ABCD পর্দাটির মোট ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পাইল $2\,lb$।

∴ পৃষ্ঠ-টানের বিরুদ্ধে প্রতি একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধিতে কৃত কার্য বা

$$\text{পৃষ্ঠ-শক্তি, } E = \frac{2lT.b}{2lb} = T \qquad \cdots(4.2)$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে তরলের পৃষ্ঠ-টান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে পৃষ্ঠ-শক্তির সমান।

উপরি-উক্ত, আলোচনায় পর্দার ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির সহিত উহার উষ্ণতার পরিবর্তনের বিষয়টি বিবেচনা করা হয় নাই। দেখা গিয়াছে, ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির সহিত পর্দার উষ্ণতা হ্রাসপ্রাপ্ত হয়, কিন্তু বাহির হইতে তাপ লইয়া পর্দা উহার উষ্ণতা অপরিবর্তিত রাখে, প্রতি একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির জন্য পর্দা কর্তৃক গৃহীত তাপ Q হইলে,

$$\text{পৃষ্ঠ-শক্তি, } E = T + Q \qquad \cdots(4.3)$$

তাপগতিবিদ্যা অনুযায়ী প্রমাণ করা যায়,

$$Q = -\theta \frac{dT}{d\theta} \qquad \cdots(4.4)$$

যেখানে, θ = পরম স্কেল অনুযায়ী উষ্ণতা

এবং $\frac{dT}{d\theta}$ = উষ্ণতা বৃদ্ধির সহিত পৃষ্ঠ-টান বৃদ্ধির হার

$$\therefore\; E = T - \theta \frac{dT}{d\theta} \qquad \cdots(4.5)$$

যখন, $\theta = 0$ অথবা $\frac{dT}{d\theta} = 0$

তখন, $E = T$

অর্থাৎ পরমশূন্য উষ্ণতায় পৃষ্ঠ-শক্তি পৃষ্ঠ-টানের সমান। তরলের পৃষ্ঠ-টান উষ্ণতা বৃদ্ধিতে হ্রাস পায় বলিয়া প্রত্যেক তরলের ক্ষেত্রেই $\frac{dT}{d\theta}$ একটি ঋণাত্মক রাশি।

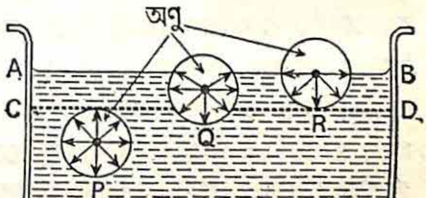
$$\therefore\; \text{তরলের ক্ষেত্রে, } E = T + \theta \frac{dT}{d\theta} \qquad \cdots(4.6)$$

অর্থাৎ তরলের পৃষ্ঠ-শক্তি সর্বদা পৃষ্ঠ-টান অপেক্ষা বেশী।

4.3 পৃষ্ঠ-টানের আণবিক ব্যাখ্যা (Molecular theory of surface tension)

আন্তরাণবিক বল অর্থাৎ বিভিন্ন অণুর ভিতর ক্রিয়ারত বলকে দুইভাগে ভাগ করা যাইতে পারে। যথা : (i) আসঞ্জন বল (Force of adhesion) ও (ii) সংসক্তি বল (Force of cohesion)। বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলির পারস্পরিক আকর্ষণকে আসঞ্জন বল বলে। অপরপক্ষে, একই পদার্থের অণুগুলির ভিতর যে আকর্ষণ বল বর্তমান থাকে তাহাকে বলে সংসক্তি বল। কাচকে জলে ডুবাইলে আসঞ্জনের জন্য জলকণাকে কাচের গায়ে আটকাইয়া থাকিতে দেখা যায়। আবার তরলের সংসক্তি বলের জন্য তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ (free surface) দেখা যায় ও পৃষ্ঠ-টানের উদ্ভব হয়। সর্বাধিক যে দূরত্ব পর্যন্ত দুইটি অণুর ভিতর আকর্ষণ বল অনুভূত হয় তাহাকে আণবিক প্রসার (molecular range) বলে। কোন অণুর অবস্থানকে কেন্দ্র করিয়া ও আণবিক প্রসারকে ব্যাসার্ধ লইয়া যদি একটি গোলক কল্পনা করা হয় তবে উহাকে ঐ অণুর প্রভাব-গোলক (sphere of influence) বলে।

কোন তরলের ভিতর P, Q, R তিনটি অণু লওয়া হইল, যেখানে P অণুটি তরলের অভ্যন্তরে, Q অণুটি তরল পৃষ্ঠের একটু নিচে এবং R অণুটি ঠিক তরল পৃষ্ঠে আছে। উহাদের চারিদিকে উহাদের প্রভাব-গোলক অঙ্কিত করা হইয়াছে (চিত্র 4.3)। P অণুটির প্রভাব-গোলক তরলের অভ্যন্তরে সম্পূর্ণ নিমজ্জিত বলিয়া উহা অন্যান্য অণুর দ্বারা চারদিকে সমভাবে আকৃষ্ট হইবে ও উহার উপর কোন লব্ধ সংসক্তি বল ক্রিয়া করিবে না।



চিত্র 4.3

অপরপক্ষে, Q অণুর প্রভাব-গোলকের কিছু অংশ তরলের বাহিরে রহিয়াছে। ঐ গোলকের নিম্নে উপস্থিত অণুর সংখ্যা ঊর্ধ্বে উপস্থিত অণু অপেক্ষা অনেক বেশী বলিয়া Q অণুর উপর একটি নিম্নমুখী আকর্ষণ বল ক্রিয়া করিবে অর্থাৎ Q অণুটি নিম্নমুখী লব্ধ বল অনুভব করিবে। আবার, তৃতীয় অণু R ঠিক তরল পৃষ্ঠে থাকার ফলে উহার প্রভাব-গোলকের এক অর্ধ তরলের বাহিরে রহিয়াছে। R অণুটি সম্পূর্ণরূপে নিম্নমুখী বল অনুভব করিবে এবং ইহার উপর নিম্নমুখী লব্ধ বল হইবে সর্বাধিক।

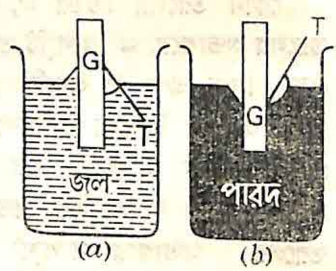
এক্ষণে, তরল পৃষ্ঠে সমান্তরালভাবে ও তরল পৃষ্ঠ হইতে আণবিক আকর্ষণ প্রসারের সমদূরত্বে তরলের অভ্যন্তরে একটি তল CD কল্পনা করা হইল। এই অবস্থায় AB ও CD তল দুইটির মধ্যে যে তরল স্তর পাওয়া যাইবে তাহাকে তরলের পৃষ্ঠ-সর বা পৃষ্ঠ-ঝিল্লী (surface film) বলে। পারস্পরিক সংসক্তি বলের প্রভাবে পৃষ্ঠ-সরে

অবস্থিত সমস্ত অণুই নিম্নাভিমুখী আকর্ষণ অনুভব করিবে। CD তল হইতে যত AB-এর দিকে যাওয়া যাইবে, নিম্নাভিমুখী আকর্ষণ বল তত তীব্রতর হইবে। কোন অণুকে তরলের অভ্যন্তর হইতে পৃষ্ঠ সরে আনিতে নিম্নাভিমুখী এই সংসক্তি বলের বিপক্ষে কার্য করিতে হয়। ফলে ঐ অণুর স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে, পৃষ্ঠ-সরে অবস্থিত অণুগুলির স্থিতিশক্তির মান উহার নিম্নস্থ অণু অপেক্ষা বৃহত্তর। কিন্তু যান্ত্রিক সংস্থার (mechanical system) নিয়মানুযায়ী সাম্য অবস্থায় থাকিবার জন্য পৃষ্ঠ-সরকে স্থিতিশক্তি ন্যূনতম করিতে হইবে, যাহা করিবার জন্য পৃষ্ঠ-সরকে ক্ষেত্রফল হ্রাস করিবার প্রয়াস করিতে হইবে। এইজন্যই মুক্ত পৃষ্ঠ সর্বদা টান অবস্থায় থাকে এবং ন্যূনতম ক্ষেত্রফল পাইবার চেষ্টা করে।

ইহাই তরলের পৃষ্ঠ-টানের সরল আণবিক ব্যাখ্যা।

4.4 স্পর্শকোণ (Angle of contact)

একটি সমতল কাচের প্লেটকে জল, অ্যালকোহল বা ঐ জাতীয় অন্য কোন তরলের মধ্যে খাড়াভাবে নিমজ্জিত করিলে দেখা যাইবে যে প্লেটের গায়ে ঐ তরল কিছুটা উঠিয়া গিয়াছে। কিন্তু ঐ কাচের প্লেটকে যদি পারদের অভ্যন্তরে ডুবানো হয় তবে দেখা যাইবে প্লেটের গায়ে তরল কিছুটা নামিয়া গিয়াছে। 4.4(a) ও 4·4(*b*) চিত্রে একটি কাচের প্লেট G কে যথাক্রমে জল ও পারদের মধ্যে ডুবানো হইয়াছে। চিত্রে যেমন দেখানো হইয়াছে ঐরূপ প্রথম ক্ষেত্রে তরলের অধিক্ষেপ



চিত্র 4.4

(elevation) ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে তরলের কিছুটা অবনমন (depression) হইবে। সাধারণভাবে বলা যাইতে পারে, যে তরল কঠিনকে ভেজাইতে পারে তাহার ক্ষেত্রে অধিক্ষেপ ও ভেজাইতে না পারিলে অবনমন হয়। কাচ সংলগ্ন তরলের এই অধিক্ষেপ বা অবনমনের ফলে যে বক্র তলের উৎপত্তি হয় তাহাকে কৈশিক বক্রতল (capillary curve) বলে। এক্ষণে তরলের ঐ বক্র তলে একটি বিন্দু লইয়া, যাহা কঠিন বস্তুর তলকে স্পর্শ করিয়াছে এবং সেই বিন্দু দিয়া তরলের বক্র তলে যদি একটি স্পর্শক অঙ্কিত করা হয় তবে ঐ স্পর্শক GT কঠিন বস্তুর তলের সহিত যে কোণ সৃষ্টি করে তাহাকে উক্ত তরল ও কঠিনের স্পর্শ কোণ বলে।

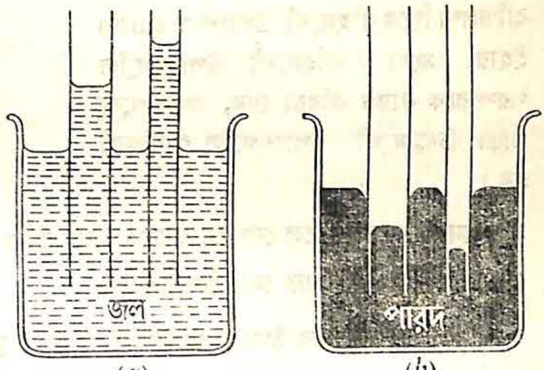
শুদ্ধ জল ও পরিষ্কার কাচের ক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ শূন্য কিন্তু সাধারণ জল ও কাচের ভিতর এই মান প্রায় 8°। জল বা অ্যালকোহলের বেলায় স্পর্শকোণের মান 90° অপেক্ষা কম অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ হইয়া থাকে কিন্তু পারদের ক্ষেত্রে ঐ মান স্থূলকোণ হইবে।

স্পর্শ কোণের মান প্রধানত দুইটি বিষয়ের উপর নির্ভর করে : (i) কঠিন ও তরলের প্রকৃতি এবং (ii) তরলের মুক্ত পৃষ্ঠের উপরকার মাধ্যম। তরল পৃষ্ঠের সহিত কঠিনের নতির (inclination) উপর স্পর্শ কোণের মান নির্ভরশীল নয়।

4.5 কৈশিকত্ব বা কৈশিক ক্রিয়া (Capillarity or capillary action)

ল্যাটিন শব্দ *Capillus* কথাটির অর্থ হইল কেশ। কেশের ন্যায় সূক্ষ্ম রন্ধ্র-বিশিষ্ট নলকে কৈশিক নল বা capillary tube বলা হয়।

একটি কাচের কৈশিক নল লইয়া খাড়াভাবে ডুবাইলে দেখা যায় যে নলের অভ্যন্তরে জলতল বাহিরের জলতল অপেক্ষা খানিকটা ঊর্ধ্বে উঠিয়াছে এবং নলের সংস্পর্শ স্থলে জলতল বাঁকিয়া অবতল হইয়াছে [চিত্র 4.5(*a*)]। কিন্তু যদি কাচের কৈশিক নলকে পারদে ডুবানো যায় তবে তবে দেখা যাইবে যে নল মধ্যস্থ পারদ তল খানিকটা নামিয়া গিয়াছে এবং উহা বাঁকিয়া উত্তল আকার ধারণ করিয়াছে [চিত্র 4.5(*b*)]।



চিত্র 4.5

কৈশিক নলের ভিতরে তরলের এই ঊর্ধ্বারোহণ বা নিম্নাবতরণ তরলের পৃষ্ঠ-টানের জন্য ঘটিয়া থাকে এবং এই ঘটনাকে কৈশিকত্ব বলে।

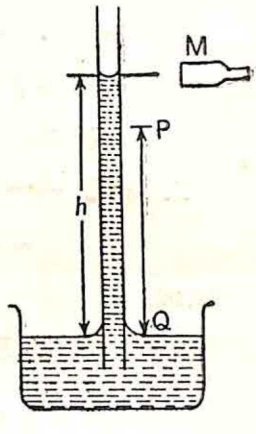
হ্যারিকেনের ফিতার সাহায্যে তেল উঠা, তোয়ালের দ্বারা দ্রুত গায়ের জল শুকাইয়া ফেলা, ব্লটিং কাগজের দ্বারা কালি শোষণ করিয়া লওয়া ইত্যাদি কৈশিক ক্রিয়ার উদাহরণ।

4.5.1 কৈশিক নলে তরলের ঊর্ধ্বারোহণ (Rise of liquid in a capillary tube)

একটি কৈশিক নলকে জলের (বা ঐ জাতীয় কোন তরলের) ভিতর খাড়াভাবে ডুবাইয়া রাখিলে দেখা যায় যে জল খানিকটা ঊর্ধ্বে উঠিয়াছে ও নলের মধ্যে জলতল বাঁকিয়া অবতল আকার ধারণ করিয়াছে (চিত্র 4.6)।

ধরা যাক, তরল ও কঠিনের ভিতর স্পর্শকোণ θ ও তরলের পৃষ্ঠ-টান T। এই পৃষ্ঠ-টান নলের ভিতরের দেওয়াল ও তরলের স্পর্শরেখা বরাবর প্রতি বিন্দুতে তরল

তরল স্তম্ভের স্থির অবস্থানে একটি কালির দাগ কাটিয়া চলানুবীক্ষণ (travelling microscope) যন্ত্রের সাহায্যে ঐ স্থির অবস্থান ও সূচক দণ্ডের P প্রান্তের পাঠ লওয়া হইল। এখন সূচক দণ্ডের দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে তরল স্তম্ভের উচ্চতা h পাওয়া যায়।

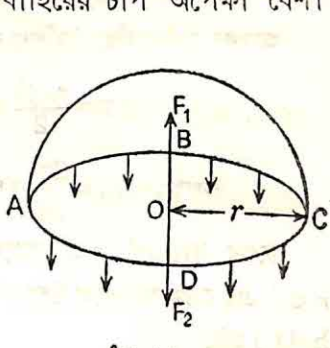


চিত্র 4.8

এইবার কালির দাগ দেওয়া জায়গাটি ভালভাবে কাটিয়া অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে ইহার ব্যাসার্ধ r বাহির করা হয়। সমীকরণ (4.9)এ h ও r এর মান বসাইলে পৃষ্ঠ-টান T নির্ণয় করা যাইবে।

4.6 গোলীয় সাবান বুদ্বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ (Excess pressure inside a spherical soap bubble)

একটি ফাঁপা কাঠির একপ্রান্ত সাবান জলে ভিজাইয়া অপর প্রান্তে ফুঁ দিলে গোলীয় সাবান বুদ্বুদ্ পাওয়া যায়। এই বুদ্বুদ্ হইতেছে সাবান জলের পাতলা ও গোলীয় পর্দা দ্বারা পরিবেষ্টিত কিছু পরিমাণ বায়ু। সাবান বুদ্বুদের দুইটি দিক্ থাকে—ভিতর ও বাহিরের দিক্। ভিতরের চাপ সর্বদা বাহিরের চাপ অপেক্ষা বেশী বলিয়া ইহা প্রসারিত হইতে চায়। কিন্তু পর্দার পৃষ্ঠ-টান দ্বারা বাধাপ্রাপ্ত হয়। এই বিপরীতমুখী বল দুইটি পরস্পর সমান হইলে বুদ্বুদ্‌টি সাম্যাবস্থায় থাকে কিন্তু পৃষ্ঠ-টান অপেক্ষা ভিতরের চাপ বেশী হইলে উহা ফাটিয়া যাইবে।



চিত্র 4.9

ধরা যাক, ABCD অনুভূমিক তল দ্বারা একটি গোলীয় সাবান বুদ্বুদ্‌কে দুইটি সমান অংশে বিভক্ত করা হইল (চিত্র 4.9)। উপরের অংশের সাম্যাবস্থা বিবেচনা করিলে দেখা যাইবে যে উহাতে দুইটি বল ক্রিয়া করে :

(i) ভিতরের অতিরিক্ত চাপের ফলে ABCD তলের উপর ঊর্ধ্বমুখী বল। বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ r ও অতিরিক্ত চাপ p হইলে মোট ঊর্ধ্বমুখী বল,

$$F_1 = \text{চাপ} \times \text{ক্ষেত্রফল}$$
$$= p \times \pi r^2$$
$$= \pi r^2 p \qquad \cdots(4.12)$$

(ii) পৃষ্ঠ-টানের ফলে ABCD তলের পরিধি বরাবর নিম্নাভিমুখী বল। বুদ্বুদ্‌টির দুইটি তল থাকায় ABCD তলের পরিধির দৈর্ঘ্য $= 2 \times 2\pi r = 4\pi r$। এখন পৃষ্ঠ-টানের মান T ধরিলে পৃষ্ঠ-টান জনিত মোট নিম্নাভিমুখী বল,

$$F_2 = 4\pi r \times T = 4\pi r T \quad \cdots (4.13)$$

যেহেতু উপরার্ধ সাম্যাবস্থাতে আছে,

$$\therefore \quad F_1 = F_2$$

অথবা, $\pi r^2 p = 4\pi r T$

অথবা, $$p = \frac{4T}{r} \quad \cdots (4.14)$$

সমীকরণ (4.14) হইতে দেখা যাইতেছে যে, বুদ্বুদের ভিতরের অতিরিক্ত চাপ উহার ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক।

যদি বুদ্বুদের বাহিরে বায়ুমণ্ডলীয় চাপ P ধরা যায়, তবে উহার অভ্যন্তরে মোট চাপ $= P + p = P + \frac{4T}{r}$।

4.6.1 তরলের বিন্দু অথবা জলের ভিতর বায়ু বুদ্বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ (Excess pressure inside a liquid drop or an air bubble in water)

ক্ষুদ্র তরলবিন্দু অথবা জলের ভিতর বায়ু বুদ্বুদের একটিমাত্র তল থাকে; দুইটি তল নয়। সুতরাং এক্ষেত্রে,

উহার অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ p-এর জন্য ঊর্ধ্বমুখী বল $= \pi r^2 p$ এবং পৃষ্ঠ-টানের জন্য নিম্নমুখী বল $= 2\pi r T$

$\therefore$ সাম্যাবস্থায় আমরা লিখিতে পারি,

$$\pi r^2 p = 2\pi r T$$

অথবা, $$p = \frac{2T}{r} \quad \cdots (4.15)$$

বায়ুমণ্ডলীয় চাপ যদি P ধরা হয়, তবে বায়ু বুদ্বুদ্ জলের মধ্যে h গভীরতায় তৈয়ারী হইলে, বায়ু বুদ্বুদের মোট অভ্যন্তরীণ চাপ $= P + h\rho g + \frac{2T}{r}$।

4.6.2 বুদ্বুদ্ গঠনে কৃত কার্য (Work done in blowing a bubble)

ফুঁ দিয়া বুদ্বুদ্ সৃষ্টি করিবার সময় সংকোচনের চেষ্টাকে অতিক্রম করিয়া গোলীয় পাতলা ঝিল্লী (film) গঠন করিবার জন্য কিছু কার্য করিতে হয়। অতএব আমরা লিখিতে পারি,

ঝিল্লী গঠনে কৃত কার্য = ঝিল্লীর পৃষ্ঠ-টান × উহার ক্ষেত্রফল

এখন, r ব্যাসার্ধের বুদ্বুদ্ গঠিত হইলে, উহার ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$

যেহেতু বুদ্বুদের দুইটি তল থাকে।

অতএব, মোট ক্ষেত্রফল $= 2 \times 4\pi r^2 = 8\pi r^2$.

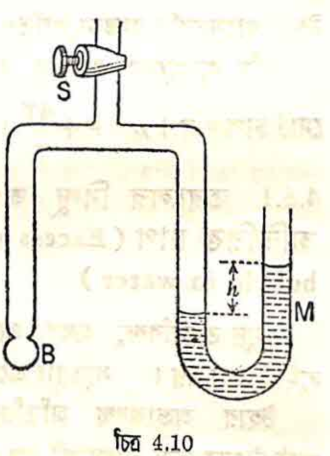
সুতরাং কৃত কার্য $= T \times 8\pi r^2$

$$= 8\pi r^2 T$$

এই কার্য বুদ্বুদে শক্তি রূপে সঞ্চিত থাকে। কাজেই আমরা বলিতে পারি, বুদ্বুদের শক্তি $= 8\pi r^2 T$।

4.6.3 সাবান বুদ্বুদের সাহায্যে পৃষ্ঠ-টান নির্ণয় (Determination of surface tension by soap bubble)

একটি কাচনলের নিম্ন প্রান্ত সাবান জলে ডুবাইয়া তুলিয়া লওয়া হইল। উহার অপর প্রান্তে একটি স্টপ-কক্ S যুক্ত আছে এবং 4.10 চিত্রের ন্যায় কাচনলটি একটি ম্যানোমিটার M-এর সহিত যুক্ত। স্টপ-কক্‌টির ভিতর দিয়া ধীরে ধীরে ফুঁ দিলে কাচনলটির নিম্ন প্রান্তে গোলাকার একটি সাবান বুদ্বুদ্ B তৈয়ারী হইবে, যাহার অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপের দরুন ম্যানোমিটারের দুই বাহুতে তরল লেভেলের পার্থক্য দেখা যাইবে। ঐ পার্থক্য h হইলে,



চিত্র 4.10

সাবান বুদ্বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ $= h\rho g$ (যেখানে $\rho =$ তরলের ঘনত্ব)। আবার, বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ r ও সাবান জলের পৃষ্ঠ-টান T হইলে,

বুদ্বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ $= \dfrac{4T}{r}$

সুতরাং আমরা লিখিতে পারি,

$$h\rho g = \frac{4T}{r}$$

$$\text{অথবা,} \quad T = \frac{h\rho g r}{4} \qquad \cdots(4.16)$$

ম্যানোমিটারের দুই বাহুতে তরল স্তম্ভের উচ্চতার পার্থক্য h নির্ণয় করিয়া ও সাবান বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ r-এর মান চলাণুবীক্ষণ (travelling microscope) যন্ত্রের সাহায্য বাহির করিয়া আমরা পৃষ্ঠ-টান T পাইতে পারি।

4.7 পৃষ্ঠ-টান সম্পর্কিত কয়েকটি ঘটনা (Some phenomena in connection with surface tension)

(i) জলের উপর কিছু পরিমাণ কেরোসিন তেল ঢালিলে উহা চারিদিকে ছড়াইয়া পড়ে। ইহার কারণ তেল অপেক্ষা জলের পৃষ্ঠ-টান অধিক। ফলে জল তেলের উপর একটি টান প্রয়োগ করে যাহার দরুণ তেল জলতলের উপর চতুর্দিকে ছড়াইয়া পড়ে।

(ii) ছাতার বা তাঁবুর কাপড় বিশেষ প্রক্রিয়ায় তৈয়ারী করা হয়। উহাতে ছিদ্র থাকে এবং ঐ ছিদ্রগুলি দিয়া বায়ু চলাচল করিতে পারে কিন্তু জল ঢুকিতে পারে না। ইহার কারণ পৃষ্ঠ-টান। পৃষ্ঠ-টানের দরুণ জল গোল বিন্দুর আকার ধারণ করে ও কাপড়ের উপর দিয়া গড়াইয়া পড়িয়া যায়। অবশ্য বৃষ্টির সময়ে যদি ছাতা বা তাঁবুর ভিতরের দিক্ স্পর্শ করা যায় তবে ঐখানে পৃষ্ঠ-টান হ্রাস পাইয়া জল ভিতরে ঢুকিবে।

(iii) অশান্ত সমুদ্রে তেল ঢালিলে পৃষ্ঠ-টানের দরুণ সমুদ্র অনেক শান্ত হইয়া যায়। বাতাস দ্রুত প্রবাহিত হওয়ার ফলে জলের উপর ভাসমান তেল ঢেউ-এর সহিত সম্মুখে অগ্রসর হয় এবং পিছনে পরিষ্কার জল থাকিয়া যায়। পরিষ্কার জলের পৃষ্ঠ-টান তৈলাক্ত জল অপেক্ষা বেশী বলিয়া সামনের দিক্ অপেক্ষা পিছন দিকে পৃষ্ঠ-টান অধিক হয়। এই বর্ধিত পৃষ্ঠ-টান জলকে ঢেউ-এর আকারে অধিক উঁচুতে উঠিতে বাধা দেয়।

(iv) পরিষ্কার জলের উপর অল্প মিহি খড়ির গুঁড়া ফেলা হইল। অতঃপর জলের উপর দু-এক ফোঁটা অ্যালকোহল ফেলিলে দেখা যাইবে যে, গুঁড়াগুলি দ্রুত ঐ জায়গা হইতে দূরে সরিয়া যাইতেছে। অ্যালকোহল জলের সহিত মিশ্রিত হওয়ার ফলে সেই স্থলে পৃষ্ঠ-টান হ্রাস পায়, ফলে অন্য দিকের বেশী পৃষ্ঠ-টানের দরুণ গুঁড়াগুলি ঐ স্থান হইতে দূরে সরিয়া যায়।

4.8 পৃষ্ঠ-টানের উপর বিভিন্ন বিষয়ের প্রভাব (Factors affecting surface tension of a liquid)

তরলের পৃষ্ঠ-টান মোটামুটিভাবে ছয়টি বিষয়ের উপর নির্ভরশীল :

(i) তরলের মুক্ত তলের সংস্পর্শে যে মাধ্যম থাকে তাহার প্রকৃতির উপর পৃষ্ঠ-টানের মান নির্ভরশীল। জলীয় বাষ্পের সংস্পর্শে জল থাকিলে পৃষ্ঠ-টানের মান হয় প্রায় 70 dynes/cm কিন্তু জলের সহিত বাতাসের সংস্পর্শে থাকিলে এই মান হইবে 72 dynes/cm।

(ii) তরলের মুক্ত তলের সহিত অপর কোন জিনিষের সংস্পর্শ থাকিলে পৃষ্ঠ-টান কমিয়া যায়। জলের সঙ্গে তেলের সংযুক্তি ঘটিলে তেল জলের উপর ভাসিতে থাকে ও ফলে পৃষ্ঠ-টানের মান হ্রাস পায়।

(iii) তরলের সহিত কোন পদার্থ দ্রবীভূত করিলে পৃষ্ঠ-টানের মান পরিবর্তিত হয়। তরলে অজৈব (inorganic) পদার্থ দ্রবীভূত থাকিলে পৃষ্ঠ-টানের মান বাড়িয়া যায় কিন্তু জৈব (organic) পদার্থ দ্রবীভূত থাকিলে এই মান হ্রাস পায়।

(iv) তরল তড়িতাহিত হইলে তরল পৃষ্ঠ এক ধরণের লম্ব বরাবর বহির্মুখী চাপ অনুভব করে যাহা তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বাড়াইয়া দেয়। ফলে পৃষ্ঠ-টান হ্রাস পায়।

(v) তরলের ঘনত্বের উপর পৃষ্ঠ-টানের মান নির্ভর করে। যদি ρ ও ρ_1 যথাক্রমে তরলের ও ঐ তরলের সম্পৃক্ত বাষ্পের ঘনত্ব হয় তবে,

$$\text{পৃষ্ঠ-টান, } T = A(\rho - \rho_1)^4 \qquad \cdots(4.17)$$

যেখানে A একটি ধ্রুবক।

(vi) তরলের পৃষ্ঠ-টান উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল। অ্যাটভসের (Eotvots) সূত্রানুযায়ী কোন তরলের উষ্ণতা বৃদ্ধি করিলে পৃষ্ঠ-টান হ্রাস পায়। এই সূত্র হইল :

$$T_\theta = K(\theta_c - \theta) \qquad \cdots(4.18)$$

যেখানে, $T_\theta = \theta^\circ K$ উষ্ণতায় তরলের পৃষ্ঠ-টান

$\theta_c =$ তরলের ক্রান্তিক উষ্ণতা ও

$K =$ ধ্রুবক।

উদাহরণ (Examples)

1. 0·5 mm ব্যাসের রন্ধ্রযুক্ত একটি কৈশিক নল 30 dynes/cm পৃষ্ঠ-টানযুক্ত তরলের মধ্যে খাড়াভাবে ডুবানো আছে। তরলের আপেক্ষিক গুরুত্ব 0·8 এবং উহা নলকে ভিজায়। নলের ভিতর তরল কত উচ্চতা পর্যন্ত উঠিবে নির্ণয় কর।

(A capillary tube 0·5 mm bore stands vertically in a wide vessel containing a liquid of surface tension 30 dynes/cm. The liquid wets the tube and has a specific gravity of 0·8. Calculate the rise of the liquid in the tube.) (C. U. '62)

তরল নলকে ভিজাইলে স্পর্শকোণ শূন্য হয় এবং তখন

$$T = \frac{r\rho g h}{2} \quad (\cos 0^\circ = 1)$$

$$\text{অথবা, } h = \frac{2T}{r\rho g}$$

এখানে, $T = 30$ dynes/cm

$$r = \frac{0·5}{2}\,\text{mm} = 0·025 \text{ cm}$$

এবং $\rho = 0{\cdot}8$

$$\therefore \quad h = \frac{2 \times 30}{0{\cdot}025 \times 0{\cdot}8 \times 981}$$

$$= 3{\cdot}06 \text{ cm.}$$

2. 1 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলীয় জলবিন্দুর ভিতরের ও বাহিরের চাপের পার্থক্য কত হইবে ? জলের পৃষ্ঠ-টান = 73 dynes/cm ।

(What is the difference of pressure between the inside and outside of a spherical drop of water of radius 1 mm ? Surface tension of water = 73 dynes/cm.)

জলবিন্দুর একটি তল থাকে বলিয়া উহার ভিতরের ও বাহিরের চাপের পার্থক্য,

$$p = \frac{2T}{r}$$

এখানে, $T = 73$ dynes/cm

এবং $r = 1 \text{ mm} = 0{\cdot}1 \text{ cm}$

$$\therefore \quad p = \frac{2 \times 73}{0{\cdot}2} = 1460 \text{ dynes/cm}^2 \text{ ।}$$

3. 1 inch ব্যাসের একটি গোলীয় সাবান বুদ্বুদের ভিতরের অতিরিক্ত চাপ নির্ণয় কর। সাবান জলের পৃষ্ঠ-টান 25 dynes/cm ।

(Calculate the excess pressure in a spherical soap bubble of diameter 1 inch blown with a soap solution of surface tension 25 dynes/cm.) (C. U. '57)

গোলীয় সাবান বুদ্বুদের ভিতর অতিরিক্ত চাপ,

$$p = \frac{4T}{r}$$

এখানে, $T = 25$ dynes/cm

এবং $r = \frac{1}{2} \text{ inch} = \frac{1}{2} \times 2{\cdot}54 \text{ cm} = 1{\cdot}27 \text{ cm}$

$$\therefore \quad p = \frac{4 \times 25}{1{\cdot}25}$$

$$= 78{\cdot}74 \text{ dynes/sq. cm ।}$$

4. 0·2 mm ব্যাসের এক হাজারটি জলবিন্দু একত্রিত হইয়া একটি বড় জলবিন্দুতে পরিণত হইল। ইহার জন্য কি পরিমাণ শক্তি ক্ষয় হইবে নির্ণয় কর। জলের পৃষ্ঠ-টান = 72 dynes/cm ।

(One thousand drops of water each of diameter 0·2 mm combine to form a single large drop. Calculate the loss of energy suffered assuming the surface tension of water to be 72 dynes/cm.) (C. U. '66, '75)

মনে করি, প্রতিটি ছোট জলবিন্দুর ব্যাসার্ধ r ও বড় জলবিন্দুটির ব্যাসার্ধ R এবং ছোট জলবিন্দুর সংখ্যা n।

প্রশ্নানুসারে,

R ব্যাসার্ধের বড় জলবিন্দুটির আয়তন $= n$ সংখ্যক ছোট জলবিন্দুর মোট আয়তন

$$\therefore \quad \tfrac{4}{3}\pi R^3 = n.\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

অথবা, $R^3 = nr^3$

এখানে, $n = 1000$ এবং $r = 0{\cdot}1$ mm

$$\therefore \quad R^3 = 1000 \times (0{\cdot}1)^3$$
$$= (10 \times 0{\cdot}1)^3$$

অথবা, $R = 1$ mm $= 0{\cdot}1$ cm.

প্রতিটি ছোট জলবিন্দুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$$= 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{1}{100}\right)^2$$

$\therefore$ 1000টি জলবিন্দুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

$$= 1000 \times 4\pi \times (0{\cdot}01)^2$$

এবং উহার পৃষ্ঠ শক্তি $= 1000 \times 4\pi \times (0{\cdot}01)^2 \times 72$ ergs

বড় জলবিন্দুর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi R^2$

$$= 4\pi(0{\cdot}1)^2$$

এবং উহার পৃষ্ঠ-শক্তি $= 4\pi(0{\cdot}1)^2 \times 72$ ergs

অতএব, পৃষ্ঠ-শক্তি হ্রাস

= 1000টি ছোট জলবিন্দুর মোট পৃষ্ঠ-শক্তি − বড় জলবিন্দুটির পৃষ্ঠ-শক্তি

$$= \{1000 \times 4\pi \times (0{\cdot}01)^2 \times 72\} - \{4\pi(0{\cdot}1)^2 \times 72\}$$

$$= 4\pi \times 72\left(1000 \times \frac{1}{10000} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= 4\pi \times 72 \times \tfrac{9}{100}$$

$$= 81{\cdot}4 \text{ ergs.}$$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. তরলের পৃষ্ঠ-টান, পৃষ্ঠ-শক্তি ও স্পর্শ কোণ বলিতে কি বুঝায় ?
একটি গোলীয় সাবান বুদ্বুদের ভিতরের ও বাহিরের চাপের পার্থক্যের একটি রাশিমালা নির্ণয় কর।

(What are meant by surface tension, surface energy and angle of contact ?)

Find an expression for the difference of pressure between the interior and exterior of a spherical soap bubble.) (C. U. '67, '75)

2. তরলের পৃষ্ঠ-টান বলিতে কি বুঝায় তাহা ব্যাখ্যা কর এবং ইহার একক নির্দেশ কর। পৃষ্ঠ-শক্তির সহিত ইহার সম্পর্ক কি ?

(Explain surface tension of a liquid and give its unit. How is it related to the surface energy ?)

3. আন্তরাণবিক বলের ভিত্তিতে তরলের পৃষ্ঠ-টান কিরূপে ব্যাখ্যা করা যায় ? তরলের পৃষ্ঠ-টান ও পৃষ্ঠ-শক্তির ভিতর সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

(How is the surface tension of a liquid explained on the basis of intermolecular forces ? Obtain a relation between surface tension and surface energy of a liquid.) (C. U. Sp. '66)

4. তরলের পৃষ্ঠ-টানের উৎস কি তাহা ব্যাখ্যা কর। কৈশিক নলের মধ্যে তরল ঊর্ধ্বারোহণ করে কেন ? নলের মধ্যে তরলের নিম্নাবতরণ হয় কি ? যদি হয় কেন হয় ?

(Explain the origin of surface tension in liquids. Why a liquid rises in a capillary tube ? Can there be a depression of the liquid surface within the tube ? If so, why ?)

5. গোলীয় সাবান বুদ্বুদের অভ্যন্তরীণ অতিরিক্ত চাপ নির্ণয় কর। বুদ্বুদের শক্তির মোটামুটি হিসাব দাও।

(Find an expression for the excess pressure within a spherical soap bubble. Give a rough estimate of the energy of the bubble.) (C. U. '61)

6. কোন তরলে একটি গোলীয় বুদ্বুদ্ সৃষ্টি করা হইলে উহার অভ্যন্তরে অতিরিক্ত চাপের মান নির্ণয় কর। এই অতিরিক্ত চাপের রাশিমালার সাহায্য লইয়া কোন তরলের পৃষ্ঠ-টান নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর। পৃষ্ঠ-টান কিরূপে উষ্ণতার সহিত পরিবর্তিত হয় ?

(Derive an expression for the cxcess pressure inside a spherical soap bubble blown within a liquid. Describe how this expression is used in determining the surface tension of a liquid. How does surface tension vary with temperature ?) (C. U. '80)

7. জুরিণের সূত্রটি ব্যক্ত কর ও উহার সত্যতা প্রমাণ করিবার জন্য একটি পরীক্ষা পদ্ধতি বর্ণনা কর।

(State Jurin's law and describe an experimental method to verify it.) (C. U. New syllabus '80)

8. 0·025 mm ভিতরের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কৈশিক নলে জলের আরোহণ নির্ণয় কর। জলের পৃষ্ঠ-টান = 70 dynes/cm।

(Calculate the ascent of water in a capillary tube having the inner radius 0·025 mm. Surface tension of water = 70 dynes/cm.)

(C. U. '70) [Ans. 57·1 cm]

9. বাতাসে 1 cm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সাবান বুদ্বুদ্ সৃষ্টি করা হইল। ঐ বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ বর্ধিত করিয়া 3 cm করিতে কত শক্তির প্রয়োজন হইবে?

(C. U. 79) [Ans. 201·1 ergs.]

10. জল তলের 13·6 cm নিচে অবস্থিত একটি বায়ু বুদ্বুদের ভিতরের চাপ 78 cm পারদস্তম্ভের চাপের সমান। বুদ্বুদ্‌টির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। বায়ুমণ্ডলীয় চাপ = 76 cm, পারদস্তম্ভ, $g = 981$ cm/s^{3}, জলের পৃষ্ঠ-টান = 70 dynes/cm, পারদের ঘনত্ব = 13·6 gram/c.c.।

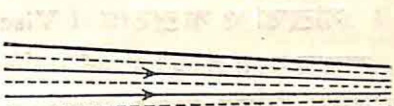
(The pressure inside an air bubble at a depth of 13·6 cm under the surface of water is 78 cm of Hg. Calculate the radius of the bubble. Atmospheric pressure = 76 cm of Hg, $g = 981$ cm/s^2, surface tension of water = 70 dynes/cm and density of Hg = 13·6 gram/c.c.) (C. U. '62) [Ans. 0·105 mm]

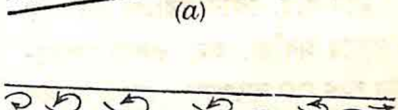
পঞ্চম পরিচ্ছেদ
সান্দ্রতা
(Viscosity)

5.1 সূচনা (Introduction)

তরল বা গ্যাসীয় পদার্থকে কোন পাত্রে আবদ্ধ না রাখিলে উহারা চিরকাল ধরিয়া প্রবাহিত হইতে থাকিবে। এই ধর্মের জন্য উহাদের একত্রে প্রবাহী বস্তু (fluid) বলা হয়। প্রবাহ দুই রকমের হইতে পারে : (1) অপরিবর্তী বা স্থির প্রবাহ (steady flow) এবং (ii) অশান্ত বা বিক্ষুব্ধ প্রবাহ (turbulent flow)।

প্রবাহী বস্তুর গতিপথের কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে সর্বদাই যদি উহার বেগ, চাপ ও ঘনত্ব অপরিবর্তিত থাকে তবে ঐ প্রবাহকে অপরিবর্তী বলে। কিন্তু যদি প্রবাহ চলাকালীন কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে বস্তুর বেগ, চাপ বা ঘনত্বের যে কোন একটিরও পরিবর্তন হইতে থাকে তবে সে প্রবাহকে বিক্ষুব্ধ প্রবাহ বলে। তরলের গতিপথের সহিত সমান্তরালভাবে উহার অণুগুলি যখন অগ্রসর হয় তখন সেই গতিকে ধারারেখী গতি (streamline motion) বলে। অপরপক্ষে, অণুগুলি তরলের গতিপথের সহিত সমান্তরালভাবে অগ্রসর না হইলে সেই গতিকে ব্যাহত বা বিক্ষুব্ধ গতি (turbulent motion) বলে। চিত্র 5.1 (a) ও (b) তে যথাক্রমে ধারারেখী গতি ও বিক্ষুব্ধ গতি দেখানো হইয়াছে।


(a)


(b)

চিত্র 5.1

বিক্ষুব্ধ গতির সময়ে গতিপথে ঘূর্ণি (eddies) ও আবর্তের (vortices) উৎপত্তি হয়। যে বেগের অধিক হইলে গতি বিক্ষুব্ধ হয়, সেই গতিকে ক্রান্তিক গতি (critical velocity) বলা হইয়া থাকে।

5.2 ক্রান্তিক বেগ ও রেনল্ডের সংখ্যা (Critical velocity and Reynold's number)

আমরা পূর্বেই বলিয়াছি, কোন তরলের বেগ একটি নির্দিষ্ট সীমা অতিক্রম করিলে উহা বিক্ষুব্ধ বা ব্যাহত গতিতে পরিণত হয়। পরীক্ষামূলকভাবে বিজ্ঞানী

রেনল্ড সর্বপ্রথম প্রমাণ করেন যে কোন তরলের ক্রান্তিক বেগ ν_c নিম্নোক্ত সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায় :

$$\nu_c = \frac{K\eta}{\rho r} \quad \cdots \quad (5.1)$$

যেখানে, K = ধ্রুবক

η = সান্দ্রতাংক

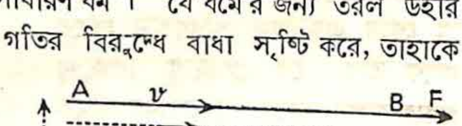
ρ = তরলের ঘনত্ব

এবং r = নলের ব্যাসার্ধ।

সমীকরণ (5.1)এ প্রদত্ত সূত্রকে রেনল্ডের সূত্র বলে এবং ধ্রুবক K কে বলা হয় রেনল্ডের সংখ্যা। রেনল্ডের সূত্র হইতে ইহা পরিষ্কার বুঝা যায় যে, নলের ব্যাসার্ধ কম হইলে এবং তরল যদি বেশী সান্দ্রতাংক ও কম ঘনত্ববিশিষ্ট হয় তবে উহা অব্যাহত গতির পক্ষে সহায়ক হইবে। দেখা গিয়াছে, খুব সরু নলের ক্ষেত্রে K এর মান প্রায় 1000 এর কাছাকাছি হইয়া থাকে।

5.3 সান্দ্রতা ও সান্দ্রতাঙ্ক (Viscosity and coefficient of viscosity)

সান্দ্রতা সকল প্রবাহী বস্তুরই একটি সাধারণ ধর্ম। যে ধর্মের জন্য তরল উহার অভ্যন্তরস্থ বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরুদ্ধে বাধা সৃষ্টি করে, তাহাকে তরলের সান্দ্রতা বলা হয়।



চিত্র 5.2

মনে করি, কোন তরলের AB স্তর x দূরত্বে অবস্থিত অন্য একটি সমান্তরাল স্তর CD সাপেক্ষে v বেগে অগ্রসর হইতেছে (চিত্র 5.2)। তরলের সান্দ্রতার দরুণ আপেক্ষিক গতিসম্পন্ন AB ও CD স্তরের মধ্যে একটি পশ্চাদ্‌বর্তী বল (dragging force) ক্রিয়া করিয়া AB স্তরের অগ্রগমনকে বাধা দিবে। সুতরাং, দুই স্তরের মধ্যে যদি আপেক্ষিক গতি বজায় রাখিতে হয় তবে AB স্তরের উপর সম্মুখবর্তী একটি বল প্রয়োগ করিতে হইবে।

পশ্চাদ্‌বর্তী বলের মান F হইলে তরলের ধারারেখ গতির ক্ষেত্রে নিউটন দেখান যে,

(i) $F \propto A$, যেখানে A = তরল স্তরের ক্ষেত্রফল

(ii) $F \propto v$, যেখানে v = আপেক্ষিক গতিবেগ

এবং (iii) $F \propto \frac{1}{x}$, যেখানে x = দুই স্তরের মধ্যে দূরত্ব

$$\therefore \quad F \propto A\frac{v}{x}$$

অথবা, $$F = \eta A\frac{v}{x} \quad \cdots \quad (5.2)$$

সমীকরণ (5.2) এ η একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবককে তরলের সান্দ্রতাংক বলে।

স্তরদ্বয় খুব কাছাকাছি হইলে উহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ dv এবং পারস্পরিক দূরত্বকে dx ধরা যাইতে পারে এবং সেক্ষেত্রে,

$$F=\eta A\frac{dv}{dx} \qquad \cdots \qquad (5.3)$$

$\frac{dv}{dx}$ কে বলা হয় গতিবেগের নতিমাত্রা (velocity gradient)।

উক্ত সমীকরণে যদি $A=1$ sq. unit

এবং $\frac{dv}{dx}=1$ হয়,

তবে $F=\eta$

অর্থাৎ, একক দূরত্বে অবস্থিত দুইটি তরল স্তরের মধ্যে একক আপেক্ষিক বেগ বজায় রাখিতে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে স্পর্শকীয় বল প্রয়োজন তাহাকে ঐ তরলের সান্দ্রতাংক বলা হয়।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে সান্দ্রতাঙ্কের একককে বলা হয় পয়্জ্ (poise) এবং ইহার মাত্রা $M\ L^{-1}\ T^{-1}$।

5.4 দ্রুত অপসৃয়মান বা ক্ষণস্থায়ী স্থিতিস্থাপকতা (Fugitive elasticity)

সমীকরণ (5.3) হইতে আমরা পাই,

$$\text{সান্দ্রতাংক,} \quad \eta=\frac{F/A}{dv/dx}=\frac{\text{স্পর্শকীয় পীড়ন}}{\text{গতিবেগের নতিমাত্রা}}$$

আবার, দৃঢ়তা গুণাঙ্কের ক্ষেত্রে,

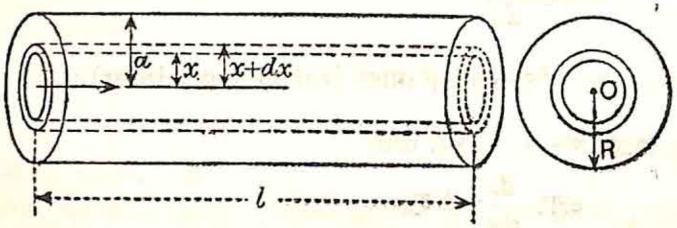
$$\eta=\frac{F/A}{dl/l}=\frac{\text{স্পর্শকীয় পীড়ন}}{\text{সরণের নতিমাত্রা}}$$

বিজ্ঞানী ম্যাক্সওয়েল উপরি-উক্ত দুই রাশিমালার সাদৃশ্য লক্ষ্য করিয়া মত প্রকাশ করেন যে, কঠিন পদার্থের মত তরলেরও কিছু দৃঢ়তা (rigidity) আছে কিন্তু কৃন্তন পীড়নের প্রভাবে উহা বারবার ভাঙিয়া যায়। পীড়নের প্রভাব ক্ষণস্থায়ী হওয়ার ফলে তরল স্তরের বিকৃতি ঘটে, পুনরায় উহা লোপ পায় এবং এই ঘটনার পুনরাবৃত্তি হইতে থাকে। অর্থাৎ আমরা বলিতে পারি, তরল কৃন্তন পীড়নের বিরুদ্ধে অপসৃয়মান বাধার সৃষ্টি করিয়া থাকে।

5.5 সরু নলের মধ্য দিয়া তরলের প্রবাহ; পয়সিউলের সমীকরণ (Flow of liquid through a narrow tube; Poiseuille's equation)

ধরা যাক, একটি অনুভূমিক সরু নলের (চিত্র 5.3) দৈর্ঘ্য l এবং ব্যাসার্ধ a। নলটির দুই প্রান্তে চাপের পার্থক্য P সৃষ্টি করিলে উহার মধ্য দিয়া ধারারেখী গতিতে

তরল প্রবাহিত হইবে। যদি নলের ভিতরের তরলকে অক্ষের সমান্তরালভাবে কতকগুলি স্তরে ভাগ করা হয় তবে নলের অক্ষ হইতে যে স্তর যত দূরে থাকিবে তাহার বেগও তত কম হইবে এবং দেওয়াল সংলগ্ন স্তর সম্পূর্ণ গতিহীন হইবে।



চিত্র 53

এক্ষণে x ও $x+dx$ ব্যাসার্ধের সম-অক্ষবিশিষ্ট দুইটি তরল চোঙ কল্পনা করিলাম। ধরা যাক, x ব্যাসার্ধের ভিতরের চোঙটির পৃষ্ঠে অবস্থিত তরল স্তরের বেগ v ও $x+dx$ ব্যাসার্ধের বাহিরের চোঙটির পৃষ্ঠে অবস্থিত তরল স্তরের বেগ $v-dv$। অর্থাৎ,

গতিবেগের ব্যাসার্ধমুখী (radial) নতিমাত্রা $= -\dfrac{dv}{dx}$ (ঋণাত্মক চিহ্ন বুঝাইতেছে যে x বৃদ্ধি পাইলে v হ্রাস পায়)

এবং ভিতরের তরল চোঙের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $=2\pi xl$

∴ বাহিরের তরল চোঙ কর্তৃক উক্ত চোঙের উপর পশ্চাদ্‌বর্তী বল,

$$F = -\eta . 2\pi xl\frac{dv}{dx} \quad (\eta = \text{সান্দ্রতাঙ্ক}) \qquad \cdots(5.4)$$

আবার, তরল চোঙের মুখের ক্ষেত্রফল $= P \times \pi x^2$

∴ P চাপের পার্থক্যের জন্য প্রবাহের অভিমুখে তরল চোঙ যে সম্মুখবর্তী বল প্রয়োগ করিবে তাহা

$$= P \times \pi x^2 \qquad \cdots(5.5)$$

কাজেই তরল চোঙের প্রবাহ স্থির হইলে,

$$-\eta . 2\pi xl . \frac{dv}{dx} = P . \pi x^2$$

অথবা, $$dv = -\frac{P}{2\eta l} . x\, dx \qquad \cdots(5.6)$$

সমাকলন করিয়া,

$$v = -\frac{P}{2\eta l}\int x\, dx$$

$$= -\frac{P}{2\eta l}\frac{x^2}{2}+k \quad (k = \text{সমাকলন অচর})$$

$$= -\frac{Px^2}{4\eta l}+k \qquad \cdots (5.7)$$

কিন্তু যখন, $x=a$

তখন $\quad v=0$

$$\therefore \quad 0=-\frac{Pa^2}{4\eta l}+k$$

অথবা, $$k=\frac{Pa^2}{4\eta l} \qquad \cdots (5.8)$$

সুতরাং সমীকরণ (5.7) হইতে পাই,

$$v=\frac{Pa^2}{4\eta l}-\frac{Px^2}{4\eta l}$$

$$=\frac{P}{4\eta l}(a^2-x^2) \qquad \cdots (5.9)$$

এই সমীকরণের সাহায্যে আমরা অক্ষ হইতে x দূরত্বে তরল স্তরের বেগ পাই।
এখন, x এবং $x+dx$ তরল চোঙ দুইটির মধ্যবর্তী অংশের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

$$=2\pi x \, dx$$

dx খুব ক্ষুদ্র বলিয়া আমরা মনে করিতে পারি যে, ঐ মধ্যবর্তী অঞ্চলের তরল স্তরের বেগ v।

$\therefore$ ঐ অংশ দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের আয়তন,

$$dv=2\pi x \, dx \times v$$

$$=2\pi x \, dx \times \frac{P(a^2-x^2)}{4\eta l}$$

$$=\frac{\pi P}{2\eta l}(a^2-x^2)x \qquad \cdots (5.10)$$

নলের মধ্য দিয়া প্রবাহিত তরলকে যদি অসংখ্য তরল চোঙ দ্বারা গঠিত ধরিয়া লওয়া যায় তবে $x=0$ এবং $x=a$ সীমার মধ্যে উপরের সমীকরণকে সমাকলন করিলে প্রতি সেকেণ্ডে সমগ্র নল দিয়া প্রবাহিত তরলের আয়তন পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad V=\frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^a (a^2-x^2)x \, dx$$

$$=\frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^a (a^2x-x^3)dx$$

$$=\frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$=\frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi P}{2\eta l}\frac{a^4}{4}$$

$$=\frac{\pi P a^4}{8\eta l} \qquad \cdots (5.11)$$

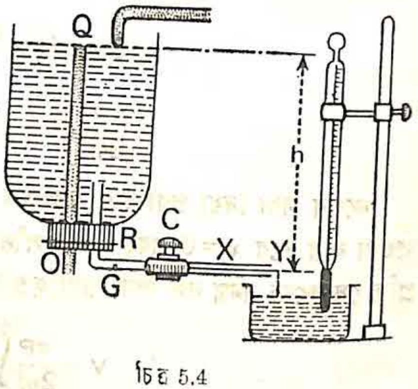
$$\text{অথবা, } \eta=\frac{\pi P a^4}{8 v l} \qquad \cdots (5.12)$$

সমীকরণ (5.12) কে পয়সিউলের সমীকরণ বলা হয়।

এই সমীকরণে দুইটি ত্রুটি লক্ষ্য করা যায় : (i) ধরিয়া লওয়া হয় যে নলের অক্ষ বরাবর তরলের কোন ত্বরণ নাই। কিন্তু বস্তুত নলে প্রবেশের মুখে তরলের ত্বরণ থাকে এবং উহা বেশ কিছুদূর পর্যন্ত বিলুপ্ত হয় না। (ii) নলের দুই মুখের ভিতর চাপের যে প্রভেদ থাকে তাহা কেবল সান্দ্রতাজনিত বাধা অতিক্রম করিতেই ব্যয় হয় না ; তরলের গতিশক্তি উৎপন্ন করিতেও কিছুটা ব্যয়িত হয়।

5.6 পয়সিউলের পদ্ধতিতে তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় (Determination of coefficient of viscosity of a liquid by Poiseuille's method)

এই পদ্ধতিতে একটি বড় কাচের পাত্র P আছে, যাহার উপরের চওড়া মুখ খোলা রাখিয়া নিচের সরু মুখ দুইটি ছিদ্রযুক্ত রবারের কর্ক R এর সাহায্যে বন্ধ করা হয়। একটি লম্বা নির্গম নল QO কর্কের একটি ছিদ্রে প্রবেশ করানো আছে ; ইহার উপর প্রান্ত (Q) P পাত্রের খোলামুখের সামান্য নিচে থাকে এবং নিম্নপ্রান্ত O কর্কের বাহিরে থাকে (চিত্র 5.4)। কর্কের অন্য ছিদ্রে একটি সমকোণে বাঁকানো কাচ-নলের (G) একপ্রান্ত প্রবেশ করানো হয়। এই কাচনলের বহিঃপ্রান্ত ও একটি লম্বা অনুভূমিক কৈশিক নল XY-এর



চিত্র 5.4

একপ্রান্ত একটি স্ক্রু-ক্যাপ C যুক্ত রবারের নল দ্বারা যুক্ত করা থাকে। তরলের যে হারে কৈশিক নল দ্বারা নির্গমন হয় তাহা অপেক্ষা কিছু বেশী হারে তরলকে নলের সাহায্যে কাচপাত্রে ঢালা হয়। অতিরিক্ত তরল O প্রান্ত দিয়া বাহিরে চলিয়া যাওয়ার

ফলে কাচ পাত্রের তরল তল কৈশিক নলের অক্ষরেখা হইতে একই উচ্চতায় থাকে। কৈশিক নলের Y প্রান্ত হইতে নির্গত তরলকে একটি বীকারে সংগ্রহ করিয়া উহার উষ্ণতা একটি থার্মোমিটার দ্বারা দেখা হয়।

কৈশিক নলের ব্যাসার্ধ খুব সূক্ষভাবে নির্ণয় করা প্রয়োজন। কৈশিক নলটিকে পারদ দ্বারা ভর্তি করিয়া পারদ-ভর্তি নলের গড় দৈর্ঘ্য L ও পারদের ভর m হইতে ব্যাসার্ধ a নিম্নোক্ত সমীকরণ হইতে বাহির করা হয়

$$m=\pi a^2 \times L \times 13{\cdot}6 \qquad \cdots(5.13)$$

কৈশিক নলের অক্ষ হইতে P পাত্রের তরলের উচ্চতা h একটি ক্যাথিটোমিটার-এর সাহায্যে ও কৈশিক নলের গড় দৈর্ঘ্য l একটি স্কেলের সাহায্যে মাপা হয়।

এক্ষণে সমীকরণ (5.12) হইতে আমরা জানি,

$$\eta=\frac{\pi P a^4}{8Vl}$$

যেহেতু, $P=h\rho g$

$$\therefore \quad \eta=\frac{\pi (h\rho g)a^4}{8Vl} \qquad \cdots(5.14)$$

(5.14) সমীকরণ-এর সাহায্যে তরলের সান্দ্রতাংক η নির্ণয় করা যায়।

5.7 পতনশীল বস্তুর উপর প্রবাহী (তরল বা গ্যাস) সান্দ্রতার প্রভাব (Effect of viscosity of fluid on falling bodies)

কোন বস্তু যখন তরলের মধ্য দিয়া পড়ে তখন উহা তরল বা গ্যাসের বিভিন্ন স্তরের ভিতর আপেক্ষিক গতির সৃষ্টি করে। এই আপেক্ষিক গতিকে তরল বা গ্যাসের সান্দ্রতা বাধা দিয়া থাকে। বস্তুর গতিবেগ বৃদ্ধির সহিত সান্দ্রতার দরুণ বিরুদ্ধ বলও বৃদ্ধি পায়। কিন্তু বস্তু খুব ক্ষুদ্র হইলে, এই বিরুদ্ধ বল শীঘ্রই বস্তুর গতি সৃষ্টিকারী বলের (driving force) সমান হইয়া পড়ে। তখন বস্তুটির উপর কার্যকরী বল আর কিছু থাকে না এবং ইহার ফলে বস্তুটি সমবেগে তরলের বা গ্যাসের মধ্য দিয়া গতি জড়তার দরুণ নামিতে থাকে। বস্তুর এই স্থির বেগকে প্রান্তিক বেগ (terminal velocity) বলে। a ব্যাসার্ধের কোন ক্ষুদ্র গোলীয় বস্তু η সান্দ্রতাংক যুক্ত কোন মাধ্যমের মধ্য দিয়া v প্রান্ত বেগে পড়িলে, উহার উপর সান্দ্রতার জন্য যে পশ্চাদ্‌বর্তী বল (retarding force) F ক্রিয়া করিবে তাহাকে আমরা নিম্নোক্ত সমীকরণ-এর সাহায্যে নির্ণয় করিতে পারি।

$$F=6\pi\eta a v \qquad \cdots(5.15)$$

এই সূত্র স্টোকস্ প্রমাণ করিয়াছিলেন এবং ইহা স্টোকস্ সূত্র (Stokes' formula) নামে পরিচিত।

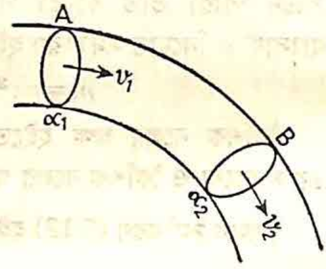
5.8 অনবচ্ছেদ সমীকরণ (Equation of Continuity)

কোন প্রবাহী অপরিবর্তী বেগে (steady velocity) প্রবাহিত হইলে উহার প্রবাহকে কতকগুলি প্রবাহ-নালীর (tubes of flow) সমষ্টি বলিয়া মনে করা যাইতে পারে। ধরা যাক, প্রবাহ-নালীর অভিলম্বভাবে A ও B অবস্থানে দুইটি ছেদ আছে যাহাদের ক্ষেত্রফল α_1 ও α_2 এবং A B ছেদ দিয়া তরলের বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2।

এখন, A ছেদ দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের আয়তন $= a_1 v_1$

এবং B ছেদ দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের আয়তন $= a_2 v_2$.

মনে করি, A ও B ছেদ অতিক্রম করিবার সময় তরলের ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_1 ও ρ_2।



চিত্র 5.5

$\therefore$ A ছেদ দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের ভর $= a_1 v_1 \rho_1$

এবং B ছেদ দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের ভর $= a_2 v_2 \rho_2$.

প্রবাহ অপরিবর্তিত হইলে A ও B দিয়া প্রতি সেকেন্ডে সমপরিমাণ তরল প্রবাহিত হইবে, অর্থাৎ

$$a_1 v_1 \rho_1 = a_2 v_2 \rho_2 \qquad \cdots (5.16)$$

কিন্তু তরলের ক্ষেত্রে, $\rho_1 = \rho_2$ (অসংনম্য বলিয়া)

$$\therefore \quad a_1 v_1 = \alpha_2 v_2$$

$$\text{বা} \quad av = \text{ধ্রুবক} \qquad \cdots (5.17)$$

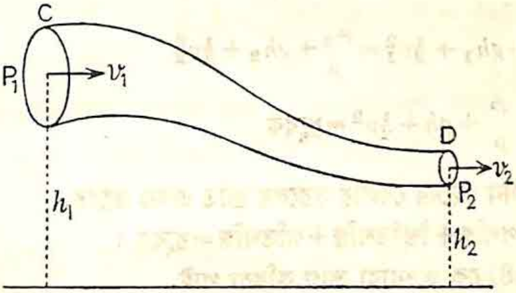
সমীকরণ (5.17) কে তরলের অনবচ্ছেদ সমীকরণ বলা হয়।

5.9 বার্ণোলীর উপপাদ্য (Bernoulli's theorem)

ফরাসী গণিতবিদ ডেভিড বার্ণৌলী 1738 খ্রীষ্টাব্দে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রের সাহায্যে ধারারেখ প্রবাহের একটি সূত্র বাহির করেন। ইহা তরল গতি বিজ্ঞানের (hydrodynamics) একটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য। এই উপপাদ্য অনুযায়ী **'ধারারেখ গতিতে প্রবাহিত কোন তরলের ক্ষেত্রে প্রবাহের যে কোন ছেদে তরলের প্রতি একক ভরের স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি ও চাপশক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক হইবে'**। অন্যভাবে বলা যায়, ধারারেখ গতিতে প্রবাহিত তরলের যে কোন বিন্দুতে চাপশীর্ষ, বেগশীর্ষ এবং উচ্চতাশীর্ষের সমষ্টি একটি ধ্রুবক।

মনে করি, CD প্রবাহনালীর ভিতর দিয়া তরল ধারারেখ গতিতে প্রবাহিত হইতেছে (চিত্র 5.6)। যেহেতু নালীর ভিতর তরল কোথাও সঞ্চিত হইতে পারে না, অতএব যদি t সময়ে নালীর C প্রান্ত দিয়া V আয়তনের তরল প্রবেশ করে তবে ঐ সময়ে D প্রান্ত দিয়া ঐ একই আয়তনের তরল নির্গত হইবে।

ধরা যাক, C প্রান্তের চাপ P_1, প্রস্থচ্ছেদ α_1 ও তরলের বেগ v_1 এবং D প্রান্তের চাপ, প্রস্থচ্ছেদ ও তরলের বেগ যথাক্রমে P_2, α_2 ও v_2 ।



চিত্র 5.6

$\therefore$ C প্রান্তে তরল কর্তৃক প্রযুক্ত বল $= P_1 \alpha_1$

এবং t সময়ে তরল যে দূরত্ব অতিক্রম করিতেছে তাহা $= v_1 t$

সুতরাং তরল দ্বারা কৃত কার্য $= P_1 \alpha_1 \times v_1 t$

$$= P_1 V \quad (\because \alpha_1 v_1 t = V)$$

এই কার্য তরলের ভিতর সঞ্চিত হয় এবং ইহাকে তরলের চাপশক্তি বলে।

$$\therefore \text{ চাপশক্তি} = P_1 V$$

ρ তরলের ঘনত্ব হইলে,

তরলের প্রতি একক ভরের চাপশক্তি $= \dfrac{P_1 V}{V\rho} = \dfrac{P_1}{\rho}$

কোন একটি সময়ে C মুখ দিয়া যে তরল প্রবেশ করে তাহার ভর m হইলে,

C প্রান্তে তরলের চাপশক্তি $= m\dfrac{P_1}{\rho}$

আবার মনে করি,

$h_1 =$ অনুভূমিক তল হইতে C প্রান্তের কেন্দ্রবিন্দুর উচ্চতা

এবং $h_2 =$ অনুভূমিক তল হইতে D প্রান্তের কেন্দ্রবিন্দুর উচ্চতা

$\therefore$ C প্রান্তে তরলের স্থিতিশক্তি $= mgh_1$

এবং C প্রান্তে তরলের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2$

$\therefore$ C প্রান্তে তরলের মোট শক্তি $= m\dfrac{P_1}{\rho} + mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2$

অনুরূপ, D প্রান্তে তরলের মোট শক্তি $= m\dfrac{P_2}{\rho} + mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$

∴ শক্তির সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী,

$$m\frac{P_1}{\rho}+mgh_1+\frac{1}{2}mv_1^2=m\frac{P_2}{\rho}+mgh_2+\frac{1}{2}mv_2^2$$

অথবা, $$\frac{P_1}{\rho}+gh_1+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{P_2}{\rho}+gh_2+\frac{1}{2}v_2^2$$

অর্থাৎ, $$\frac{P}{\rho}+gh+\frac{1}{2}v^2=\text{ধ্রুবক} \quad \cdots(5.18)$$

সুতরাং যে কোন ছেদের বেলায় তরলের প্রতি একক ভরের,

চাপশক্তি + স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি = ধ্রুবক।

সমীকরণ (5.18) কে g দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{P}{\rho g}+h+\frac{1}{2}\frac{v^2}{g}=\text{ধ্রুবক} \quad \cdots(5.19)$$

কাজেই, চাপশীর্ষ + উচ্চতাশীর্ষ + বেগশীর্ষ = ধ্রুবক।

প্রবাহনালী CD অনুভূমিক হইলে,

$$h_1=h_2=h$$

অতএব তখন, $$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2=\text{ধ্রুবক}$$

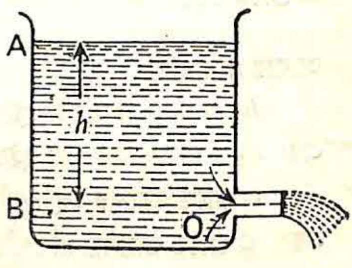
অথবা, $$P+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{ধ্রুবক} \quad \cdots(5.20)$$

P কে তরলের **স্থিতীয় চাপ** (static pressure) এবং $\frac{1}{2}\rho v^2$ কে **গতীয় বা বেগ চাপ** (dynamic or velocity pressure) বলে।

5.10 বার্ণোলীর উপপাদ্যের কয়েকটি ব্যবহারিক প্রয়োগ (Some applications of Bernoulli's theorem)

(a) **টরিচেল্লীর উপপাদ্য : তরলের নিঃসারণ বেগ** (Torricelli's theorem : velocity of efflux of a liquid)

টরিচেল্লীর উপপাদ্য অনুযায়ী, 'কোন ক্ষুদ্র ছিদ্র দিয়া তরলের বহির্বাহ বেগ ঐ তরলের পৃষ্ঠ হইতে ছিদ্র পর্যন্ত কোন বস্তু বিনা বাধায় অবতরণ করিলে যে বেগ সঞ্চয় করে তাহার সমান হইবে'।



চিত্র 5.7

মনে করি, ρ ঘনত্বের কোন তরল একটি বড় আধার AB তে রাখা হইয়াছে (চিত্র 5.7)। আধারের তলদেশে তরলের মুক্ত পৃষ্ঠ থেকে h দূরত্বে একটি ছোট ছিদ্র O আছে। ছিদ্র দিয়া তরল যে বেগে বাহির হইয়া আসে তাহাকে তরলের **নিঃসারণ বেগ** বা **বহির্বাহ বেগ** বলে।

আধার AB খুব বৃহৎ ও ছিদ্র O খুব ক্ষুদ্র বলিয়া পৃষ্ঠে তরল স্তরের বেগ শূন্য হইবে। ছিদ্র O দিয়া তরল অনুভূমিকভাবে প্রবাহিত হইলে বার্ণোলীর উপপাদ্য হইতে আমরা পাই,

$$P+0+h\rho g=P+\tfrac{1}{2}\rho v^2+0$$

(∵ তরলের পৃষ্ঠে ও ছিদ্রে চাপ সমান)

অথবা, $v=\sqrt{2gh}$ ...(5.21)

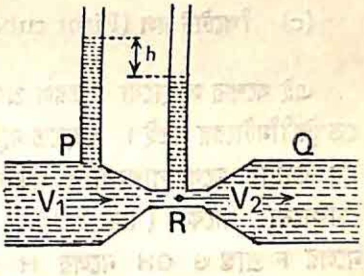
ইহাই ছিদ্রপথে তরলের নিঃসারণ বেগ। এখন আমরা জানি, কোন বস্তু স্থায়ী অবস্থান হইতে h দূরত্ব অবাধে অবতরণ করিলে উহার বেগ,

$$v=\sqrt{2gh}$$

সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

(b) **ভেণ্টুরীমিটার** (Venturimeter)

কোন নলের মধ্য দিয়া তরলের প্রবাহের হার যে যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করা হয় তাহাকে ভেণ্টুরীমিটার বলে। চিত্র 5.8 এ ভেণ্টুরীমিটারের কার্যপ্রণালী দেখানো হইয়াছে। দুইটি সমান মোটা নল P ও Q কে একটি ছোট চোঙাকৃতি নল R দ্বারা যুক্ত করা হইয়াছে। R নলকে থ্রোট (throat) বলা হয়, P ও Q এর মধ্যে অবস্থিত একটি ম্যানোমিটার চাপ-পার্থক্য নির্দেশ করে।



চিত্র 5.8

মনে করি, P ও Q নলের ব্যাস α_1 ও R নলের ব্যাস α_2 ; P বিন্দুতে চাপ ও বেগ যথাক্রমে p_1, v_1 এবং R বিন্দুতে p_2, v_2।

এখন তরলের অনবচ্ছেদ সমীকরণ হইতে পাই,

$$\alpha_1 v_1=\alpha_2 v_2=Q \quad \cdots(5.22)$$

যেখানে, Q = তরলের প্রবাহের হার

অথবা, $\dfrac{P_1}{\rho}+\tfrac{1}{2}v_1^2=\dfrac{P_2}{\rho}+\tfrac{1}{2}v_2^2$ (বার্ণোলীর উপপাদ্য হইতে)

অথবা, $\dfrac{P_1-P_2}{\rho}=\dfrac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{\alpha_2^2}-\frac{Q^2}{\alpha_1^2}\right)$$

$$=\frac{Q^2}{2}\left(\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\right)$$

$$\therefore \quad Q = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{\rho}}$$

$$= \alpha_1\alpha_2 \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{\rho(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}} \qquad \cdots(5.22)$$

ম্যানোমিটারে তরল স্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতায় পার্থক্য h হইলে,

$$P_1 - P_2 = h\rho g \qquad \cdots(5.23)$$

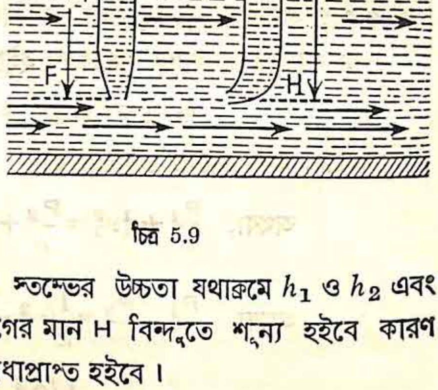
$\therefore$ তরল প্রবাহের হার, $Q = \alpha_1\alpha_2\sqrt{\dfrac{2h\rho g}{\rho(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}}$

$$= \alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{2hg}{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}} \qquad \cdots(5.24)$$

সুতরাং α_1, α_2 জানা থাকিলে h পরিমাপ করিয়া আমরা কোন পাইপ দিয়া তরল প্রবাহের হার নির্ণয় করিতে পারি।

(c) পিটোট নল (Pitot tube)

এই যন্ত্রের সাহায্যে ও তরল প্রবাহের হার পরিমাপ করা হয় এবং ইহার কার্যনীতি ভেঞ্চুরীমিটারের মতই। ইহাতে দুইটি নল EF ও GH যে পাইপ দিয়া তরল প্রবাহিত হয় তাহার মধ্যে পাশাপাশি খাড়াভাবে ঢোকানো থাকে (চিত্র 5.9)। EF নলের F প্রান্ত ও GH নলের H প্রান্ত সরু ছিদ্র যুক্ত। F প্রান্তে অবস্থিত ছিদ্রের তলকে তরল প্রবাহের সমান্তরাল ভাবে রাখা হয় কিন্তু H প্রান্তের ছিদ্রকে এমন-ভাবে বাঁকানো হয় যাহাকে উহা প্রবাহের মুখোমুখী হয়। উভয় নল দিয়াই তরল উপরে উঠিবে এবং এই অবস্থায় EF নলে তরল স্তম্ভের উচ্চতা F বিন্দুতে তরলের চাপ বুঝাইবে।



চিত্র 5.9

মনে করি, F ও H বিন্দুতে তরল স্তম্ভের উচ্চতা যথাক্রমে h_1 ও h_2 এবং F বিন্দুতে তরল স্তম্ভের বেগ v_1, এই বেগের মান H বিন্দুতে শূন্য হইবে কারণ ছিদ্রটি প্রবাহের মুখোমুখী থাকায় প্রবাহ বাধাপ্রাপ্ত হইবে।

অনুভূমিক তল হইতে F ও H বিন্দুর উচ্চতা এক বলিয়া আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{v^2}{2g} + h_1 = 0 + h_2 \qquad \text{(বার্ণোলীর উপপাদ্য)} \cdots(5.25)$$

∵ h_1 অপেক্ষা h_2 বড়, কাজেই EF নল অপেক্ষা GH নলে তরল স্তম্ভের উচ্চতা অধিক হইবে।

সমীকরণ (5.25) হইতে পাই,

$$v^2 = 2g(h_2 - h_1)$$

$$= 2gh, \quad \text{যেখানে,} \quad h_2 - h_1 = h$$

$$\text{বা,} \quad v = \sqrt{2gh}$$

নল দুইটি যেখানে প্রবেশ করানো হয় সেখানে মূল পাইপের প্রস্থচ্ছেদ ∝ হইলে,

$$\text{তরল প্রবাহের হার, } Q = \alpha v = \alpha \sqrt{2gh} \quad \cdots(5.26)$$

সুতরাং ∝ জানা থাকিলে h পরিমাপ করিয়া সমীকরণ (5.26) এর সাহায্যে Q নির্ণয় করা যাইবে।

5.11 সান্দ্রতাঙ্কের উপর উষ্ণতা ও চাপের প্রভাব (Effect of temperature and pressure on viscosity)

(i) **উষ্ণতার প্রভাব :** তরলের ক্ষেত্রে উষ্ণতা বৃদ্ধির সহিত সান্দ্রতা হ্রাস পায়। এই সম্পর্কে প্রস্তাবিত সূত্রগুলির মধ্যে কোনটিও সঠিকভাবে প্রযোজ্য নয়। এই সূত্রগুলির মধ্যে একটি হইল,

$$\log \eta = A + \frac{B}{T} \quad \cdots(5.27)$$

যেখানে η = তরলের সান্দ্রতাঙ্ক, A ও B = নিত্যসংখ্যা এবং T = তরলের পরম উষ্ণতা।

গ্যাসের ক্ষেত্রে উষ্ণতা বৃদ্ধিতে সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব (kinetic theory of gases) হইতে নিম্নোক্ত সম্পর্ক পাওয়া যায় :

$$\eta = A\eta_0 T^{1/2} \quad \cdots(5.28)$$

যেখানে η = গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্ক, A = নিত্যসংখ্যা, η_0 = 0°C উষ্ণতায় ঐ গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্ক এবং T গ্যাসের পরম উষ্ণতা।

(ii) **চাপের প্রভাব :** চাপ বৃদ্ধির সহিত তরলের সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। এ সম্পর্কে এখনও কোন সঠিক সূত্র পাওয়া সম্ভব হয়নি।

গতিতত্ত্ব অনুযায়ী গ্যাসের সান্দ্রতা চাপের উপর নির্ভরশীল নয়। তবে পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গিয়াছে যে, কম চাপে কোন গ্যাসের সান্দ্রতাঙ্ক চাপের সহিত সমানুপাতে পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ (Examples)

1. একটি ট্যাংক হইতে 1·5 gram/c. c. ঘনত্বের তরলের নিঃসারণ বা বহির্বাহ বেগ নির্ণয় কর। ট্যাংকে জলের চাপ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা 10000 dynes/cm^2 বেশী।

(Find the velocity of efflux of a liquid of density 1·5 gram/c.c. from a tank in which the pressure of liquid is 10000 dynes/cm^2 above the atmospheric pressure.)

তরল স্তম্ভের উচ্চতা, $h=\frac{h\rho g}{\rho g}$

$$=\frac{10,000}{1\cdot 5\times 980}$$

$$=\frac{1000}{147}\text{ cm}$$

∴ তরলের নিঃসারণ বা বহির্বাহ বেগ, $v=\sqrt{2gh}$

$$=\sqrt{2\times 980\times \frac{1000}{147}}$$

$$=115 \text{ cm/second.}$$

2. 100 sq. cm ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি প্লেট 15·5 poise সান্দ্রতাংকযুক্ত রেড়ীর তেলের 2 mm পুরু একটি স্তরের উপর রাখা আছে। প্লেটটিকে 3 cm/second বেগে চালনা করিতে যে অনুভূমিক বলের প্রয়োজন হইবে তাহার মান নির্ণয় কর।

(A plate of metal 100 sq. cm in area rests on a layer of castor oil 2 mm thick, whose coefficient of viscosity is 15·5 poise Calculate the horizontal force required to move the plate with a speed of 3 cm per second.)

অনুভূমিক সান্দ্রতা বল, $F=-\eta A\frac{v}{x}$

এখানে, $A=100$ sq. cm

$\eta=15\cdot 5$ poise

$v=3$ cm/second

এবং $x=2$ mm $=0\cdot 2$ cm

$$\therefore\ F=-\frac{15\cdot 5\times 100\times 3}{0\cdot 2}$$

$$=-23,250 \text{ dynes}$$

অতএব প্রয়োজনীয় বল $=+23,250$ dynes

3. 20 cm দৈর্ঘ্য ও 0·081 cm অন্তর্ব্যাসার্ধ যুক্ত একটি অনুভূমিক নলের ভিতর দিয়া জল প্রবাহিত হইতেছে। নলের দুই প্রান্তের ভিতর চাপের পার্থক্য জলের উচ্চতায় 20 cm হইলে 12 মিনিটে 864 c. c. জল বাহির হয়। জলের সান্দ্রতাঙ্ক বাহির কর।

(Water flows through a horizontal tube of length 20 cm and internal radius 0·081 cm under the constant pressure head of water 20 cm high. In 12 minutes 864 c.c. of water flows through the tube. Calculate the coefficient of viscosity of water.)
(C. U. '76)

আমরা জানি,

$$\text{সান্দ্রতাঙ্ক } \eta = \frac{\pi P a^4}{8 V l}$$

$$= \frac{\pi h \rho g a^4}{8 V l}$$

এখানে, $h = 20$ cm, $\rho = 1$ gram/c. c., $g = 980$ cm/s^2, $l = 20$ cm এবং $a = 0·081$ cm.

প্রতি সেকেণ্ডে নল দিয়া প্রবাহিত জলের আয়তন,

$$V = \frac{864}{60 \times 12} \text{ c.c./second}$$

$$= 1·2 \text{ c.c./second}$$

$$\therefore \quad \eta = \frac{22}{7} \cdot \frac{20 \times 980 \times (0·081)^4}{8 \times 1·2 \times 20}$$

$$= 0·01381 \text{ poise.}$$

4. একটি নলের মধ্য দিয়া জল প্রবাহিত হইতেছে ; ইহার A ও B বিন্দুতে ব্যাস যথাক্রমে 60 cm ও 20 cm। A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে চাপের পার্থক্য 100 cm উচ্চতার জলস্তম্ভের সমান। নল দিয়া জলপ্রবাহের হার নির্ণয় কর।

(A pipe is full of running water ; its diameters at point A and B are respectively 60 cm and 20 cm. The pressure difference between A and B is 100 cm of water column. Find the rate of flow of water through the pipe.)

প্রতি সেকেণ্ডে নল দিয়া জলপ্রবাহের হার

$$= \alpha_1 \alpha_2 \sqrt{\frac{2hg}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}}$$

এখানে, $\alpha_1 = \pi(30)^2$,

$= 2828{\cdot}6$ sq. cm

$\alpha_2 = \pi(10)^2$

$= 314{\cdot}3$ sq. cm

এবং $h = 100$ cm

সুতরাং জল প্রবাহের হার

$$= 2828{\cdot}6 \times 314{\cdot}3 \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 980}{(2828{\cdot}6)^2 - (314{\cdot}3)^2}}$$

$= 1{\cdot}39 \times 10^5$ c.c./second.

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ :

ধারারেখ প্রবাহ, অশান্ত প্রবাহ ও রেনল্ডের সংখ্যা।

(Write short notes on : Stream line motion, turbulent motion and Reynold's number.) (C. U. '79)

2. তরলের সান্দ্রতাঙ্কের সংজ্ঞা লিখ। সমান্তরালভাবে রাখা একটি কৈশিক নলের ভিতর দিয়া উহার দুই প্রান্তের চাপের পার্থক্যের দরুণ প্রবাহিত তরলের পরিমাণ বাহির কর ; তরলের গতিকে ধারারেখ বলিয়া ধরা যায়।

(Define coefficient of viscosity of a liquid. Derive an expression for the volume of a liquid flowing through a narrow horizontal tube under a pressure difference between its ends, the flow being stream line.) (C. U. '62, '76)

3. তরলের সান্দ্রতাঙ্ক বলিতে কি বুঝায় ব্যাখ্যা কর। একটি এককের সংজ্ঞা লিখ যাহাতে উহা প্রকাশ করা যায়।

(Explain what is meant by coefficient of viscosity of liquid and define a unit in which it is expressed.) (C. U. '67)

4. সরু নলের মধ্য দিয়া কোন তরলের প্রবাহ সম্পর্কিত পয়সিউলের সমীকরণটি উপপাদন কর। ইহার সাহায্যে কোন তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয়ের একটি পরীক্ষামূলক পদ্ধতির সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। রেনল্ডের সংখ্যার তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর।

(Derive Poiseuille's equation for flow of a liquid through a narrow tube. Hence describe briefly an experimental method of determining coefficient of viscosity of a liquid. Explain the significance of Reynold's number.) (C. U. New syllabus '80)

5. সংক্ষেপে টীকা লিখ : বার্ণোলীর উপপাদ্য ও ভেণ্টুরী নল

(Write short notes on : Bernoulli's theorem and Venturi tube.)
(C. U. '78, '80)

6. 1 mm অন্তর্ব্যাস এবং 70 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন অনুভূমিক কৈশিক নলে 30 cm জলস্তম্ভের উচ্চতার চাপে জল প্রবাহিত হয়। নলের মধ্য দিয়া জল প্রবাহের হার নির্ণয় কর। জলের সান্দ্রতাঙ্ক = 0·01 c.g.s., $g = 980$ cm/s^2।

(Water flows through a horizontal capillary tube of 1 mm internal diameter and of length 70 cm under a pressure of column of water 30 cm in height. Find the rate of flow of water through the tube. Viscosity of water = 0.01 c.g.s., $g = 980$ cm/s^2.) (C. U. '78)
[Ans. 0·103 c.c./second]

7. কৈশিক নল দ্বারা যে পরিমাণ তরল বাহিরে আসে তাহা 7·06 c. c. প্রতি মিনিটে ; জলস্তম্ভের উচ্চতা = 34·1 cm, নলের দৈর্ঘ্য = 56·45 cm., নলের ব্যাসার্ধ = 0·0514 cm, $g = 981$ cm/s^2। জলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় কর।

(Find the coefficient of viscosity from the following data: Volume of water coming out through the capillary tube = 7·06 c.c./minute. Head of water = 34·1 cm, length of tube = 56·45 cm, radius of tube = 0·0514, $g = 981$ cm/s^2.) (C. U. '65, '69)
[Ans. 0·0138 poise]

8. 3·2 mm ব্যাসের একটি সীসার বল 0·92 gram/c.c. ঘনত্বের এবং 16·4 poise সান্দ্রতাঙ্কের কোন তরলের ভিতর দিয়া অভিকর্ষের টানে নিচের দিকে পড়িতেছে। সীসার ঘনত্ব 7·82 gram/c.c. ধরিয়া সীসার বলের প্রান্তিক বেগ নির্ণয় কর।

(Calculate the terminal velocity acquired by a steel ball of diameter 3·2 mm falling under gravity through an oil of density 0·92 gram/c.c. and viscosity 16·4 poise. The density of steel may be taken as 7·82 gram/c.c.) [Ans. 2·35 cm/second]

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

নিম্নচাপ সৃষ্টি এবং উহার পরিমাপ

(Production of low pressure and its measurement)

6.1 সূচনা (Introduction)

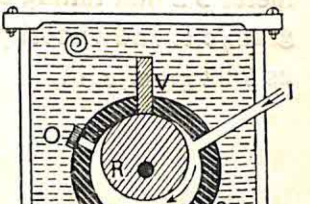
এক্স রশ্মি, বৈদ্যুতিক বাল্ব, বিভিন্ন প্রকারের পারমাণবিক পরীক্ষা প্রভৃতির জন্য উচ্চ মাত্রার শূন্যতা বা উচ্চ নির্বাত সৃষ্টির প্রয়োজন হইয়া থাকে। উচ্চ মাত্রার এই শূন্যতা বা অতি নিম্নচাপ সৃষ্টির জন্য বিজ্ঞানীগণ নিম্নচাপ সৃষ্টিকারী নানারকম যন্ত্রের উদ্ভাবন করেন যাহাদের নির্বাত পাম্প (vacuum pump) বলা হয়। কিন্তু শুধু মাত্র নিম্নচাপ সৃষ্টি করিলেই প্রয়োজন শেষ হইয়া যায় না; সূক্ষ্মভাবে উহা পরিমাপেরও প্রয়োজন। এই প্রয়োজন মিটাইবার জন্যই বিভিন্ন ধরণের নিম্নচাপ পরিমাপ যন্ত্র নির্মিত হইয়াছে। বর্তমানে আমরা অতি সহজেই 10^{-9} mm পারদস্তম্ভের মত নিম্নচাপ সৃষ্টি করিয়া তাহা সঠিকভাবে পরিমাপ করিতে পারি।

আমরা এখানে কয়েকটি পাম্প ও উহার পরিমাপক যন্ত্র বা 'গেজ' সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত আলোচনা করিব।

6.2 হাইভ্যাক্ রোটারী অয়েল পাম্প (Hyvac rotary oil pump)

উচ্চমাত্রার শূন্যতা সৃষ্টিকারী পাম্পগুলির মধ্যে রোটারী অয়েল পাম্পের ব্যবহারই সর্বাধিক বেশী। বিজ্ঞানী গেডে (Gaede) সর্বপ্রথম এই পাম্পের উদ্ভাবন করেন।

বিবরণ: 6.1 চিত্রে এই পাম্পের নকশা দেখানো হইয়াছে। S একটি ইস্পাত দ্বারা তৈয়ারী চোঙাকৃতি আবরণ যাহার ভিতর উৎকেন্দ্রিকভাবে (eccentrically) একটি নিরেট চোঙ R ঘুরিতে পারে। S কে 'স্টেটর' এবং 'R' কে 'রোটর' বলে। একটি স্প্রীংয়ের সাহায্যে 'ভেন' Vকে রোটরের গায়ে আটকানো হয়। ফলে ইহা S চোঙের মধ্যস্থিত গ্যাস বা বায়ুকে নবাগত গ্যাস বা বায়ু হইতে আলাদা করিয়া রাখে। যে পাত্র হইতে বায়ু বা গ্যাস নিষ্কাশন করিয়া শূন্যতা সৃষ্টি করিতে হইবে তাহার



চিত্র 6.1

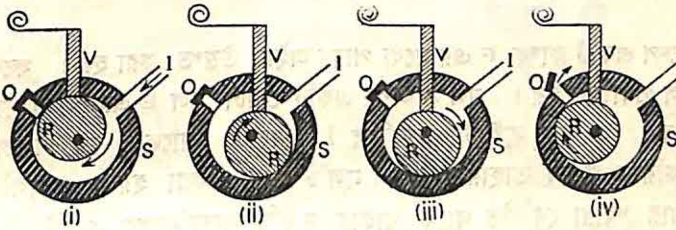
সহিত একটি আগম নল I যুক্ত করা হয়। ইহা ছাড়া S আবরণের সহিত একটি নির্গম নল O যুক্ত থাকে; ইহাতে বহির্মুখী খোলে একটি ভালভ্ লাগানো

থাকে। সমগ্র পাম্পটিকে ক্ষরণ নিবারণের জন্য একটি বিশেষ তৈলে নিমজ্জিত করা হয়।

কার্যপ্রণালী : চিত্র 6.2তে রোটারী অয়েল পাম্পের কার্যপ্রণালী বোঝানো হইয়াছে।

পাম্পের কার্যারম্ভ চিত্র 6.2(i) এর সাহায্যে বোঝানো যাইতে পারে। এখানে আগম নল I যে পাত্রে শূন্যতার সৃষ্টি করিতে হইবে তাহার সহিত যুক্ত থাকে এবং ঐ পাত্র হইতে বায়ু বা গ্যাস S ও R এর মধ্যবর্তী অঞ্চল পূর্ণ করে।

ইহার পর রোটর উৎকেন্দ্রিকভাবে ঘূর্ণন শুরু করিয়া বায়ু বা গ্যাসকে সংনমিত করে। চিত্র 6.2(ii) তে ইহা বোঝানো হইয়াছে। যদিও নতুন বায়ু বা গ্যাস আগম



চিত্র 6.2

নল দিয়া চোঙের অভ্যন্তরে প্রবেশ করে কিন্তু পূর্বে পৃষ্ঠ বায়ু বা গ্যাস হইতে এই নবাগত বায়ু বা গ্যাসকে ভেন V আলাদা করিয়া রাখে।

রোটর কিছুটা ঘুরিবার পর বায়ু বা গ্যাস আরো পৃষ্ঠ হইবে। চিত্র 6 2(iii)তে ইহা বোঝানো হইয়াছে।

বায়ু বা গ্যাস সংনমনের সর্বশেষ পর্যায় চিত্র 6.2(iv)এ দেখানো হইয়াছে। এই সময়ে S এর অভ্যন্তরস্থ বায়ু বা গ্যাসের চাপ অত্যন্ত বৃদ্ধি পাওয়ায় উহা O নির্গম নলের ভাল্‌ভকে জোর করিয়া খুলিয়া পাম্প হইতে বাহির হইয়া আসিবে। এই-রূপে রোটরের ঘূর্ণনের ফলে পাম্প আগম নলের সহিত যুক্ত পাত্রে শূন্যতার সৃষ্টি করে। খুব উচ্চমাত্রার শূন্যতা সৃষ্টি করিতে হইলে ঐরূপ দুইটি পাম্প শ্রেণী সমবায়ে রাখিয়া একই বৈদ্যুতিক মোটর দ্বারা চালনা করা হয়। এইভাবে ক্রিয়ার ফলে এই পাম্প 10^{-3} mm পারদচাপের সমান নিম্নচাপ সৃষ্টি করিতে পারে।

6.2.1 রোটারী পাম্পের সুবিধা (Advantages of a rotary pump)

(i) সমগ্র পাম্পটি তৈলে নিমজ্জিত থাকে বলিয়া ইহা ক্ষরণ নিরুদ্ধ (leak tight) হয়। ফলে সহজে শূন্যতা সৃষ্টি করিতে পারে।

(ii) ইহার ক্রিয়া অবিরাম ; অন্যান্য পাম্পের ন্যায় সবিরাম (intermittent) নয়।

(iii) এই পাম্প বায়ুমণ্ডলীয় চাপ বা নিম্নচাপে কাজ করিতে পারে।

(iv) পিস্টনযুক্ত সাধারণ বায়ু নিষ্কাশক পাম্প অপেক্ষা অধিকতর শূন্যতা সৃষ্টি করিতে সক্ষম।

(v) বৈদ্যুতিক মোটরে চালিত বলিয়া প্রতি সেকেণ্ডে ইহার আবর্তন সংখ্যা অধিক।

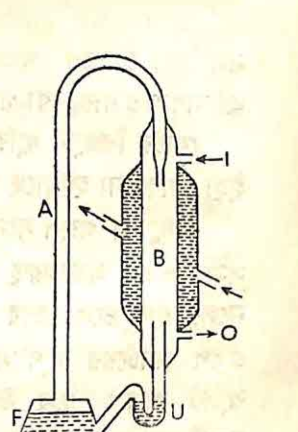
(vi) এই পাম্প আকারে ছোট বলিয়া অপরিসর স্থানেও ব্যবহার করা চলে।

6.3 ব্যাপন পাম্প (Diffusion pump)

ব্যাপন পাম্পের কার্যনীতি নিম্নরূপ: কোন গ্যাস মিশ্রণের যে কোন দুই অংশের মোট চাপ যাহাই হউক না কেন, যে অংশে গ্যাসের আংশিক চাপ (partial pressure) বেশী সেই অংশ হইতে কম আংশিক চাপের অঞ্চলে গ্যাসের ব্যাপন হইবে।

এই পাম্পে একটি ফ্লাস্ক F এর মধ্যে পারদ লইয়া উত্তপ্ত করা হয়। ফলে পারদ বাষ্প A নলে প্রবাহিত হয়। নল A অপর একটি মোটা নল B এর অভ্যন্তরে প্রবেশ করানো থাকে। B এর দুইটি পার্শ্বনল I এবং O আছে। যে পাত্রের বায়ু নিষ্কাশন করিতে হইবে তাহার সহিত I নলটি সংযুক্ত করা হয়। B নলটি একটি জলের আধার দ্বারা বেষ্টিত থাকে যাহার দুইটি পার্শ্বনলের একটি দিয়া জল ঢোকে এবং অপরটি দিয়া বাহির হইয়া যায়।

A নল দিয়া প্রবাহিত পারদ বাষ্প যখন দ্রুত নলে প্রবেশ করে তখন পারদের অণুগুলি বাতাসের অণুগুলিকে নিচের দিকে চাপ দিয়া O নল দিয়া বাহির করিয়া দেয়। কিন্তু পারদের অণুগলি শীতল জল প্রবাহের ফলে ঠাণ্ডা হইয়া U প্রান্তে জমা হয় এবং অবশেষে F ফ্লাস্কে ফিরিয়া আসে। বাতাসের অণুগুলি O নল দিয়া বাহির হওয়ার সাথে সাথে B নলের শূন্যস্থান পূরণ করিবার জন্য I নল দিয়া বাতাস প্রবেশ করিবে এবং ইহার ফলে পরীক্ষাধীন পাত্রের বায়ু ক্রমান্বয়ে শোষিত হইবে।



চিত্র 6.3

এই পাম্প দ্বারা প্রায় 10^{-6} হইতে 10^{-8} mm পারদ চাপ পর্যন্ত বায়ুশূন্য করা যায়।

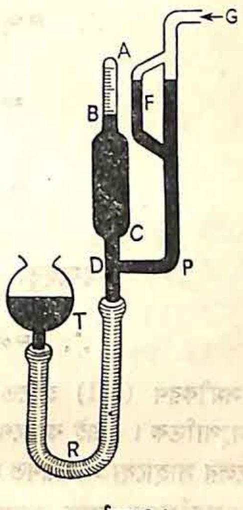
6.4 ম্যাকলিওড গেজ (Mcleod gauge)

ম্যানোমিটার দ্বারা সাধারণত খুব কম মানের চাপ পরিমাপ করা সম্ভব নয়। অতি নিম্ন চাপ পরিমাপের জন্য এই কারণে 1874 খ্রীষ্টাব্দে ম্যাকলিওড এই যন্ত্রের উদ্ভাবন করেন।

চিত্র 6.4 এ ম্যাকলিওড গেজের নকশা দেখানো হইয়াছে। ABCD একটি খাড়া নল যাহার BC অংশ সামান্য মোটা এবং AB মি. মি. তে অংশাঙ্কিত। D বিন্দুতে

একটি পার্শ্ব নল DPG যোগ করা আছে। AB নলের ব্যাসের সমান আর একটি নল F চিত্রে বাহু PG যে যুক্ত আছে। D প্রান্তে একটি রবার নল R আধারে T এর সহিত যোগ করা হয়।

নলের BCD অংশ, রবার নল এবং আধার বিশুদ্ধ পারদ দ্বারা পূর্ণ করা হয়। T কে নামাইয়া এমন জায়গায় রাখা হয় যাহাতে পারদ তল D বিন্দুর নিচে থাকে। এক্ষণে যে পাত্রের গ্যাসের চাপ নির্ণয় করিতে হইবে তাহাকে R নলের সহিত যুক্ত করা হয়। পারদ নামার ফলে গ্যাস R নল দিয়া প্রবেশ করিয়া BC কুণ্ড ও AB নলে অবস্থান করিবে। এইবার T আধারকে উপরের দিকে তুলিলে পারদ BC কুণ্ড অতিক্রম করিয়া AB নলে এবং F নলে প্রবেশ করিবে। F নলে পারদের প্রবেশের ফলে গ্যাস AB নলের কিছুটা অংশে আটকাইয়া পড়িবে। অতঃপর আধার T কে খুব আস্তে আস্তে সরাইয়া এমন জায়গায় আনিতে হইবে যাহাতে F নলে পারদের শীর্ষ A বিন্দুর সহিত সমলেভেলে থাকে।



চিত্র 6.4

গণনা

ধরা যাক, গ্যাসের প্রাথমিক চাপ $= P$

এবং AB নলে গ্যাসের উচ্চতা $= h$

$\therefore$ AB নলে আবদ্ধ গ্যাসের চাপ $= (P + h)$

আবার মনে করি,

AB নল ও BC কুণ্ডের আয়তন $= V$

এবং AB নলে আবদ্ধ গ্যাসের চূড়ান্ত আয়তন $= v$

সুতরাং বয়েলের সূত্র অনুসারে লেখা যাইতে পারে,

$$PV = (P + h)v$$
$$= Pv + hv$$

অথবা, $P(V - v) = hv$

অথবা, $$P = \frac{hv}{V - v}$$

$$= \frac{hv}{V} \quad (\because \; v << V)$$

এক্ষণে, যদি AB নলের প্রস্থচ্ছেদ α ধরা হয় তবে,

$$v = \alpha h$$

$$\therefore \quad P = \frac{h\alpha h}{V}$$

$$= \frac{h^2 \alpha}{V}$$

$$= h^2 \left(\frac{\alpha}{V}\right)$$

যেহেতু, $\frac{\alpha}{V}$ একটি ধ্রুবক

$$\therefore \quad P \propto h^2 \qquad \cdots (6.1)$$

সমীকরণ (6.1) হইতে আমরা দেখিতে পাই যে এক্ষেত্রে চাপ, উচ্চতার বর্গের সমানুপাতিক। এই কারণে ইহার সাহায্যে খুব নিম্ন চাপ পরিমাপ সম্ভব। সূচক স্কেলের সাহায্যে সাধারণত সরাসরি গ্যাসের চাপ পরিমাপ করা যায়।

ম্যাকলিওড গেজ ব্যবহার করিয়া প্রায় 10^{-5} mm পারদ চাপের মত নিম্ন চাপ মাপা যায়।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. একটি ব্যাপন পাম্পের কার্য নীতি ব্যাখ্যা কর। ম্যাকলিওড গেজ কি ? ইহা কিরূপে কাজ করে ব্যাখ্যা কর।

(Explain the principle of action of diffusion pump. What is Mcleod gauge ? Explain how it works.) (C. U. '62)

2. একটি পারদ ব্যাপন পাম্পের বর্ণনা দাও এবং উহার কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যা কর। এইরূপ পাম্পের সাহায্যে কত মাত্রার চাপ সৃষ্টি করা যায় ?

(Describe a mercury diffusion pump and explain its action. What is the order of pressure available with such pumps ?) (C. U. '65)

3. নিম্নচাপ সৃষ্টির জন্য একটি আধুনিক রোটারী অয়েল পাম্পের কার্যপ্রণালী বর্ণনা কর। এই পাম্পের সাহায্যে কত মাত্রার চাপ পাওয়া যাইতে পারে ? এই নিম্নচাপ কিরূপে পরিমাপ করিবে ?

(Describe the working of a modern rotary oil pump for producing low pressures. What is the order of pressure attainable with such pumps ? How would you measure such a low pressure ?) (C. U. '66, '73 ; B. U. '68)

4. নিম্নচাপ সৃষ্টি ও মাপিবার পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কর।

(Give an account of the methods of production and measurement of low pressures.) (C. U. '69)

5. সংক্ষেপে আলোচনা কর :

(a) নিম্নচাপ সৃষ্টি।

(b) নিম্নচাপ মাপন।

(c) ঘূর্ণন পাম্প।

(d) ম্যাকলিওড গেজ।

[Write notes on :

(a) Production of low pressure. (C. U. '75, '78)

(b) Measurement of low pressure. (C. U. '76)

(c) Rotary pump. (C. U. '77)

(d) Mcleod gauge. (C. U. '74)]

সপ্তম পরিচ্ছেদ

একক ও মাত্রা

(Units and Dimensions)

7.1 সূচনা (Introduction)

পরিমাপযোগ্য কোন কিছুকে রাশি বলা হয়—যথা, দৈর্ঘ্য, ভর, ঘনত্ব, সময়, বেগ প্রভৃতি। কোন একটি রাশির পরিমাপ করিতে হইলে তাহার একটি সুবিধাজনক পরিমাণকে নির্দিষ্ট মান (standard) ধরিয়া তাহার সহিত উক্ত রাশিটির তুলনা করা হয়। ঐ নির্দিষ্ট মাপকে পরিমাপের একক (unit) বলে। উদাহরণস্বরূপ, যদি বলি একটি ঘর অনেক উঁচু, তাহা হইলে ঘরটির উচ্চতা সম্বন্ধে কোন ধারণা করা যায় না। কিন্তু যদি বলা হয়, ঘরটি 30 ফুট উঁচু তবে ঘরটির উচ্চতা সম্পর্কে একটি স্পষ্ট ধারণা হয়। এখানে উচ্চতা একটি রাশি এবং ইহার পরিমাপের জন্য ফুটকে একক হিসাবে ব্যবহার করা হইয়াছে।

7.2 এককের বিভিন্ন পদ্ধতি (System of units)

পদার্থ বিজ্ঞানে রাশিসংখ্যা অসংখ্য হইলেও সমস্ত রাশির পরিমাপের জন্য মাত্র তিনটি রাশির একক ঠিক করিয়া লওয়া হয় ; ইহারা হইল (i) দৈর্ঘ্য, (ii) ভর এবং (iii) সময়। ইহাদের একককে মৌলিক বা প্রাথমিক (fundamental) একক বলে, প্রাথমিক একক হইতে ঘটিত অন্যান্য রাশির একককে বলা হয় লব্ধ (derived) একক।

রাশিগুলির পরিমাপের জন্য তিন রকম পদ্ধতির একক ব্যবহার করা হয়—(a) সেণ্টিমিটার-গ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি, (b) ফুট-পাউন্ড-সেকেন্ড পদ্ধতি ও (c) মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি।

(a) **সেণ্টিমিটার-গ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি** (c. g. s. system)

এই পদ্ধতি অনুযায়ী দৈর্ঘ্যের একক সেণ্টিমিটার, ভরের একক গ্রাম এবং সময়ের একক সেকেন্ড।

দৈর্ঘ্যের পরিমাপ : ওজন ও পরিমাপের আন্তর্জাতিক সংস্থার (International Bureau of Weights and Measures) সিদ্ধান্ত অনুযায়ী, পৃথিবীর বিষুবরেখা থেকে উত্তর মেরু পর্যন্ত যদি কোন নির্দিষ্ট দ্রাঘিমা ধরিয়া যাওয়া যায় তখন সেই দূরত্বের একশ কোটি ভাগের এক ভাগকে বলে এক সেণ্টিমিটার।

ভরের পরিমাপ : ফ্রান্সের রাজধানী প্যারিসে রক্ষিত একটি প্লাটিনাম-ইরিডিয়াম স্তম্ভের ওজনের এক হাজার ভাগের এক ভাগকে বলা হয় এক গ্রাম। মোটামুটিভাবে 4°C উষ্ণতায় এক ঘন সেণ্টিমিটার আয়তন জলের ভরকে বলে এক গ্রাম।

সময়ের পরিমাপ : আকাশের মধ্যরেখাকে (Celestial meridian) ঠিক

পরপর দুইবার অতিক্রম করিবার জন্য সূর্যের যে সময় লাগে তাহাকে এক সৌর দিন (solar day) বলে। এক বৎসরের সৌর দিনের যদি গড় লওয়া হয় তবে তাহাকে বলা হয় গড় সৌরদিন, সেকেণ্ড হইল এই গড় সৌর দিনের 86,400 ভাগের এক ভাগ।

(b) **ফুট-পাউণ্ড-সেকেণ্ড পদ্ধতি** (f. p. s. system)

এই পদ্ধতি অনুযায়ী দৈর্ঘ্যের একক ফুট, ভরের একক পাউণ্ড এবং সময়ের একক সেকেণ্ড।

দৈর্ঘ্যের পরিমাপ : লণ্ডনে ওয়েস্টমিনস্টারে রক্ষিত একটি নির্দিষ্ট ব্রোঞ্জ দণ্ডের উপর দুইটি নির্দিষ্ট দাগের ভিতর 62°F উষ্ণতায় যে দূরত্ব, তাহার তিন অংশের এক অংশকে ফুট বলে।

ভরের পরিমাপ : লণ্ডনে রক্ষিত একটি নির্দিষ্ট প্লাটিনাম স্তম্ভের ওজনকে এক পাউণ্ড বলে।

সময়ের পরিমাপ : সি. জি. এস. পদ্ধতির অনুরূপ।

(c) **মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেণ্ড পদ্ধতি** (m. k. s. system)

এই পদ্ধতি অনুযায়ী দৈর্ঘ্যের একক মিটার, ভরের একক কিলোগ্রাম এবং সময়ের একক সেকেণ্ড।

দৈর্ঘ্যের পরিমাপ : 90 ভাগ প্লাটিনাম ও 10 ভাগ ইরিডিয়াম মেশানো 0°C উষ্ণতায় রক্ষিত একটি ধাতুদণ্ডের উপর দুইটি নির্দিষ্ট দাগের ভিতর দূরত্বকে এক মিটার বলে।

ভরের পরিমাপ : প্যারিসে রক্ষিত একটি নির্দিষ্ট প্লাটিনাম-ইরিডিয়াম স্তম্ভের ওজনকে এক কিলোগ্রাম বলে।

সময়ের পরিমাপ : সি. জি. এস. পদ্ধতির অনুরূপ।

7.3 রূপান্তরের তালিকা (Conversion table)

এক পদ্ধতি হইতে অন্য পদ্ধতিতে বিভিন্ন একককে নিম্নলিখিত তালিকার সাহায্যে রূপান্তরিত করা যাইতে পারে।

(a) **দৈর্ঘ্য একক রূপান্তর**

1 সেণ্টিমিটার = 0·3937 ইঞ্চি	1 ইঞ্চি = 2·54 সেণ্টিমিটার
1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি	1 ফুট = 30·479 সেণ্টিমিটার
1 কিলোমিটার = 0·621 মাইল	1 মাইল = 1·609 কিলোমিটার

(b) **ভর একক রূপান্তর**

1 গ্রাম = 0·03528 আউন্স	1 আউন্স = 28·35 গ্রাম
1 কিলোগ্রাম = 2·205 পাউণ্ড	1 পাউণ্ড = 453·6 গ্রাম

7.4 সময় মাপিবার বর্তমান পদ্ধতি (Present method for measure of time)

কোন পরমাণু হইতে যখন কোন নির্দিষ্ট বর্ণের আলোকের উদ্ঘাত হয় তখন ঐ আলোক তরঙ্গের কম্পাঙ্ক যে কোন অবস্থাতেই অপরিবর্তিত থাকে, এই নীতির উপর ভিত্তি করিয়া বর্তমানে সময়ের একক স্থির করা হইয়াছে।

"133 পরমাণু-ভর বিশিষ্ট সিজিয়াম মৌলের একটি নির্দিষ্ট বিকিরণ তরঙ্গের 919 263 1770 সংখ্যক পর্যায়কালের সহিত যুক্ত সময়কালকে এক সেকেন্ড বলে।"

7.5 এস্. আই. একক বা এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি (SI Units* or International system of units)

বিভিন্ন দেশে ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতির এককের প্রচলন আছে। কোথাও সি. জি. এস্. কোথাও এফ্. পি. এস্. আবার কোথাও-বা এম্. কে. এস্. পদ্ধতি। পরিমাপের এই বৈষম্যের জন্য বাস্তব ক্ষেত্রে বেশ অসুবিধা হয়। এই অসুবিধা দূরীকরণের উদ্দেশ্যে বিশ্বের বিভিন্ন অংশের বহু বিজ্ঞানী 1960 খ্রীষ্টাব্দে একটি নূতন এককের প্রচলন করেন। পূর্বে এম. কে. এস্. পদ্ধতির সহিত আরো কয়েকটি প্রমাণ একক যোগ করিয়া এই পদ্ধতি তৈয়ারী করা হয়। ইহাই এস্. আই. পদ্ধতি। আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে ব্যবহৃত বিভিন্ন রাশি, তাহাদের একক ও প্রতীক নিচের তালিকায় দেওয়া হইল।

রাশি	একক	প্রতীক
1. দৈর্ঘ্য	মিটার	m
2. ভর	কিলোগ্রাম	kg
3. সময়	সেকেন্ড	s
4. উষ্ণতা	ডিগ্রী-কেলভিন	°K
5. তড়িৎপ্রবাহ	অ্যাম্পিয়ার	A
6. কোণ	রেডিয়ান	rad
7. দীপনমাত্রা	ক্যাণ্ডেলা	cd
8. পদার্থের পরিমাপ	মোল	mole

এই পদ্ধতিতে বিভিন্ন লব্ধ একক ও উহাদের প্রতীক নিম্নের তালিকায় দেওয়া হইল।

রাশি	একক	প্রতীক	মৌলিক এককে ফর্মুলা
বল	নিউটন	N	$kg\ m\ s^{-2}$
শক্তি	জুল	J	$kg\ m^2\ s^{-2}$

*Système International d'Unités

রাশি	একক	প্রতীক	মৌলিক এককে ফর্মুলা
ক্ষমতা	ওয়াট	W	$kg\ m^2\ s^{-3}$
তড়িতাধান	কুলম্ব	C	$A\ s$
তড়িতরোধ	ওহ্‌ম	Ω	$kg\ m^2\ s^{-3} A^{-2}$
তড়িত বিভব	ভোল্ট	V	$kg\ m^2\ s^{-3} A^{-1}$
কম্পাঙ্ক	হার্জ	Hz	s^{-1}

7.6 মাত্রা (Dimensions)

আমরা পূর্বে বলিয়াছি, প্রাথমিক একক হইতে লব্ধ এককগুলি গঠন করা হয়। স্বভাবতই লব্ধ এককের মান প্রাথমিক এককের উপর নির্ভর করে। দৈর্ঘ্য, ভর ও সময়—এই তিনটি প্রাথমিক একককে যথাক্রমে [L], [M] এবং [T] দ্বারা প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

ক্ষেত্রফল দুইটি দৈর্ঘ্যের গুণফল বলিয়া উহা [L]×[L] বা $[L^2]$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। যেহেতু ইহা ভর বা সময়ের উপর নির্ভরশীল নয় সুতরাং আমরা ক্ষেত্রফলের একককে $M^0L^2T^0$ দ্বারা প্রকাশ করিয়া থাকি।

কোন লব্ধ এককের মাত্রা বলিতে আমরা সেই ঘাত (power) বুঝি। যে ঘাতে দৈর্ঘ্য, ভর ও সময়কে তুলিলে ঐ লব্ধ একক প্রকাশিত হয়। পদার্থবিদ্যায় ব্যবহৃত কয়েকটি রাশির মাত্রা নিম্নে দেওয়া হইল। M, L, T দ্বারা প্রকাশিত রাশিগুলির এই সম্পর্ককে মাত্রিক সমীকরণ (dimensional equation) বলে।

(i) $\text{বেগ} = \frac{\text{দৈর্ঘ্য}}{\text{সময়}} = \frac{[L]}{[T]} = [L\ T^{-1}]$

(ii) $\text{ত্বরণ} = \frac{\text{বেগ}}{\text{সময়}} = \frac{[LT^{-1}]}{[T]} = [L\ T^{-2}]$

(iii) $\text{বল} = \text{ভর} \times \text{ত্বরণ} = [M\ L\ T^{-2}]$

(iv) $\text{ভরবেগ} = \text{ভর} \times \text{বেগ} = [M\ L\ T^{-1}]$

(v) $\text{কার্য} = \text{বল} \times \text{দূরত্ব} = [M\ L\ T^{-2}] \times [L] = [M\ L^2\ T^{-2}]$

(vi) $\text{ক্ষমতা} = \frac{\text{কার্য}}{\text{সময়}} = \frac{[M\ L^2\ T^{-2}]}{[T]} = [M\ L^2\ T^{-3}]$

(vii) $\text{চাপ} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{[M\ L\ T^{-2}]}{[L^2]} = [M\ L^{-1}\ T^{-2}]$

(viii) $\text{ঘনত্ব} = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{[M]}{[L^3]} = [M\ L^{-3}]$

(ix) $\text{আপেক্ষিক গুরুত্ব} = \frac{\text{বস্তুর ওজন}}{\text{সম-আয়তন জলের ওজন}} = \frac{[M]}{[M]} = \text{একটি সংখ্যা}$

(x) পৃষ্ঠ-টান $= \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \frac{[M\ L\ T^{-2}]}{[L]} = [M\ T^{-2}]$

(xi) কম্পাঙ্ক $= \frac{\text{সংখ্যা}}{\text{সময়}} = \frac{1}{[T]} = [T^{-1}]$

(xii) জাড্য বা জড়তা ভ্রামক $=$ ভর $\times$ (দৈর্ঘ্য)$^2 = [M] \times [L^2] = [M\ L^2]$

(xiii) চক্রগতির ব্যাসার্ধ $= \left(\frac{\text{জড়তা ভ্রামক}}{\text{ভর}}\right)^{1/2} = \left[\frac{M\ L^2}{M}\right]^{\frac{1}{2}} = [L]$

(xix) মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (G) $= \frac{\text{বল} \times (\text{দূরত্ব})^2}{(\text{ভর})^2}$

$$= \frac{[M\ L\ T^{-2}][L^2]}{[M^2]} = [M^{-1}\ L^3\ T^{-2}]$$

(xv) ইয়ং গুণাঙ্ক $= \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{\text{বল/ক্ষেত্রফল}}{\text{দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন/প্রাথমিক দৈর্ঘ্য}}$

$$= \frac{[M\ L\ T^{-2}]\ /\ [L^2]}{[L]\ /\ [L]} = [M\ L^{-1}\ T^{-2}]$$

(xvi) পীড়ন $= \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{[M\ L\ T^{-2}]}{[L^2]} = [M\ L^{-1}\ T^{-2}]$

(xvii) সান্দ্রতাঙ্ক $= \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{বেগ}} = \frac{[M\ L\ T^{-2}]}{[L] \times [L\ T^{-1}]} = [M\ L^{-1}\ T^{-1}]$

(xviii) কোণ $= \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{[L]}{[L]} =$ শুদ্ধ সংখ্যা

উপরে আলোচিত মাত্রা সমীকরণের নিম্নলিখিত উপযোগিতা আছে :

(i) বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির মধ্যে সঠিক সম্পর্ক নির্ধারণ করা।

(ii) এক পদ্ধতির একক হইতে অপর পদ্ধতির এককে রূপান্তরিত করা।

(iii) প্রাপ্ত ফলাফল ত্রুটিহীন হইল কিনা তাহা মিলাইয়া দেখা।

প্রসঙ্গত মনে রাখিতে হইবে, মাত্রিক সমীকরণের সাহায্যে মাত্রাবিহীন রাশির মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন কোন ধ্রুবকের মান। আবার, ভৌত কোন রাশির মধ্যে যখন উষ্ণতা বা অন্য কোন রাশি এসে পড়ে তখনও উহাকে মাত্রা সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা অসম্ভব হইয়া পড়ে।

উদাহরণ (Examples)

1. 15 kg বস্তুর উপর একটি বল এক মিনিট ধরিয়া ক্রিয়া করায় 3·6 km/s বেগ উৎপন্ন হইল। ডাইনে ঐ বলের মান নির্ণয় কর।

(If a force acting on a body of 15 kg for 1 minute produces a velocity of 3·6 km/s ; find the force in dynes.) (C. U. '48)

ধরা যাক, ডাইনে বলের মান $= x$

$$\therefore\ x \text{ ডাইন} = 15\ \text{kg} \times \frac{36\ \text{km}}{\text{s}} \times \frac{1}{\text{m}}$$

$$\text{বা, } x\ \text{g cm s}^{-2} = 15 \times 1000\ \text{g} \times \frac{3.6 \times 10^5 \text{cm}}{\text{s}} \times \frac{1}{\text{m}}$$

$$\text{বা, } x = \frac{15 \times 10^3\ \text{g}}{\text{g}} \times \frac{3{\cdot}6 \times 10^5\ \text{cm}}{\text{cm}} \times \frac{\text{s}^2}{\text{s} \times 60\ \text{s}}$$

$$= \frac{15 \times 36 \times 10^8}{6 \times 10^2} = 9 \times 10^7$$

অর্থাৎ ডাইনে ঐ বলের মান, $x = 9 \times 10^7$ dynes।

2. 1 cwt ভরের উপর 1 মিনিট ধরিয়া ক্রিয়া করিয়া যে বল 1 mile/hour বেগ উৎপন্ন করিতে পারে, সেই বলের মান ডাইনে কত হইবে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, 1 foot = 30 5 cm ; 1 lb = 453 gram।

(Find the force in dynes which acting on a mass of 1 cwt for 1 minute produces a velocity of 1 mile/hour. Given 1 foot = 30·5 cm, 1 lb = 453 gram.) (C. U. '52)

ধরা যাক, ডাইনে বলের মান $= x$

$$\therefore\ x \text{ ডাইন} = 1\ \text{cwt} \times \frac{1\ \text{mile}}{\text{hour}} \times \frac{1}{\text{m}}$$

$$\text{বা, } x\ \text{g cm s}^{-2} = 112\ \text{lb} \times \frac{1760 \times 3 \times 30{\cdot}5\ \text{cm}}{60 \times 60\ \text{s}} \times \frac{1}{60\ \text{s}}$$

$$\text{বা, } x = \frac{112\ \text{lb}}{\text{g}} \times \frac{1760 \times 3 \times 30{\cdot}5\ \text{cm}}{\text{cm}} \times \frac{\text{s}^2}{60 \times 60 \times 60\ \text{s}^2}$$

$$= \frac{112 \times 453\ \text{g}}{\text{g}} \times 1760 \times 3 \times 30{\cdot}5 \times \frac{1}{60 \times 60 \times 60}$$

$$= \frac{112 \times 453 \times 1760 \times 3 \times 30{\cdot}5}{60 \times 60 \times 60} = 3{\cdot}78 \times 10^4 \text{ dynes।}$$

অর্থাৎ, ডাইনে ঐ বলের মান, $x = 3{\cdot}78 \times 10^4$ dynes।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে কোন প্রাকৃতিক রাশির মাত্রা বলিতে কি বোঝ ? দুইটি দৃষ্টান্ত দ্বারা তোমার উত্তর ব্যাখ্যা কর।

(What do you understand by the dimensions of a physical quantity in terms of length, mass and time? Illustrate your answer by two examples.) [C. U. '52]

2. নিম্নলিখিত রাশিগুলির মাত্রা সূত্র নির্ণয় কর :

(a) জড়তা ভ্রামক, (b) ইয়ং গুণাঙ্ক, (c) পৃষ্ঠ-টান, (d) সান্দ্রতাঙ্ক।

(Find the dimensional formulae for : (a) moment of inertia [C. U. '61], (b) Young's modulus [C. U. '50], (d) surface tension, (d) coefficient of viscosity [C. U. '62, '64].)

3. কোন প্রাকৃতিক রাশির মাত্রা বলিতে তুমি কি বোঝ ? মাত্রা সমীকরণ কি ? মাত্রা সমীকরণের উপযোগিতা কি ? উহাদের সীমাশর্ত উল্লেখ কর।

(What do you mean by the dimension of a physical quantity ? What are dimensional equations ? Where are the uses of the dimensional equations ? State their limitations.)

4. 15 kg ভরের উপর 1 minute ধরিয়া ক্রিয়া করায় যে বল 4·6 km/s বেগ উৎপন্ন করিতে পারে ডাইনে তাহার মান নর্ণয় কর।

(A force acting on a mass of 15 kg for 1 minute produces a velocity of 4·6 km/s, find its value in dynes.) (C. U. '48)

[Ans. $11{\cdot}5 \times 10^6$ dynes]

5. যদি ডাইনের পরিবর্তে দুইটি 1 গ্রাম ভর যখন 1 সে.মি. দূরে থাকে তখন তাহাদের মধ্যে ক্রিয়াশীল মহাকর্ষ বলকে একক বল হিসাবে ধরা হয়, তাহা হইলে $P = mf$ সমীকরণটি পরিবর্তিত হইয়া কি রকম হইবে ?

(If instead of the dyne, the unit force is defined as the gravitational force between two particles each of mass 1 gram placed 1 cm apart. What will be the new form of the equation $P = mf$?)

[C. U. (Hons.) '77]

[Ans. $P = g.mf$]

6. CGS পদ্ধতিতে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান $6{\cdot}66 \times 10^{-8}$; FPS পদ্ধতিতে উহার মান কত হইবে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, 1 foot = 30·48 cm এবং 1 lb = 453·6 g.

(The value of the gravitational constant in CGS system is $6{\cdot}68 \times 10^{-8}$. Determine its value in FPS system. Given 1 foot = 30·48 cm ; 1lb = 453·6 g.)

[Ans. $1{\cdot}067 \times 10^{-9}$ FPS units]

7. এক পাউন্ডাল কত ডাইনের সমান তাহা মাত্রিক উপায়ে বাহির কর।

(Find by the method of dimensions, the value of 1 poundal in dynes.)

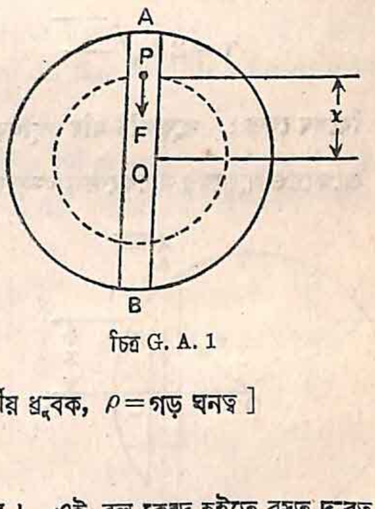
[Ans. $1{\cdot}382 \times 10^4$ dynes]

পরিশিষ্ট

G. A. 1 পৃথিবীর মধ্য দিয়া অতিক্রান্ত সুড়ঙ্গে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি (Motion of a body dropped in a tunnel bored through the earth)

পৃথিবীর এক পৃষ্ঠ হইতে অপর পৃষ্ঠে একটি সুড়ঙ্গ কাটিয়া যদি কোন বস্তুকে ঐ সুড়ঙ্গে নিক্ষেপ করা হয় তবে বস্তুটি সুড়ঙ্গ পথে সরল দোলগতিতে পৃথিবীর এক প্রান্ত হইতে অপর প্রান্তে চলাচল করিতে থাকিবে।

ধরা যাক্, AB সুড়ঙ্গটি পৃথিবীর কেন্দ্র O দিয়া অতিক্রান্ত (চিত্র G. A. 1) এবং উহাতে m ভরের একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হইয়াছে। মনে করি, কোন এক সময়ে বস্তুটি কেন্দ্র হইতে x দূরত্বে P অবস্থানে পৌঁছাইল। এই অবস্থানে বস্তুর উপর কেবল x ব্যাসার্ধের গোলকটিই আকর্ষণ-বল প্রয়োগ করিবে, কারণ গোলকের বাহিরের অংশের আকর্ষণ-বল শূন্য। অর্থাৎ, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বল,



চিত্র G. A. 1

$$F = G \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho m}{x^2} \quad [\text{ যেখানে } G = \text{মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, } \rho = \text{গড় ঘনত্ব }]$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi G \rho m x$$

উক্ত বল পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করিবে। এই বল কেন্দ্র হইতে বস্তু দূরত্ব x-এর সমানুপাতিক। অতএব, বস্তুর গতীয় সমীকরণকে লেখা যায়,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\tfrac{4}{3}\pi G \rho m x \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

সমীকরণ (i)-এ ঋণাত্মক চিহ্ন বুঝাইতেছে যে, যে অভিমুখে x বৃদ্ধি পাইতেছে বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল বলের অভিমুখ তাহার বিপরীত দিকে।

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\tfrac{4}{3}\pi G \rho x$$

$$= -\omega^2 x \quad [\ \omega^2 = \tfrac{4}{3}\pi G \rho\ ]$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

ইহা সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ।

ইহার দোলনকাল, $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}}=2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$ ... (iii)

আবার আমরা জানি, M পৃথিবীর ভর ও R ব্যাসার্ধ হইলে,

$$g=\frac{GM}{R^2}$$

$$=G\,.\,\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2}$$

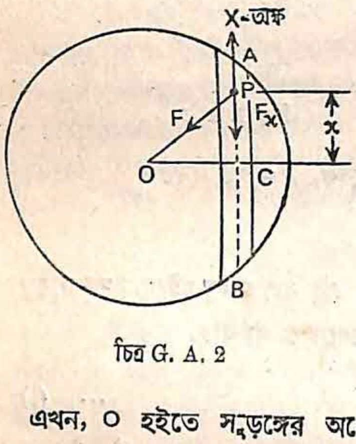
বা, $\frac{3}{4G\pi\rho}=\frac{R}{g}$ ... (iv)

(iii) ও (iv) হইতে পাই,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \text{... (v)}$$

বিশেষ ক্ষেত্র : সুড়ঙ্গটি যদি পৃথিবীর ব্যাস বরাবর অতিক্রম না করে

এক্ষেত্রেও সুড়ঙ্গের মুখে কোন বস্তুকে নিক্ষেপ করিলে উহা সরল দোলগতি সম্পাদন করিবে। চিত্র G. A. 2 অনুযায়ী ধরি AB সুড়ঙ্গ এবং O পৃথিবীর কেন্দ্র; কোন এক মুহূর্তে বস্তুটি P-তে অবস্থিত। এই অবস্থায় বস্তুটির উপর কেবল OP ব্যাসার্ধের গোলকটির অভিকর্ষ বল কার্য করিবে। বস্তুটির ভর m হইলে উহার উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রাভিমুখী বল,



চিত্র G. A. 2

$$F=G\,.\,\frac{\frac{4}{3}\pi\rho m\,.\,OP^3}{OP^2}$$

$$=G\,.\,\frac{4}{3}\,\pi\rho m\,.\,OP$$

এখন, O হইতে সুড়ঙ্গের অক্ষের উপর OC লম্ব টানিলাম। ধরি, AB রেখা X-অক্ষ বরাবর। AB রেখার অভিমুখে F বলের উপাংশ,

$$F_x=F\cos\angle OPC$$

$$=G\,.\,\tfrac{4}{3}\pi\rho m\,.\,OP\cos\angle OPC$$

$$=G\,.\,\tfrac{4}{3}\pi\rho m\,.\,PC$$

$$=G\,.\,\tfrac{4}{3}\pi\rho m\,.\,x \qquad (\text{যেখানে } PC=x)$$

F-এর অপর সমকৌণিক উপাংশ AB রেখার সহিত অভিলম্বভাবে ক্রিয়া করিবে। যেহেতু সুড়ঙ্গটি মসৃণ, কাজেই F-এর এই উপাংশ AB রেখা বরাবর বস্তুকণার গতিকে

প্রভাবিত করিতে অক্ষম, সুতরাং m ভরের বস্তুটির সুড়ঙ্গ বরাবর গতীয় সমীকরণ হইল,

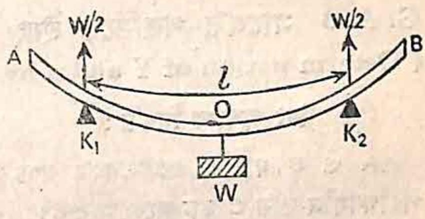
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -G.\tfrac{4}{3}\pi\rho.m.x$$

$$\text{বা,}\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

$$\text{এবং দোলনকাল}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

G. A. 2 মধ্যস্থলে বিলম্বিত ভারের দরুন বীমের অবনমন ; ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় (Depression of a beam loaded in the middle ; Determination of Young's modulus)

মনে করি, AB একটি বীম যাহার দুই প্রান্ত দুইটি ক্ষুরধার k_1 ও k_2 এর উপর স্থাপিত এবং উহার মধ্যবিন্দু O হইতে একটি ভার W চাপানো হইয়াছে (চিত্র G. A. 3)। এক্ষেত্রে দুইটি ক্ষুরধারের উপরই সমান প্রতিক্রিয়া বল $\frac{W}{2}$-এর উদ্ভব হইবে এবং এই বল দুইটি দণ্ডের উপর ঊর্ধ্বমুখী ক্রিয়া করিবে।



চিত্র G. A. 3

যেহেতু, বীমটির মধ্যস্থল প্রায় অনুভূমিক সেই কারণে সমগ্র বীমটিকে দুইটি উল্টানো ক্যান্টিলিভারের তুল্য ধরা যাইতে পারে। বীমটির দৈর্ঘ্য l ধরিলে, উক্ত ক্যান্টিলিভারদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হইবে $\frac{l}{2}$। A ও B বিন্দুর সাপেক্ষে O বিন্দুর অবনমন y ধরিলে,

$$y=\frac{\frac{W}{2}\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3YAK^2}$$

$$=\frac{Wl^3}{48\ YAK^2}$$

$$=\frac{Wl^3}{48\ YI} \qquad \cdots \quad (i)$$

দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদ আয়তাকার হইলে,

$$I=\frac{bd^3}{12}$$ (যেখানে b = দণ্ডের প্রস্থ এবং d = বেধ)

$$\therefore \quad y=\frac{Wl^3}{48Y} \cdot \frac{12}{bd^3}$$

$$=\frac{Wl^3}{4Ybd^3} \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

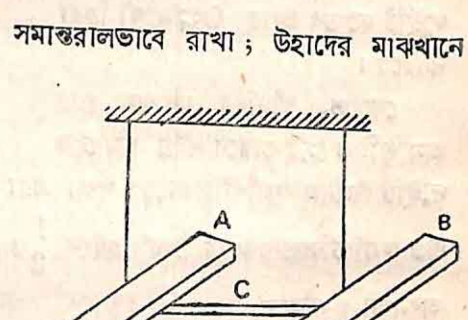
সমীকরণ (i) বা (ii) হইতে দণ্ডের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y নির্ণয় করা যায়।

পরীক্ষা পদ্ধতি : দণ্ডটির দুই প্রান্ত দুইটি ক্ষুরধারের উপর রাখিয়া ঠিক মধ্যস্থলে ক্রমিক পর্যায়ে বাটখারা চাপাইয়া যাইতে হইবে এবং একটি অণুবীক্ষণের সাহায্যে প্রতিবার মধ্যবিন্দুর অবনমন মাপিতে হইবে। এইবার ক্রমিক পর্যায়ে বাটখারা তুলিয়া পুনরায় আগের মত পাঠ লইয়া যে কোন ভারের জন্য গড় অবনমন নির্ণয় করা যায়। স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে দণ্ডের প্রস্থ ও বেধ এবং একটি স্কেলের সাহায্যে দণ্ডের দৈর্ঘ্য মাপা হয়। অতঃপর উপরোক্ত সমীকরণের সাহায্যে উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y নির্ণয় করা যাইবে।

G. A. 3 সার্লের পদ্ধতিতে ইয়ং গুণাঙ্ক (Y) ও কৃন্তন গুণাঙ্ক (n) নির্ণয় (Determination of Y and n by Searle's method)

(a) **ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় :**

A ও B দুইটি একই রকম দণ্ড সমান্তরালভাবে রাখা ; উহাদের মাঝখানে পরীক্ষাধীন তার C দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ। তার সমেত দণ্ডদ্বয়কে দুইগাছা সুতার সাহায্যে অনুভূমিক তলে ঝুলানো আছে (চিত্র G. A. 4)। সাম্যাবস্থায় পরীক্ষাধীন তার C সোজা এবং A ও B দণ্ড দুইটি ঐ তারের সহিত লম্বভাবে অবস্থিত।



চিত্র G. A. 4

A ও B তারের যুগ্ম দোলনের সময় C তারে সমান বাহ্য টর্ক ক্রিয়া করে বলিয়া C একটি বৃত্তচাপে পরিণত হয়। মনে করি, কোন এক সময়ে এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং A ও B দণ্ডের মধ্যবর্তী কোণ 2θ। অতএব, C-তারের দৈর্ঘ্য,

$$l = R.\, 2\theta \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

এই সময়ে C-তারের বক্রনজনিত দ্বন্দ্ব

$$\gamma = \frac{YAK^2}{R}$$

$$= \frac{2YAK^2\theta}{l} \text{ [সমীকরণ (i) থেকে]} \quad \cdots \quad (ii)$$

তারের সাপেক্ষে যে কোন দণ্ডের জড়তা ভ্রামক I ধরিলে গতীয় সমীকরণকে লেখা যায়,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2YAK^2}{l}\theta$$

$$\text{বা, } \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2YAK^2}{lI}\theta = 0 \quad \cdots \quad (iii)$$

সমীকরণ (iii) সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ।

ইহার দোলনকাল, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{2YAK^2}}$ ... (iv)

যদি C-তারের ব্যাসার্ধ r ধরা হয় তবে,

জ্যামিতিক জাড্য ভ্রামক, $AK^2 = \frac{\pi r^4}{4}$ ... (v)

সমীকরণ (iv) ও (v) থেকে পাই

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2Il}{\pi Y r^4}}$$

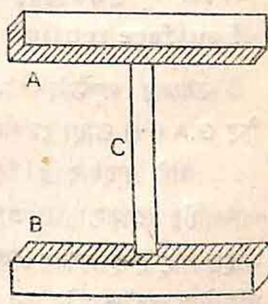
$$\text{বা, } \quad T_1^2 = \frac{8\pi Il}{Yr^4} \quad \cdots \quad (vi)$$

$$\text{বা, } \quad Y = \frac{8\pi Il}{T_1^2 r^4} \quad \cdots \quad (vii)$$

ডানদিকের সবগুলি রাশি জানা থাকিলে সমীকরণ (vii) এর সাহায্যে ইয়ং গুণাঙ্ক Y নির্ণয় করা যাইবে।

(b) **কৃন্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় :**

দণ্ড A ও B হইতে সুতা দুইটি খুলিয়া উহাদের যে কোন একটিকে অনুভূমিক রাখিয়া অন্যটিকে C-তারের সাহায্যে ঝুলান হইল (চিত্র G. A. 5)। এইবার নিচের দণ্ডটিকে একটু ঘুরাইয়া C-তারে মোচড় সৃষ্টি করিয়া ছাড়িয়া দিলে দণ্ডটি তারের অক্ষের উপর ব্যাবর্তন দোলনে দুলিবে, এই দোলনের দোলনকাল মাপা হইল।



চিত্র G. A. 5

তারের মোচড়ীয় দৃঢ়তা $\frac{n\pi r^4}{2l}$ হইলে ব্যাবর্তন দোলনের সমীকরণ হইবে,

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{n\,\pi r^4}{2l}\,\theta$$

বা, $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{n\pi r^4}{2lI}\,\theta=0 \qquad \cdots \text{(viii)}$$

উক্ত দোলনের দোলনকাল, $T_2=2\pi\sqrt{\frac{2lI}{n\pi r^4}}$

বা, $$T_2^2=\frac{8\pi lI}{nr^4} \qquad \cdots \text{(ix)}$$

বা, $$n=\frac{8\pi I}{T_2^2 r^4} \qquad \cdots \text{(x)}$$

সমীকরণ (x) হইতে কৃন্তন গুণাঙ্ক n নির্ণয় করা যায়।

আবার সমীকরণ (vi) ও (ix) হইতে পাই,

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2=\frac{n}{y} \qquad \cdots \text{(xi)}$$

কিন্তু আমরা জানি,

$$\frac{y}{n}=2(1+\sigma)$$

বা, $$\sigma=\frac{y}{2n}-1$$

$$=\frac{T_2^2}{2T_1^2}-1 \qquad \cdots \text{(xii)} \quad [\text{ সমীকরণ (xi) হইতে }]$$

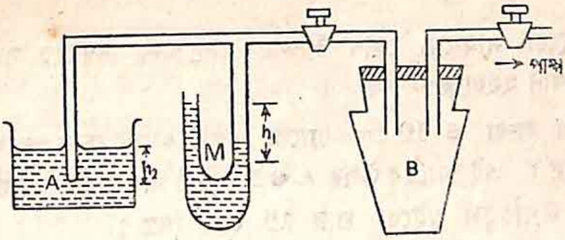
অতএব সমীকরণ (xii)-এর সাহায্যে পোয়াসঁর অনুপাত σ নির্ণয় করা যায়।

G. A. 4 জেগারের পদ্ধতিতে তরলের পৃষ্ঠটান নির্ণয় (Determination of surface tension of a liquid by Jaeger's method)

তরলের পৃষ্ঠটান নির্ণয়ের জন্য জেগার যে পরীক্ষা ব্যবস্থাটি প্রবর্তন করেন চিত্র G.A.6-এ তাহা দেখান হইয়াছে।

একটি বৃহদাকার আধার B-এর সহিত একটি বায়ু-সংনমক পাম্প যুক্ত আছে। পাম্পটির সহায়তায় B-আধারে নির্দিষ্ট হারে বায়ু প্রবেশ করান হয়। এই আধারের সহিত সরু প্রস্থচ্ছেদের একটি বাঁকানো নল যুক্ত থাকে। এই নলের একপ্রান্ত সমকোণে বাঁকাইয়া পরীক্ষাধীন তরলে প্রবেশ করানো থাকে। নলটির সহিত একটি স্টপ-কক্ C ও একটি ম্যানোমিটার M আটকানো হয়।

প্রথমে C স্টপ-কক্‌টি খুলিয়া সংনমন-পাম্প চালু করা হয়। ফলে B-আধার হইতে বায়ু বাঁকানো নলে প্রবেশ করে এবং তরলে নিমজ্জিত প্রান্তে বায়ু বুদ্‌বুদের



চিত্র G. A. 6

সৃষ্টি হয়। যখন বুদ্‌বুদ্‌ গঠিত হয় তখন নলের বায়ুচাপ ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায় এবং ম্যানোমিটারের দুই বাহুতে তরল-তলের পার্থক্য বাড়িতে থাকে। অবশেষে বুদ্‌বুদ্‌টি নলের মুখ হইতে আলাদা হইয়া যায়। এই সময়ে ম্যানোমিটার পাঠের অকস্মাৎ পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায়।

মূলতত্ত্ব : কোন তরলে যদি r ব্যাসার্ধের বুদ্‌বুদ্‌ গঠিত হয় তবে উহার ভিতরের অতিরিক্ত চাপ

$$P=\frac{2T}{r}\ (T=\text{পৃষ্ঠটান})$$

ম্যানোমিটারে দুই বাহুর তরল-তলের সর্বোচ্চ তফাৎ G_1 ও উক্ত তলের ঘনত্ব ρ_1 ধরিলে আমরা লিখিতে পারি,

$$h_1\rho_1 g=h_2\rho_2 g+\frac{2T}{r}$$

যেখানে,

h_2 = পরীক্ষাধীন তরলে নিমজ্জিত নলের খোলা মুখের গভীরতা

ρ_2 = পরীক্ষাধীন তরলের ঘনত্ব

$$\text{বা,}\quad \frac{2T}{r}=g(h_1\rho_1-h_2\rho_2)$$

$$\therefore\quad T=\frac{rg}{2}(h_1\rho_1-h_2\rho_2) \qquad \cdots \quad (i)$$

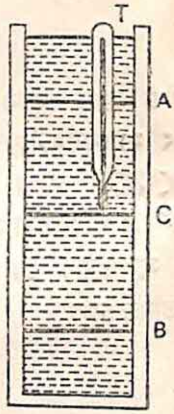
মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে নলের ব্যাসার্ধ r পরিমাপ করিয়া সমীকরণ (i) হইতে পৃষ্ঠটান T নির্ণয় করা যায়।

সুবিধা : এই পদ্ধতিতে তরলের পৃষ্ঠটান নির্ণয়ে স্পর্শকোণের মান জানিবার প্রয়োজন হয় না। কোন তরলের পৃষ্ঠটান উষ্ণতার সহিত কিরূপে পরিবর্তিত হয় তাহা নির্ণয় করা যায়। ইহা ছাড়া, এই পদ্ধতির সাহায্যে গলন্ত ধাতব পদার্থের পৃষ্ঠটান পরিমাপ করা সম্ভব।

G. A. 5 স্টোকসের সূত্রের সাহায্যে তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় (Determination of coefficient of viscosity of a liquid with Stokes' law)

স্টোকসের সূত্রের সাহায্যে কোন তরলের সান্দ্রতাংক নির্ণয়ের পরীক্ষা ব্যবস্থা চিত্র G.A.7-এ দেখান হইয়াছে।

প্রায় 1 মিটার লম্বা ও 10 cm ব্যাসের একটি কাচের চোঙ পরীক্ষাধীন তরল দ্বারা পূর্ণ করা হয়। এই চোঙের উপর A ও B দুইটি দাগ কাটা আছে। উপরের দাগ A তরলের উপরিতল হইতে প্রায় 15 cm নিচে; অনুরূপে নিচের দাগ B তরলের নিম্নতল থেকে প্রায় 15 cm উপরে রাখা হয়। পরীক্ষার জন্য পতনশীল বস্তু হিসাবে যে গোলক ব্যবহার করা হয় তাহার ব্যাসার্ধ 1 mm অপেক্ষা সামান্য কম হওয়া উচিত।



চিত্র G. A. 7

গোলকটিকে পরীক্ষাধীন তরলে সিক্ত করিয়া খুব আস্তে তরলের উপরতলে ফেলা হয়। গোলকটি তরলের মধ্যে শীঘ্রই সীমান্ত বেগ লাভ করে। গোলকটি A দাগে পেঁছাইবার পূর্বে সীমান্ত বেগ লাভ করিয়াছে কিনা তাহা দেখিবার জন্য A ও B দাগের মধ্যস্থলে C দেওয়া হইল যাহাতে AC=CB হয়। যদি AC ও CB পথ যাইতে গোলকটি একই সময় লয় তবে বুঝিতে হইবে যে উহা A দাগে পেঁছাইবার পূর্বে সীমান্ত বেগ পাইয়াছে।

তরলের সান্দ্রতাংক উষ্ণতার উপর নির্ভর করে বলিয়া পরীক্ষাকালে তরলের উষ্ণতা থার্মোমিটার T-এর সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

মূলতত্ত্ব : পতনশীল গোলক যখন নিচে নামিতে থাকে তখন ইহার উপর ক্রিয়াশীল গতিবিরোধী সান্দ্রতা বল F-এর সহিত ব্যাসার্ধ r, সান্দ্রতাংক η এবং বেগ v-এর সম্পর্ক ঘাত বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক্‌,

$F = Ka^x\eta^y v^z$ (K একটি ঘাতবিহীন সংখ্যা)

এখন, F-এর ঘাত $= MLT^{-2}$ ... (i)

a-এর ঘাত $= L$

η-এর ঘাত $= ML^{-1}T^{-1}$

v-এর ঘাত $= LT^{-1}$

অতএব, সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$MLT^{-2} = L^x(ML^{-1}T^{-1})^y(2T^{-1})^z$$

উভয় পক্ষের M, L এবং T এর ঘাত পৃথকভাবে সমান হইবে।

M-এর ঘাত হইতে পাই, $y=1$ ... (ii)

L-এর ঘাত হইতে পাই, $x-y+z=1$ ... (iii)

T-এর ঘাত হইতে পাই, $-y-z=-2$ ... (iv)

সমীকরণ (ii), (iii) ও (iv) সমাধান করিয়া পাই,

$x=1$, $y=1$ এবং $z=1$

সুতরাং সমীকরণ (i)-কে লেখা যায়,

$$F=K\eta av$$

স্টোক্‌স্‌ তত্ত্বগতভাবে প্রমাণ করেন যে, তরল সীমাহীন হইলে এবং গতি শান্ত হইলে, $K=6\pi$

$$\therefore \quad F=6\pi\eta av \qquad \dots \text{(v)}$$

এখন মনে করি, a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং ρ ঘনত্বের কোন বস্তুকে σ ঘনত্বের কোন সান্দ্র তরলের মধ্য দিয়া ফেলা হইল। $\rho>\sigma$ হইলে বস্তুর উপর নিম্নাভিমুখী বল

= বস্তুর ওজন − তরলের প্লাবতা

$$=\tfrac{4}{3}\pi a^3\rho g-\tfrac{4}{3}\pi a^3\sigma g$$

$$=\tfrac{4}{3}\pi a^3\,(\rho-\sigma)g$$

বস্তুটি এই বলের প্রভাবে ত্বরণ লইয়া নিচে নামিতে থাকিবে। বস্তুর বেগ সীমান্ত বেগের সমান হইলে লেখা যায়,

$$6\pi\eta av=\tfrac{4}{3}\pi a^3\,(\rho-\sigma)\,g$$

বা, $$\eta=\frac{2}{9}\,\frac{a^2\,(\rho-\sigma)}{v}\cdot g \qquad \dots \text{(vi)}$$

গোলকটি A হইতে B পর্যন্ত আসিতে t সময় লইলে এবং $AB=h$ হইলে সীমান্ত বেগ $v=\dfrac{h}{t}$ পাওয়া যাইবে। মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে গোলকের ব্যাসার্ধ a পরিমাপ করিয়া সমীকরণ (vi) হইতে η নির্ণয় করা যাইবে।

হ্রস্বোত্তর প্রশ্নাবলী

বলবিদ্যা ও জড়তা ভ্রামক সংক্রান্ত

Q. 1. রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর কেন?

Q. 2. 'রৈখিক গতিতে ভরের যে ভূমিকা আবর্তনগতিতে জড়তা ভ্রামকের ভূমিকা তাই'—ব্যাখ্যা কর।

Q. 3. ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ বলিতে কি বুঝ? কি অবস্থার উপর ইহা নির্ভর করে?

Q. 4. একই ভর ও বেধের দুইটি গোল চাকতির পদার্থের ঘনত্ব পৃথক। কেন্দ্রীয় অক্ষ বেষ্টন করিয়া কোন্ চাকতির জড়তা ভ্রামক অধিক হইবে ?

Q. 5. কোন সমতল গোল চাকতির ঘূর্ণন-অক্ষ ব্যাস বরাবরের পরিবর্তে স্পর্শক বরাবর লইলে ঘূর্ণন ব্যাসার্ধের কি পরিবর্তন হইবে ?

Q. 6. একই ভর ও ব্যাসার্ধের দুইটি গোলকের একটি ফাঁপা ও অন্যটি নিরেট। কি উপায়ে উহাদের সনাক্ত করা যাইবে ?

Q. 7. সুষম গোল চাকতির যে কোন ব্যাসের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামকের সহিত ঐ চাকতির কোন সমতলীয় স্পর্শকের সাপেক্ষে জড়তা ভ্রামকের তুলনা কর।

মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ সংক্রান্ত

Q. 8. বিভিন্ন পদ্ধতিতে G-এর মান কত ?

Q. 9. মহাকর্ষ ধ্রুবককে সার্বিক ধ্রুবক বলে কেন ?

Q. 10. ভূপৃষ্ঠের উপর h উচ্চতায় অভিকর্ষ ক্ষেত্রের তীব্রতা অপেক্ষা h গভীরতায় তীব্রতা বেশী কি কম ?

Q. 11. অসীম দূরত্ব হইতে মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে একক ভরের কোন বস্তুকে আনিবার জন্য সম্পাদিত কার্য ঋণাত্মক কেন ?

Q. 12. কোন ব্যক্তি রকেটে যদি ভূপৃষ্ঠ থেকে উপরে উঠিতে থাকে তবে তাহার অবস্থানে পৃথিবীর জন্য বিভবের মান বৃদ্ধি কি হ্রাস পাইবে ?

Q. 13. পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভবের মান ঐ বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। ব্যাখ্যা কর।

Q. 14. পৃথিবীর এক পৃষ্ঠ থেকে অপর পৃষ্ঠ পর্যন্ত ঘর্ষণহীন সুড়ঙ্গ পথ কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অতিক্রম না করিয়া ইহার পার্শ্ব দিয়া গেলে ইহার মধ্যে কোন গতির প্রকৃতি কিরূপ হইবে ?

Q. 15. একই উচ্চতায় দুইটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চতুর্দিকে বেষ্টনরত। যদি একটির ভর অপরটির দ্বিগুণ হয় তবে উহাদের বেগ কিরূপ হইবে ?

Q. 16. কোন গ্রহ হইতে কোন কণার মুক্তি বেগ ঐ কণার ভরের উপর নির্ভরশীল কি ?

Q. 17. মুক্তি বেগ চন্দ্র অপেক্ষা পৃথিবীতে অধিক কেন ?

Q. 18. মুক্তি বেগের সহিত ভূপৃষ্ঠের অনতি উচ্চে আবর্তনরত কৃত্রিম উপগ্রহের বেগের তুলনা কর।

Q. 19. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ ও ভর 80 গুণ ধরিয়া পৃথিবী ও চন্দ্র পৃষ্ঠে কোন বস্তুর ওজনের তুলনা কর।

Q. 20. অপেক্ষাকৃত হাল্কা গ্যাসীয় মৌল, যথা হাইড্রোজেন, হিলিয়াম ইত্যাদির পরিমাণ পৃথিবীর বায়ুমণ্ডলে খুব কম কেন ?

স্থিতিস্থাপকতা সংক্রান্ত

Q. 21. রাবার ও ইস্পাতের মধ্যে কোন্‌টি বেশী স্থিতিস্থাপক এবং কেন ?

Q. 22. পোয়াসঁর অনুপাতের সীমা মান কত ?

Q. 23. কৃন্তন কোণ ও মোচড় কোণের মধ্যে তফাৎ কি ?

Q. 24. বৃত্তাকার বড় প্রস্থচ্ছেদের তারের মোচড় বিকৃতির জন্য অধিক পরিমাণ টর্কের প্রয়োজন কি ?

Q. 25. কোন দণ্ডের বংকন ঘটিলে উহার নিরপেক্ষ তলের কি অবস্থা হয় ?

Q. 26. কোন সমসত্ত্ব পদার্থের ঘনকের আয়তন বিকৃতি ইহার অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতির ও গুণ বুঝাইয়া দাও।

Q. 27. 'কোন বস্তুর ইয়ং গুণাঙ্ক এবং পোয়াসঁর অনুপাত জানা থাকিলে আয়তন গুণাঙ্ক ও দৃঢ়তা গুণাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।' —ইহা কিরূপে সম্ভব ?

পৃষ্ঠটান সংক্রান্ত

Q. 28. দূরত্বের কত পাল্লা পর্যন্ত সংসক্তি বা আসঞ্জন বল অর্থাৎ আণবিক বল কার্যকর থাকে ? এই পাল্লার অন্তর্গত অণুগুলি কি বলের ব্যস্ত বর্গ-সূত্র অনুসরণ করে ?

Q. 29. তরল পৃষ্ঠ হইতে কত গভীরতার মধ্যে বর্তমান অণুগুলির দরুন পৃষ্ঠটানের সৃষ্টি হয় এবং কিরূপে হয় বুঝাইয়া দাও।

Q. 30. স্পর্শকোণ সৃষ্টির মূল কারণ কি ?

Q. 31. স্পর্শকোণ কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর নির্ভর করে ?

Q. 32. পারদ আঙ্গুলে লাগে না কিন্তু জল আঙ্গুলে লাগিয়া থাকে কেন ?

Q. 33. ক্ষুদ্র স্পর্শকোণের তরল ও স্থূল স্পর্শকোণের তরলের মধ্যে আচরণের পার্থক্য কি ?

Q. 34. কাচের পাতের উপর জল ছড়াইয়া পড়ে কিন্তু পারদ পড়ে না কেন ?

Q. 35. জলের একটি ক্ষুদ্র ফোঁটা বায়ুতে গোলাকৃতি হয় কেন ?

Q. 36. জলের একটি ফোঁটা যদি অনেকগুলি ক্ষুদ্র গোলাকৃতি জলবিন্দুতে ভাঙ্গিয়া যায় তবে পৃষ্ঠশক্তি কি বৃদ্ধি পাইবে ?

Q. 37. ঘরের মেঝেতে সামান্য পারদ পড়িলে ইহা ভাঙ্গিয়া বহুসংখ্যক গোলীয় বিন্দুতে পরিণত হয় কেন ?

Q. 38. তড়িতাহিত হইলে পৃষ্ঠটান কমে কেন ?

Q. 39. সমুদ্রের উত্তাল তরঙ্গকে শান্ত করিতে প্রাচীনকালে তেল ঢালিত কেন ?

Q. 40. সাবান জলের একটি ছোট বুদ্‌বুদের ভিতরের অতিরিক্ত চাপ বড় বুদ্‌বুদের ভিতরের অতিরিক্ত চাপের বেশী কি ?

Q. 41. কৈশিক নলে জলের তল অবতল কিন্তু পারদের তল উত্তল কেন ?

Q. 42. সরু কাচের নলে পারদ ঢুকানো কষ্টকর কেন ?

Q. 43. কোন কৈশিক নলে জল h উচ্চতা পর্যন্ত উঠে। নলটিকে $h/2$-তে ভাঙ্গিয়া ছোট করিলে জল নলের মাথায় উঠিয়া ফোয়ারার মত পড়িবে কি ? ব্যাখ্যা কর।

Q. 44. দুইটি কৈশিক নলের এক প্রান্ত তরলে নিমজ্জিত আছে। একটি নলের ব্যাসার্ধ অপরটির দ্বিগুণ হইলে নল দুইটিতে তরল স্তম্ভের উচ্চতার অনুপাত কত হইবে ?

সান্দ্রতা সংক্রান্ত

Q. 45. রেনল্ডের সংখ্যা কি ? ইহার তাৎপর্য কি ?

Q. 46. কোন তরলের গতি শান্ত বা বিক্ষুব্ধ তাহা কিরূপে বোঝা যাইবে ?

Q. 47. ক্রান্তিক বেগ ও প্রান্তিক বেগ কোন্ কোন্ রাশির উপর নির্ভর করে ?

Q. 48. দুইটি সরু নলের ব্যাসার্ধের অনুপাত $2:1$ ও দুই প্রান্তের চাপের পার্থক্যের অনুপাত $1:2$। নল দুইটির ভিতর দিয়া তরলের প্রবাহের হারের তুলনা কর।

Q. 49. পয়সিউলের পদ্ধতিতে কোন নির্দিষ্ট চাপের পার্থক্যে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের নলের মধ্য দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তরলের আয়তন নলের ব্যাসার্ধের সহিত কিরূপে পরিবর্তিত হয় ?

একক ও মাত্রা সংক্রান্ত

Q. 50. G-এর মাত্রা $[M^{-1}L^{3}T^{-2}]$—ইহা সঠিক কিনা পরীক্ষা কর।

Q. 51. ইয়ং গুণাঙ্কের মাত্রা : (i) $[ML^{-1}T^{2}]$ (ii) $[MLT^{2}]$ (iii) $[ML^{-1}T^{-2}]$ (iv) $[MLT^{-2}]$—ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি ঠিক ?

Q. 52. নিম্নের রাশিগুলির মাত্রা নির্ণয় কর : (i) পৃষ্ঠটান (ii) সান্দ্রতা।

Q. 53. প্রমাণ কর যে কৌণিক ভরবেগের মাত্রা এবং শক্তি ও সময়ের গুণফলের মাত্রা সমান।

Q. 54. এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে শক্তির এককের নাম কি ? ইহার সহিত C. G. S. এককের সম্পর্ক নির্ণয় কর।

শব্দ বিজ্ঞান
(SOUND)

প্রথম পরিচ্ছেদ
সরল দোলগতি
(Simple Harmonic Motion)

1.1 সূচনা (Introduction)

একটি গতিশীল বস্তু যদি কোন নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধানে একই স্থানে ফিরিয়া আসে তবে তাহার গতিকে পর্যাবৃত্ত বা আবৃত্ত গতি (**periodic motion**) বলে। পর্যাবৃত্ত গতিশীল বস্তুর এই গতিপথ সরল রেখাবৃত্ত বা উপবৃত্ত হইতে পারে। সূর্যের চারিদিকে পৃথিবীর পরিক্রমণ একটি পর্যাবৃত্ত গতির উদাহরণ। কারণ একটি নির্দিষ্ট সময়ে অর্থাৎ এক বৎসর পরে পৃথিবী আবার সেই একই পথ পরিক্রমা করিতেছে। কোন সুরশলাকার (**tuning fork**) বাহু দুইটির কম্পন বা পেণ্ডুলামের পিণ্ডের গতি ইত্যাদি পর্যাবৃত্ত গতির উদাহরণ।

কোন বস্তুকণার গতি যদি কোন নির্দিষ্ট সময়ের শেষে বিপরীতমুখী হইয়া যায় তবে বস্তুকণার সেই পর্যাবৃত্ত অগ্র-পশ্চাদ্ গতিকে দোলনী বা কম্পনময় পর্যাবৃত্ত গতি (**oscillatory or vibratory periodic motion**) বলে।

পর্যাবৃত্ত গতিশীল কোন বস্তুকণার ত্বরণ যদি বস্তুটির গতিপথের মধ্য-অবস্থান (**mean position**) হইতে উহার সরণের সমানুপাতিক এবং ঐ অবস্থান অভিমুখী হয় তাহা হইলে বস্তুকণার সেই গতিকে সরল দোলগতি (**simple harmonic motion**) বলে। সুরশলাকার বাহুর কম্পন, সরল দোলকের গতি, স্প্রিংয়ের উল্লম্ব কম্পন ইত্যাদি সরল দোলগতির উদাহরণ।

1.2 সরল দোলগতির বৈশিষ্ট্য (Characteristics of SHM)

একটি সরল দোলগতির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলি লক্ষ্য করা যায় :

(i) সরল দোলগতিসম্পন্ন কোন বস্তুকণার ত্বরণ কোন এক মুহূর্তে বস্তুটির গতিপথের মধ্য-অবস্থান হইতে উহার সরণের সমানুপাতিক হইবে।

(ii) বস্তুকণাটির ত্বরণ যে কোন সময়ে উহার গতিপথের মধ্য-অবস্থান অভিমুখী হইবে।

(iii) ইহা একটি পর্যাবৃত্ত গতি এবং একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর এই গতি বিপরীতমুখী হয়।

1.3 সরল দোলগতি বিষয়ক কয়েকটি সংজ্ঞা (A few definitions relating to SHM)

(a) **পূর্ণ কম্পন (Complete vibration)**: কোন কম্পনশীল বস্তুকণা একটি বিন্দু হইতে যাত্রা শুরু করিয়া পুনরায় একই পথে সেই বিন্দুতে ফিরিয়া আসিলে যে কম্পন সম্পূর্ণ হয় তাহাকে পূর্ণ কম্পন বলে।

(b) **কম্পনের বিস্তার** (Amplitude of vibration): কোন কম্পনশীল বস্তুকণা উহার নির্দিষ্ট মধ্য-অবস্থান হইতে উভয় দিকে সর্বোচ্চ যতদূর যায় সেই দূরত্বকে কম্পনের বিস্তার বলে।

(c) **পর্যায়কাল** (Time period): একটি পূর্ণ কম্পন সম্পূর্ণ করিতে কোন কম্পনশীল বস্তুকণা যে সময় লয় তাহাকে পর্যায়কাল বলে।

(d) **কম্পাঙ্ক** (Frequency): প্রতি সেকেণ্ডে কোন কম্পনশীল কণা যতবার পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে তাহাকে কম্পাঙ্ক বলে।

(e) **দশা** (Phase): কোন কম্পনশীল বস্তুকণার দশা বলিতে যে কোন মুহূর্তে ঐ কণাটির গতির অবস্থা, যথা – অবস্থান, বেগ, ত্বরণ ও গতির অভিমুখ নির্দেশ করে।

(f) **প্রারম্ভিক দশা** (Epoch): যাত্রা শুরু করিবার মুহূর্তে সরল দোলগতি-সম্পন্ন কোন বস্তুকণার যে দশা থাকে তাহাকে প্রারম্ভিক বা আদি দশা বলে। সময়ের সাথে দশার পরিবর্তন হয় কিন্তু প্রারম্ভিক দশা একই থাকে।

1.3.1 কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালের সম্পর্ক (Relation between frequency and time period)

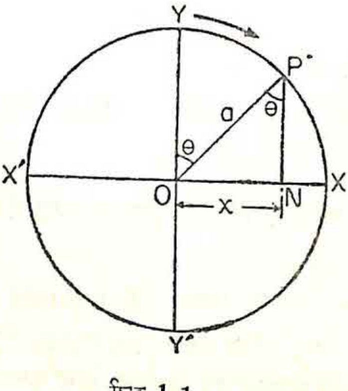
যদি কোন কম্পনশীল বস্তুকণার পর্যায়কাল T হয় তবে একক সময়ে উহার কম্পন সংখ্যা হইবে $\frac{1}{T}$। এখন কণার কম্পাঙ্ক n ধরিলে সংজ্ঞানুযায়ী আমরা লিখিতে পারি,

$$n=\frac{1}{T} \qquad \cdots \qquad (1.1)$$

অথবা, $$nT=1 \qquad \cdots \qquad (1.1a)$$

1.4 সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুকণার সরণ, বেগ ও ত্বরণ (Displacement, velocity and acceleration of a particle executing SHM)

(a) **সরণ** (Displacement): মনে করি, ω কৌণিক বেগ লইয়া কোন নির্দেশক কণা XY′X′Y বৃত্তাকার পথে তীর চিহ্ন অভিমুখে আবর্তিত হইতেছে (চিত্র 1.1) যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ a। ধরা যাক, কণাটি Y বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া t সময়ে P বিন্দুতে পৌঁছাইল। বৃত্তের ব্যাস XX′-এর উপর P বিন্দু হইতে PN লম্ব টানিলাম এবং OP যোগ করিলাম। চিত্রে ∠POY $=\theta$ হইলে, ∠OPN $=\theta$ হইবে।



চিত্র 1.1

এখন, লম্ব পাদবিন্দুর সরণ, $x = \text{ON}$

$$= \text{OP} \sin \text{OPN}$$
$$= a \sin \theta$$
$$= a \sin \omega t \qquad \cdots \qquad (1.2)$$

লম্ব পাদবিন্দুর দোলনকাল T হইলে,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\therefore$ সরণ $x = a \sin \omega t$

$$= a \sin \frac{2\pi}{T} t$$
$$= a \sin 2\pi n t \quad (\because \quad n = \frac{1}{T}) \qquad \cdots \qquad (1.3)$$

(b) বেগ (Velocity) : সময়ের সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে। এক্ষেত্রে N বিন্দুর বেগ v হইলে আমরা লিখিতে পারি,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a \sin \omega t) = a\omega \cos \omega t \qquad \cdots \qquad (1.4)$$

যেহেতু, $x = a \sin \omega t$, $\quad \therefore \sin \omega t = \frac{x}{a} \qquad \cdots \qquad (1.5)$

সমীকরণ (1.4) ও (1.5) হইতে পাই,

$$v = a\omega \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$$
$$= a\omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$
$$= \omega \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \cdots \qquad (1.6)$$

যখন $x = a$, তখন $v = 0$

আবার যখন $x = 0$, তখন $v = a\omega$

সুতরাং N বিন্দুর গতিপথের মধ্য-অবস্থানে উহার বেগ সর্বাধিক হইবে।

(c) ত্বরণ (Acceleration) : সময়ের সাপেক্ষে বেগ পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। এক্ষেত্রে N বিন্দুর বেগ f হইলে আমরা লিখিতে পারি,

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(a\omega \cos \omega t)$$
$$= -a\omega^2 \sin \omega t$$
$$= -\omega^2 x \quad (\because \quad x = a \sin \omega t) \qquad \cdots \qquad (1.7)$$

ঋনাত্মক চিহ্ন বুঝাইতেছে যে ত্বরণ ও সরণ পরস্পর বিপরীতমুখী।

যখন $x = 0$, তখন $f = 0$

আবার যখন $x=a$, তখন $f=-\omega^2 a$

সুতরাং N বিন্দুর গতিপথের চরম অবস্থানে উহার ত্বরণ সর্বাধিক হইবে।

1.5 সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুকণার স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি (Potential and kinetic energy of a particle executing SHM)

আমরা জানি, সরল দোলগতিতে আছে এমন বস্তুকণার ত্বরণ $=-\omega^2 x$; বস্তুকণাটির ভর m হইলে, উহার উপর ক্রিয়াশীল বল $=-m\omega^2 x$। এই বলের বিরুদ্ধে x সরণ ঘটাইতে যে পরিমাণ কার্য করিতে হইবে তাহাই কণার স্থিতিশক্তির মান।

এখন, কণাটির সরণ dx হইলে, বস্তুকণা কর্তৃক কৃত কার্য $=m\omega^2 x.dx$

$\therefore$ x সরণের জন্য বস্তুকণা কর্তৃক মোট কৃত কার্য

$$=\int_0^x m\omega^2 x.dx$$

$$=m\omega^2\int_0^x xdx$$

$$=\tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \cdots \quad (1.8)$$

সমীকরণ (1.8) বস্তুকণাটির স্থিতিশক্তির মান নির্দেশ করে।

যখন $x=0$, তখন স্থিতিশক্তি $(\tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2)=0$

আবার যখন $x=a$, তখন স্থিতিশক্তি $=\tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2$

সুতরাং কণাটির গতিপথের চরম অবস্থানে উহার স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হইবে।

আবার আমরা জানি, $\dfrac{dx}{dt}$ বস্তুকণাটির বেগ হইলে উহার গতিশক্তি $=\tfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$

$$\because \quad \frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\therefore \quad \text{গতিশক্তি}=\tfrac{1}{2}m\omega^2\,(a^2-x^2) \quad \cdots \quad (1.9)$$

যখন $x=0$, তখন গতিশক্তি $=\tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2$

আবার যখন $x=a$, তখন গতিশক্তি $=0$

এখন বস্তুকণাটির মোট শক্তি $=$ স্থিতিশক্তি $+$ গতিশক্তি

$$=\tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2+\tfrac{1}{2}m\omega^2\,(a^2-x^2)$$

$$=\tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2 \quad \cdots \quad (1.10)$$

সুতরাং বস্তুকণাটির মোট শক্তি উহার সরণের উপর নির্ভরশীল নয়।

1.6 সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ (Differential equation of SHM)

মনে করি, m ভরবিশিষ্ট কোন একটি বস্তুকণা সরল দোলগতিতে আছে। কোন এক সময় t-তে উহার ত্বরণ হইবে $\dfrac{d^2x}{dt^2}$।

$\therefore$ কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলের মান $= m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

যেহেতু বল সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী,

$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

$$= -\mu x \qquad (\mu = \text{ধ্রুবক})$$

অথবা, $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{m}x \qquad \cdots \quad (1.11)$$

আবার কণাটির কৌণিক বেগ ω হইলে আমরা জানি,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \cdots \quad (1.12)$$

সমীকরণ (1.11) ও (1.12) হইতে পাই,

$$\omega^2 = \frac{\mu}{m}$$

$\therefore$ সমীকরণ (1.11) এ $\dfrac{\mu}{m}$-এর মান বসাইয়া পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots \quad (1.13)$$

সমীকরণ (1.13) হইতেছে সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ।

ইহাকে সমাধান করিবার জন্যে উভয় দিকে $2\dfrac{dx}{dt}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega^2 x\frac{dx}{dt} = 0$$

সমাকলন করিয়া পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = k \qquad (k = \text{সমাকলন অচর}) \quad \cdots \quad (1.14)$$

যখন সরণ সর্বাধিক, অর্থাৎ $x = a$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$

$$\therefore \quad k = \omega^2 a^2$$

$\therefore$ সমীকরণ (1.14) কে লেখা যাইতে পারে,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 (a^2 - x^2)$$

অথবা, $$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

অথবা, $$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$$

সমাকলন করিয়া,

$$\sin^{-1}\frac{x}{a}=\omega t+\delta \quad (\delta = \text{সমাকলন অচর})$$

অথবা, $$x=a\sin(\omega t+\delta) \qquad \cdots \quad (1.15)$$

$t=0$ হইলে, $x=a\sin\epsilon$

$\therefore$ ϵ হইতেছে বস্তুকণাটির প্রারম্ভিক দশা

সমীকরণ (1.15)কে লিখিতে পারি,

$$x=a\sin\omega t\cos\delta+a\cos\omega t\sin\delta$$
$$=(a\cos\delta)\sin\omega t+(a\sin\delta)\cos\omega t$$
$$=A\sin\omega t+B\cos\omega t \qquad \cdots \quad (1.16)$$

যেখানে, $A=a\cos\delta$

এবং $B=a\sin\delta$

ইহাই অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

1.6.1 দোলনকাল ও কম্পাঙ্ক (Time period and frequency)

যেহেতু, $\omega^2=\frac{\mu}{m}$

$$\therefore \quad \omega=\sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

কিন্তু $\omega=\frac{2\pi}{T}$

অতএব, $$\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

বা $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu}} \qquad \cdots \quad (1.17)$$

এবং কম্পাঙ্ক, $$n=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{m}} \qquad \cdots \quad (1.18)$$

1.7 সমদোলনকাল কিন্তু পৃথক বিস্তার ও দশা সম্পন্ন দুইটি একরেখীয় সরল দোলগতির সংযোজন (Composition of two collinear SHM of equal periods but different in amplitudes and phases)

মনে করি একরেখীয় সরল দোলগতি দুইটির বিস্তার যথাক্রমে a ও b এবং দশা পার্থক্য ϕ। যে কোন সময় t তে X-অক্ষ বরাবর উহাদের সরণ সমীকরণকে লেখা যাইতে পারে,

$$x_1=a\sin\omega t \qquad \cdots \quad (1.19)$$

এবং $$x_2=b\sin(\omega t+\phi) \qquad \cdots \quad (1.20)$$

$\therefore$ লব্ধি সরণ, $x = x_1 + x_2$

$$= a \sin \omega t + b \sin (\omega t + \phi)$$
$$= a \sin \omega t + b(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi)$$
$$= (a + b \cos \phi) \sin \omega t + b \sin \phi \cos \omega t$$

মনে করি, $a + b \cos \phi = A \cos \theta$ ... (1.21)

এবং $b \sin \phi = A \sin \theta$ ... (1.22)

$$\therefore \quad x = A \sin \omega t \cos \theta + A \cos \omega t \sin \theta$$
$$= A \sin (\omega t + \theta) \qquad \cdots \quad (1.23)$$

এখনে, সমীকরণ (1.21) ও (1.22)-এর বর্গের সমষ্টি লইয়া পাই,

$$(a + b \cos \phi)^2 + (b \sin \phi)^2 = A^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

অথবা, $A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi}$ ... (1.24)

আবার সমীকরণ (1.22)কে (1.21) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, 3

$$\tan \theta = \frac{b \sin \phi}{a + b \cos \phi}$$

অথবা, $\theta = \tan^{-1} \dfrac{b \sin \phi}{a + b \cos \phi}$ ... (1.25)

সমীকরণ (1.23), (1.24) ও (1.25) হইতে পাই,

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi} \sin \left(\omega t + \tan^{-1} \frac{b \sin \phi}{a + b \cos \phi} \right) \quad \cdots \quad (1.26)$$

সমীকরণ (1.26) একটি সরল দোলগতির সমীকরণ।

বিশেষ ক্ষেত্র (Special Cases)

(i) যখন $\phi = 0$, তখন $\tan \theta = \dfrac{b \sin \phi}{a + b \cos \phi} = 0$, অর্থাৎ $\theta = 0$

সুতরাং এক্ষেত্রে লব্ধিগতি ও প্রথম দোলগতির ভিতর কোন দশা পার্থক্য থাকিবে না,

এখানে বিস্তার, $A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$

$$= a + b$$

$\therefore$ t সময়ে সরণ, $x = (a + b) \sin \omega t$ ... (1.27)

(ii) যখন $\phi = \pi$, তখন $\tan \theta = \dfrac{b \sin \phi}{a + b \cos \phi} = 0$, অর্থাৎ $\theta = 0$

এক্ষেত্রে, $A = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = a - b$

$\therefore$ t সময়ে সরণ, $x = (a - b) \sin \omega t$ ... (1.28)

(iii) যখন $\phi = \pi$ এবং $a = b$, তখন $\theta = 0$

বিস্তার $A = a - a = 0$

অর্থাৎ লব্ধিগতির সরণ, $x = 0$ ... (1.29)

(iv) যখন $\phi=\frac{\pi}{2}$, তখন $\tan\theta=\frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi}=\frac{b}{a}$

$$\therefore\quad \theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

এবং $A=\sqrt{a^2+b^2}$

অর্থাৎ লব্ধিগতির সরণ, $x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$ ... (1.30)

1.8 সম-দোলনকাল কিন্তু পৃথক বিস্তার ও দশা সম্পন্ন পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি সরল দোলগতির সংযোজন (Composition of two SHM at right angles to each other having same period but different amplitudes and phases)

মনে করি, সরল দোলগতি দুইটির বিস্তার যথাক্রমে a ও b এবং দশা পার্থক্য ϕ। প্রথমটি X-অক্ষ এবং দ্বিতীয়টি Y-অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করিলে যে কোন সময় t তে উহাদের সরণ সমীকরণকে লেখা যাইতে পারে,

$$x=a\sin\omega t \quad\cdots\quad (1.31)$$

$$y=b\sin(\omega t+\phi) \quad\cdots\quad (1.32)$$

সমীকরণ (1.31) হইতে পাই,

$$\sin\omega t=\frac{x}{a}$$

$$\therefore\quad \cos\omega t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

আবার সমীকরণ (1.32) হইতে পাই,

$$\frac{y}{b}=\sin(\omega t+\phi)$$

$$=\sin\omega t\cos\phi+\cos\omega t\sin\phi$$

$$=\frac{x}{a}\cos\phi+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\phi$$

($\sin\omega t$ ও $\cos\omega t$-এর মান বসাইয়া)

অথবা, $\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\cos\phi=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin\phi$

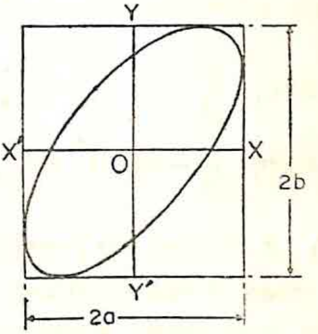
বর্গ করিয়া,

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\phi+\frac{x^2}{a^2}\cos^2\phi=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\phi$$

$$=\sin^2\phi-\frac{x^2}{a^2}\sin^2\phi$$

অথবা, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\phi=\sin^2\phi$ ··· (1.33)

সমীকরণ (1.33) হইতেছে $2a$ ও $2b$ বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা সীমাবদ্ধ উপবৃত্তের (ellipse) সমীকরণ। চিত্র 1.2 তে ইহা দেখানো হইয়াছে। সুতরাং বোঝা যাইতেছে যে, এইরূপ সংযোজনে লব্ধিগতি হইবে উপবৃত্ত গতি।



চিত্র 1.2

1.9 পৃথক পৃথক দোলনকাল, বিস্তার ও দশাযুক্ত দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সরল দোলগতির সংযোজন (Composition of two rectangular SHM having different amplitudes, phases and periods)

মনে করি, সরল দোলগতি দুইটির বিস্তার যথাক্রমে a ও b এবং দশা পার্থক্য ϕ। ধরা যাক, দোলনকালের অনুপাত 2 : 1। যে কোন সময় t তে প্রথমটি X-অক্ষ এবং দ্বিতীয়টি Y-অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করিলে উহাদের সরণ সমীকরণ হইবে যথাক্রমে,

$$x=a\sin\omega t \quad \cdots \quad (1.34)$$

$$y=b\sin(2\omega t+\phi) \quad \cdots \quad (1.35)$$

সমীকরণ (1.34) হইতে পাই,

$$\sin\omega t=\frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \cos\omega t=\sqrt{1-\sin^2\omega t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \cdots \quad (1.36)$$

এখন সমীকরণ (1.35) কে লেখা যাইতে পারে,

$$\frac{y}{b}=\sin 2\omega t\cos\phi+\cos 2\omega t\sin\phi$$

$$=2\sin\omega t\cos\omega t\cos\phi+(1-2\sin^2\omega t)\sin\phi$$

$$=2\frac{x}{a}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\cos\phi+\left(1-2\frac{x^2}{a^2}\right)\sin\phi$$

অথবা, $\left(\frac{y}{b}-\sin\phi\right)+2\frac{x^2}{a^2}\sin\phi=2\frac{x}{a}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\cos\phi$

অথবা, $\left[\left(\frac{y}{b}-\sin\phi\right)+2\frac{x^2}{a^2}\sin\phi\right]^2=4\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cos^2\phi$ (বর্গ করিয়া)

অথবা, $\left(\frac{y}{b}-\sin\phi\right)^2+4\frac{x^2}{a^2}\sin\phi\left(\frac{y}{b}-\sin\phi\right)+4\frac{x^4}{a^4}\sin^2\phi$

$$=4\frac{x^2}{a^2}\cos^2\phi-4\frac{x^4}{a^4}\cos^2\phi$$

অথবা, $\left(\frac{y}{b}-\sin\phi\right)^2+4\frac{x^4}{a^4}+4\frac{x^2y}{a^2b}\sin\phi-4\frac{x^2}{a^2}=0$

অথবা, $\left(\frac{y}{b}-\sin\phi\right)^2+4\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}\sin\phi-1\right)=0$ ... (1.37)

1.10 দুইটি সমান এবং বিপরীতমুখী বৃত্তাকার গতির উপরিপাত (Superposition of two equal and opposite circular motions)

x_1 ও y_1 যথাক্রমে X-অক্ষ এবং Y-অক্ষ বরাবর সরণ কোন বৃত্তগতির সমীকরণকে লেখা যাইতে পারে, $x_1^2+y_1^2=a^2$ ... (1.38)

এখানে, a = বিস্তার = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

এক্ষণে বৃত্তগতিকে দুইটি সরল দোলগতিতে ভাগ করিয়া পাই,

$$\left.\begin{aligned} x_1&=a\cos\theta=a\cos\omega t\\ \text{এবং}\quad y_1&=a\sin\theta=a\sin\omega t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(1.39)$$

অনুরূপে অপর বৃত্তগতিকে ও সরল দোলগতিতে ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে ; অবশ্য দ্বিতীয় বৃত্তগতি প্রথম বৃত্তগতির বিপরীতমুখী বলিয়া কৌণিক বেগ ω এক্ষেত্রে ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং দ্বিতীয় বৃত্তগতির ক্ষেত্রে আমরা লিখিতে পারি,

$$\left.\begin{aligned} x_2&=a\cos(-\omega)t=a\cos\omega t\\ \text{এবং}\quad y_2&=a\sin(-\omega)t=-a\sin\omega t\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(1.40)$$

সমীকরণ (1.39) এবং (1.40) হইতে আমরা X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর লব্ধি সরণের মান নির্ণয় করিতে পারি।

X-অক্ষ বরাবর লব্ধি সরণ,

$$\begin{aligned} X&=x_1+x_2\\ &=a\cos\omega t+a\cos\omega t\\ &=2a\cos\omega t\end{aligned}\quad\cdots\quad(1.41)$$

Y-অক্ষ বরাবর লব্ধি সরণ,

$$\begin{aligned} Y&=y_1+y_2\\ &=a\sin\omega t-a\sin\omega t\\ &=0\end{aligned}\quad\cdots\quad(1.42)$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে লব্ধিগতি X-অক্ষ বরাবর একটি সরল দোলগতি হইবে এবং উহার বিস্তার বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ ও দোলনকাল বৃত্তগতির দোলনকালের সমান হইবে।

1.11 সমবৃত্তাকার গতির বিভাজন (Resolution of a uniform circular motion)

যে কোন একটি সরল দোলগতির সমীকরণ, $x = a \cos \omega t$ কে আমরা এরূপে ভাগ করিতে পারি :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \cos \omega t \\ y &= \frac{a}{2} \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1.43)$$

এবং

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \cos \omega t \\ y &= \frac{a}{2} \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1.44)$$

(1.43) কে বর্গের সমষ্টি লইয়া পাই,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \cdots \quad (1.45)$$

ইহা $\frac{a}{2}$ বিস্তার বা ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তগতির সমীকরণ।

অনুরূপে, সমীকরণ (1.44) কে বর্গের সমষ্টি লইয়া পাই,

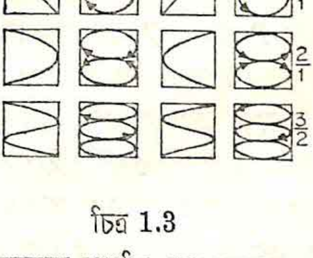
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \cdots \quad (1.46)$$

ইহাও $\frac{a}{2}$ ব্যাসার্ধযুক্ত একটি বৃত্তগতি। তবে ω ঋণাত্মক বলিয়া ইহা প্রথমটির বিপরীতমুখী হইবে।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে একটি সরল দোলগতি দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বৃত্তগতির সমতুল্য।

1.12 লিসাজুর চিত্র (Lissajou's curves)

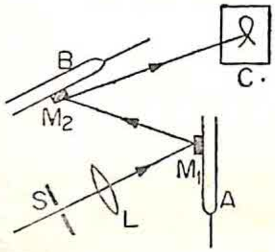
দুইটি পরস্পর লম্ব অক্ষে ক্রিয়াশীল সরল দোলগতি সংযোজন করিলে লব্ধিগতি নির্দেশক যে রেখা বা চিত্র পাওয়া যায় তাহাকে লিসাজুর চিত্র বলে। সরল দোলগতি দুইটির বিস্তার, দশা বা দোলন কাল বিভিন্ন করিয়া অনেক প্রকার লিসাজুর চিত্র গঠন করা যাইতে পারে। চিত্র 1.3তে লিসাজুর চিত্র প্রদর্শিত হইয়াছে। লিসাজু সর্বপ্রথম আলোকীয় পদ্ধতির সাহায্যে ঐরূপ চিত্র প্রদর্শন করেন বলিয়া তাঁহার নামানুসারে উহাদের লিসাজুর চিত্র বলা হয়। আলোক পদ্ধতি এবং ক্যাথোড রশ্মি অসসিলোগ্রাফের সাহায্যে কিরূপে লিসাজুর চিত্র বা বক্র দেখানো যাইতে পারে নিম্নে তাহা আলোচনা করা হইল।



চিত্র 1.3

1.12.1 আলোক পদ্ধতি (Optical method)

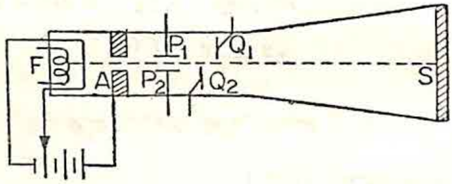
এই পদ্ধতিতে পৃথক কম্পাঙ্কের দুইটি সুরশলাকা A ও B পরস্পর লম্বভাবে রাখা হয়। প্রতি শলাকার একটি বাহুতে একটি করিয়া দর্পণ M_1 ও M_2 আটকানো আছে (চিত্র 1.4)। আলোক উৎস S হইতে সরু আলোক রশ্মিগুচ্ছ L লেন্সের মধ্য দিয়া M_1 দর্পণে প্রতিফলিত হয়। ঐ প্রতিফলিত রশ্মি পুনরায় M_2 দর্পণে প্রতিফলিত হইয়া C পর্দায় গিয়া পড়ে। এক্ষণে উভয় সুরশলাকার কম্পনের বিভিন্ন অনুপাত লইয়া পর্দার উপর বিভিন্ন ধরনের লিসাজুর চিত্র দেখা যাইতে পারে।



চিত্র 1.4

1.12.2 ক্যাথোড রশ্মি অস্‌সিলোগ্রাফ (Cathode ray oscillograph)

এই চিত্রে উত্তপ্ত তার F হইতে ইলেকট্রন নির্গত হইয়া অ্যানোড A-এর মধ্য দিয়া প্রবাহিত হয় (চিত্র 1.5)। ইলেকট্রন রশ্মি পরস্পর লম্বভাবে রক্ষিত দুই জোড়া বিদ্যুৎক্ষেত্র সৃষ্ট বিক্ষেপকারী পাত P_1, P_2 ও Q_1, Q_2-এর মধ্য দিয়া ধাবিত হয়। অতঃপর এই রশ্মি বিক্ষেপকারী চৌম্বক ক্ষেত্রের মধ্য দিয়া গমন করিয়া প্রতিপ্রভ (fluorescent) পর্দা S-এ গিয়া পড়ে। বিদ্যুৎ এবং চৌম্বক ক্ষেত্রের বিভিন্ন কম্পাঙ্ক সৃষ্টির মাধ্যমে পর্দার উপর লিসাজুর চিত্র দেখিতে পাওয়া যায়।



চিত্র 1.5

1.13 সরল দোলগতির উদাহরণ (Examples of SHM)

(a) সরল দোলকের গতি (Motion of a simple pendulum)

মনে করি, l কার্যকর দৈর্ঘ্য ও m ভরবিশিষ্ট একটি সরলদোলক কোন এক সময়ে θ কোণে ($\theta < 4°$) আন্দোলিত হইয়া সাম্য অবস্থান P হইতে Q তে আসিল। ঐ অবস্থায় পিণ্ডের ওজন mg খাড়া নিম্নাভিমুখী ক্রিয়া করিবে, যেখানে $g=$ অভিকর্ষজ ত্বরণ। mg-কে দুইটি উপাংশে ভাগ করা যাইতে পারে ; সুতার দৈর্ঘ্য বরাবর এই মান $mg \cos\theta$ এবং সুতার লম্ব অভিমুখে এই মান $mg \sin\theta$ (চিত্র 1.6)।



চিত্র 1.6

যদি $PQ = x$ হয় তবে,

$$\theta = \frac{x}{l} \quad \cdots \quad (1.47)$$

θ খুব ছোট বলিয়া আমরা লিখিতে পারি,

$$mg \sin\theta = mg\,\theta = mg\frac{x}{l}$$

$\therefore$ প্রত্যানয়ক বল (restoring force) $= -mg\frac{x}{l}$ $\cdots$ (1.48)

(বল ও সরণ বিপরীতমুখী বলিয়া ঋণাত্মক চিহ্ন হইয়াছে)

যেহেতু প্রত্যানয়ক বল = ভর × ত্বরণ

$$\therefore \quad -mg\frac{x}{l} = m \times \frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots \quad (1.49)$$

সমীকরণ (1.49)-এ $\frac{d^2x}{dt^2}$ বুঝাইতেছে ত্বরণ।

এখন আমরা পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

অথবা,
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \cdots \quad (1.50)$$

যেখানে $\omega^2 = \frac{g}{l}$

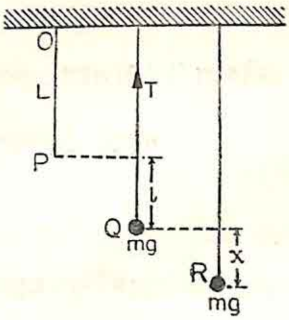
অথবা, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

সমীকরণ (1.50) সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ।

ইহার দোলনকাল, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \cdots \quad (1.51)$$

সুতরাং দোলকের গতি সরল দোলগতি।



চিত্র 1.7

(b) ভার সমেত একটি স্থিতিস্থাপক সুতার কম্পন (Oscillations of a loaded string)

ধরা যাক, OP একটি স্থিতিস্থাপক সুতা যাহার O প্রান্ত একটি দৃঢ় আলম্ব বিন্দু হইতে ঝোলানো রহিয়াছে (চিত্র 1.7)। উহার অপর প্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু

বাঁধিয়া দিলে mg বলের দরুন বস্তুটি l দূরত্ব নামিয়া Q স্থানে আসিবে। কিন্তু সুতার টান T ঊর্ধ্বমুখী ক্রিয়া করিবে এবং একে অপরকে প্রশমিত করিয়া সাম্যাবস্থায় আসিবে। অর্থাৎ সাম্যাবস্থায়, $T = mg$ ... (1.52)

আবার আমরা জানি,

$$T \propto l$$

অথবা, $T = kl$, যেখানে k একটি ধ্রুবক

$$\therefore \quad kl = mg$$

অথবা, $k = \frac{mg}{l}$ ... (1.54)

এক্ষণে বস্তুটিকে সাম্যাবস্থা হইতে নিচে টানিয়া ছাড়িয়া দিলে প্রত্যানয়ক বলের উদ্ভব হইবে এবং উহা বস্তুটিকে উপর-নিচ দুলিতে সাহায্য করিবে। মনে করি, বস্তুটি Q স্থান হইতে x দূরত্বে অল্প নিচে R প্রান্তে টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইল। x ক্ষুদ্র বলিয়া প্রত্যানয়ক বল x-এর সহিত সমানুপাতিক হইবে।

$$\therefore \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

অথবা, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x$

অথবা, $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$

অথবা, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ... (1.55)

যেখানে, $\omega^2 = \frac{g}{l}$

বা, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

সমীকরণ (1.55) সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ।

এখানে দোলনকাল, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \cdots \quad (1.56)$$

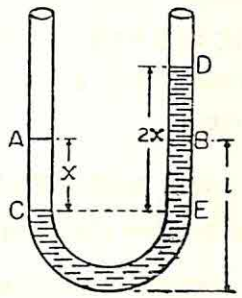
অর্থাৎ ভার সমেত স্থিতিস্থাপক সুতার কম্পন সরল দোলগতি।

(c) **একটি U-নলের মধ্যে তরলের দোলন** (Oscillation of liquid in a U-tube)

মনে করি, S প্রস্থচ্ছেদযুক্ত একটি U-আকৃতির নলে ρ ঘনত্বের কোন তরল আছে।

সাধারণ অবস্থায় তরল উভয় বাহুতে সমান উচ্চতা A ও B পর্যন্ত থাকিবে (চিত্র 1.8)। যে কোন বাহুতে তরল স্তম্ভের উচ্চতা l হইলে উহার ভর $m=2ls\rho$ ··· (1.57)

এক্ষণে A তলে চাপ প্রয়োগ করিলে উহা নামিয়া যাইবে কিন্তু অপর বাহুতে ঊর্ধ্বে উঠিবে। ধরা যাক, A তরল তল x দূরত্ব নামিয়া C বিন্দুতে পৌঁছাইল, অর্থাৎ $AC=x$। ফলে B তরল তল D অবস্থানে উঠিবে অর্থাৎ এই অবস্থায় দুই বাহুতে তরল স্তম্ভের উচ্চতার পার্থক্য হইবে, $DE=2x$।



চিত্র 1.8

এখন, $2x$ দৈর্ঘ্যের তরল স্তম্ভের ওজন $=2x.s\rho g$ ··· (1.58)

এই ওজন তরল স্তম্ভদ্বয়কে পুনরায় সমান লেভ্‌লে আনিবার জন্য প্রত্যানয়ক বল প্রয়োগ করিবে। অতএব, আমরা লিখিতে পারি,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-2x.s\rho g$$

অথবা, $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2xs\rho g}{m}$$

$$=-\frac{2xs\rho g}{2ls\rho} \quad (m\text{-এর মান বসাইয়া})$$

$$=-\frac{g}{l}x$$

অর্থাৎ, $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0$$

অথবা, $$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad \cdots \quad (1.59)$$

যেখানে $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\therefore$ দোলনকাল, $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdots \quad (1.60)$$

সমীকরণ (1.59) সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে, U-নলের অভ্যন্তরে তরলের দোলন সরল দোলগতিতে হইয়া থাকে।

1.14 সরল দোলক (Simple pendulum)

ওজনহীন, নমনীয় (flexible) ও অপ্রসার্য (inextensible) সুতা দ্বারা ঝুলানো

একটি ক্ষুদ্র ভারী বস্তুকে সরল দোলক বলে। এই সংজ্ঞা অনুযায়ী বাস্তবে কোন সরল দোলক তৈয়ারী করা অসম্ভব। এই কারণে আংটাযুক্ত একটি ছোট গোলাকার ধাতব বলকে একটি সরু সুতা দ্বারা ঝুলাইয়া পরীক্ষাগারে সরল দোলক তৈয়ারী করা হয়।

কৌণিক বিস্তার 4° অপেক্ষা ছোট হইলে সরল দোলকের গতি সরল দোলগতির পর্যায়ে পড়ে।

1.14.1 সরল দোলকের সূত্রাবলী (Laws of simple pendulum)

সরল দোলকের গতির নিম্নলিখিত চারটি সূত্র রহিয়াছে :

(i) **সমকাল সূত্র (Law of isochronism) :** কৌণিক বিস্তার 4° অপেক্ষা বেশী না হইলে দোলকের দোলনকাল সর্বদা সমান থাকে। ইহা বিস্তারের হ্রাস বৃদ্ধির উপর নির্ভর করে না।

(ii) **দৈর্ঘ্যের সূত্র (Law of length) :** কোন নির্দিষ্ট স্থানে দোলকের দোলনকাল উহার কার্যকরী দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সমানুপাতিক হইবে।

অর্থাৎ, $T \propto \sqrt{l}$, যখন g ধ্রুবক।

(iii) **ত্বরণের সূত্র (Law of acceleration) :** কার্যকরী দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকিলে দোলকের দোলনকাল অভিকর্ষজ ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক হইবে।

অর্থাৎ, $T \propto \frac{l}{\sqrt{g}}$, যখন l ধ্রুবক।

(iv) **ভরের সূত্র (Law of mass) :** কৌণিক বিস্তার 4° অপেক্ষা বেশী না হইলে এবং কার্যকরী দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকিলে কোন নির্দিষ্ট স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল পিণ্ডের আকার, ওজন ও উপাদানের উপর নির্ভর করে না।

1.14.2 দোলনকালের সমীকরণ (Equation for time period)

দোলকের দৈর্ঘ্যের সূত্র অনুযায়ী,

$$T \propto \sqrt{l}, \text{ যখন } g \text{ ধ্রুবক}$$

আবার ত্বরণের সূত্র অনুযায়ী,

$$T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}, \text{ যখন } l \text{ ধ্রুবক}$$

$$\therefore\ T \propto \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{যখন } g \text{ ও } l \text{ উভয়েই পরিবর্তনশীল}$$

অথবা, $$T = K\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1.61)$$

যেখানে K একটি ধ্রুবক।

পরীক্ষায় দেখা যায়, $K=2\pi$

$$\therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdots \quad (1.62)$$

ইহাই সরল দোলকের দোলনকালের সমীকরণ।

1.14.3 সেকেণ্ড দোলক (Seconds pendulum)

যে সরল দোলকের দোলনকাল 2 সেকেণ্ড বা অর্ধ দোলনকাল 1 সেকেণ্ড তাহাকে সেকেণ্ড দোলক বলে।

আমরা জানি, $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

সেকেণ্ড দোলকের ক্ষেত্রে,

$T=2$ সেকেণ্ড, $\pi=\frac{22}{7}$ এবং $g=980$ cm/second^2

$$\therefore \quad 2=2\times\frac{22}{7}\times\sqrt{\frac{l}{980}}$$

অথবা, $$l=\frac{980\times4}{4\times\left(\frac{22}{7}\right)^2}$$

$$=\frac{980}{9{\cdot}86}=99{\cdot}492 \text{ cm}$$ ।

1.14.4 সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয় (Determination of 'g' with the help of a simple pendulum)

সরল দোলকের ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

অথবা, $$g=4\pi^2\frac{l}{T^2} \text{ cm/second}^2 \qquad \cdots \quad (1.63)$$

প্রথমে ধাতব দোলকের ব্যাসার্ধ স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে পরিমাপ করা হইল। উহার সহিত আংটার দৈর্ঘ্য ও সুতার দৈর্ঘ্য যোগ করিলে কার্যকরী দৈর্ঘ্য l পাওয়া যাইবে। অতঃপর সুতার দৈর্ঘ্য কয়েকবার পরিবর্তন করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে 30 বার পূর্ণ দোলনের সময় হইতে দোলনকাল T নির্ণয় করিয়া $\frac{l}{T^2}$-এর গড় মান বাহির করিতে হইবে। এক্ষণে সমীকরণ (1.63)-এর সাহায্যে g-এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

1.14.5 'g' নির্ণয়ে কতকগুলি অসুবিধা (Some disadvantages in the determination of g)

সরল দোলকের সাহায্যে 'g' নির্ণয়ে কতকগুলি অসুবিধা আছে। যথা—

(i) সংজ্ঞা অনুযায়ী কোন সরল দোলক তৈয়ারী সম্ভব নয়। ফলে, দোলকের দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ এই সমীকরণ দ্বারা সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায় না ;

(ii) বায়ুর প্লবতা ও বাধা পিণ্ডের গতিকে বাধা দেয় ;

(iii) পিণ্ডের শুধু রৈখিক গতি হয় না, আবর্ত গতিও হয় ;

(iv) বিস্তার ন্যূন হইলে তবেই দোলনকালের সমীকরণ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ প্রযোজ্য ;

(v) যখন পিণ্ড বিস্তারের প্রান্তে উপনীত হয় তখন নিলম্বন সূতার সাপেক্ষে উহার একটি আপেক্ষিক গতি থাকে।

1.14.6 দোলক ঘড়ির 'স্লো' বা 'ফাস্ট' যাওয়া (Loss or gain of time by a pendulum clock)

দোলক ঘড়ি উহার দোলকের দোলনকাল দ্বারা সময় স্থির করে। ফলে দোলনকাল পরিবর্তিত হইলে ঘড়ি স্লো বা ফাস্ট হইয়া যায়। যেহেতু দোলকের দোলনকাল উহার কার্যকরী দৈর্ঘ্য (l) ও অভিকর্ষজ ত্বরণের (g) উপর নির্ভরশীল, অতএব উহাদের পরিবর্তনে দোলনকালও পরিবর্তিত হইবে।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

অথবা, $\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2}(\log l - \log g)$ ...(1.64)

[লগারিদ্‌ম লইয়া]

সমীকরণ (1.64)-কে অবকলন করিয়া পাই

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right) \qquad [\because \pi = \text{ধ্রুবক}] \qquad \cdots(1.65)$$

মনে করি, একদিনে দোলক N সংখ্যক পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে। একটি পূর্ণ দোলনের সময় T হওয়ায়,

$$NT = 24 \times 60 \times 60$$

$$= 86{,}400 \text{ সেকেন্ড}$$

$\log N + \log T = \log(86{,}400)$ [লগারিদ্‌ম লইয়া] ...(1.66)

সমীকরণ (1.66)-কে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dN}{N}+\frac{dT}{T}=0 \qquad \cdots(1.67)$$

সমীকরণ (1.65) ও (1.67) হইতে পাই,

$$\frac{dN}{N}=-\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{dg}{g}-\frac{dl}{l}\right)$$

$$\therefore \quad dN=\frac{N}{2}\left(\frac{dg}{g}-\frac{dl}{l}\right) \qquad \cdots(1.68)$$

দোলকটি সেকেণ্ড দোলক হইলে উহা দিনে যে কয়টি পূর্ণ দোলন N সম্পাদিত করে তাহা,

$$N=\frac{86400}{2}$$

$$=43,200$$

প্রতিদিনে দোলক কর্তৃক অর্জিত সেকেণ্ড সংখ্যা δt হইলে,

$\delta t = 2\times$ দোলক কর্তৃক অর্জিত পূর্ণ দোলন

$$=2\times dN$$

$$=2.\ \frac{N}{2}\left(\frac{dg}{g}-\frac{dl}{l}\right)$$

[সমীকরণ (1.68) হইতে dN-এর মান বসাইয়া]

$$=N\ \left(\frac{dg}{g}-\frac{dl}{l}\right)$$

$$=43,200\left(\frac{dg}{g}-\frac{dl}{l}\right) \qquad \cdots(1.69)$$

যখন g স্থির কিন্তু l পরিবর্তনশীল,

তখন $dg=0$

$$\therefore \quad \delta t=-43,200\times\frac{dl}{l} \qquad \cdots(1.70)$$

সুতরাং l বৃদ্ধি পাইলে δt কমিবে, অর্থাৎ ঘড়ি স্লো যাইবে।

আবার, যখন l স্থির কিন্তু g পরিবর্তনশীল

তখন $dl=0$

$$\therefore \quad \delta t=43,200\times\frac{dg}{g} \qquad \cdots(1.71)$$

সুতরাং g বৃদ্ধি পাইলে δt বৃদ্ধি পাইবে, অর্থাৎ ঘড়ি ফাস্ট যাইবে।

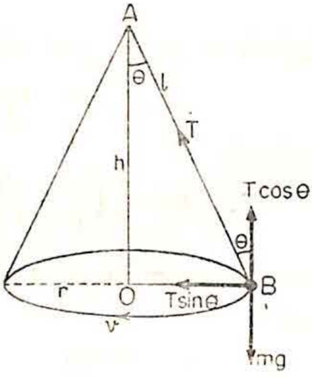
1.14.7 শাঙ্কব দোলক (Conical pendulum)

গঠনের দিক্ হইতে শাঙ্কব দোলক ও সরল দোলক মূলত একই। ইহার পিণ্ডকে এমনভাবে গতিযুক্ত করা হয় যে ইহার অনুভূমিক তল একটি বৃত্ত রচনা করে এবং নিলম্বন সূতা একটি শঙ্কু সৃষ্টি করে, এই কারণে ইহাকে শাঙ্কব দোলক বলে।

মনে করি, চিত্র 1.9-এর ন্যায় একটি পিণ্ড r ব্যাসার্ধের একটি অনুভূমিক বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করিতেছে। যদি দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য $AB = l$ হয় তবে,

$$AO = h = l \cos \theta$$

(h = শঙ্কুর উচ্চতা)



চিত্র 1.9

পিণ্ডটি যদি v গতিবেগে বৃত্তপথে ঘোরে তবে পিণ্ডের অভিকেন্দ্র বল $= \frac{2v^2}{r}$। এখানে পিণ্ডের ওজন mg নিম্নাভিমুখী ক্রিয়া করিতেছে এবং সূতার টান (T) সূতা বরাবর BA অভিমুখে ক্রিয়া করিতেছে। সূতার টান T-কে অনুভূমিক এবং উপাংশ তলে বিভাজন করিলে, আমরা পাই,

$$T \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$

এবং $$T \cos \theta = mg$$

$$\therefore \quad \tan \theta = \frac{v^2}{rg} \qquad \cdots(1.72)$$

কিন্তু $\tan \theta = \frac{r}{h}$ (চিত্র হইতে)

সুতরাং $\frac{r}{h} = \frac{v^2}{rg}$

অথবা, $$v^2 = \frac{r^2 g}{h} \qquad \cdots(1.73)$$

যেহেতু, $v = \omega r$

$$\therefore \quad \omega^{2} r^{2} = \frac{r^2 g}{h}$$

অথবা, $$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad \cdots(1.74)$$

সুতরাং দোলকের দোলনকাল, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

আবার দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য l হইলে,

$$h = l \cos\theta$$

এবং $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$

θ খুব ছোট বলিয়া $l\cos\theta = l$

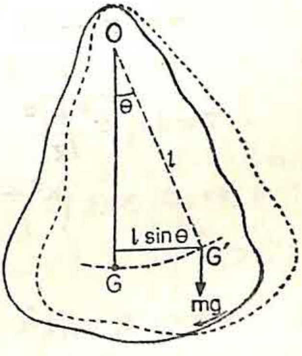
$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdots(1.75)$$

সুতরাং শাঙ্কব দোলক ও সরল দোলকের দোলনকাল একই।

1.15 যৌগিক দোলক (Compound pendulum)

কোন দৃঢ় বস্তু উহার মধ্য দিয়া অতিক্রান্ত অনুভূমিক অক্ষ বেড়িয়া বাধাহীনভাবে আন্দোলিত হইলে যে দোলক পাওয়া যায় তাহাকে যৌগিক দোলক বলে। সরল দোলকের অসুবিধাগুলি যৌগিক দোলকে দূর করা সম্ভব।

মনে করি, O বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত (চিত্র 1.10) একটি দৃঢ় বস্তু অনুভূমিক অক্ষের চতুর্দিকে বাধাহীনভাবে আবর্তিত হইতে পারে। স্থায়ী অবস্থায় বস্তুটির ভারকেন্দ্র G নিলম্বন-বিন্দু O হইতে খাড়া নিম্নে l দূরত্বে অবস্থান করিতেছে। মনে করি, t সময়ে বস্তুটির কৌণিক সরণ θ। ইহার ফলে বস্তুর ভারকেন্দ্র G হইতে G′ অবস্থানে আসিল। দোলকের এই নতুন অবস্থান চিত্রে কাটা কাটা রেখা দ্বারা দেখানো হইয়াছে।



চিত্র 1.10

এখন দোলকটিকে উহার আগের জায়গায় ফিরিয়া আনিতে যে দ্বন্দ্ব ক্রিয়া করিবে তাহার ভ্রামক $= mg \,.\, l\sin\theta$।

দোলকটির কৌণিক ত্বরণ $\frac{d\omega}{dt}$ এবং অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক I হইলে, প্রত্যানয়ক দ্বন্দ্ব $= I\frac{d\omega}{dt}$

$$\therefore \quad I\frac{d\omega}{dt} = -mg.l \sin\theta \qquad \cdots(1.76)$$

$\left[\theta \text{ ও } \frac{d\theta}{dt} \right.$ বিপরীতমুখী বলিয়া ধনাত্মক চিহ্ন দেওয়া হইয়াছে]

অথবা, $\frac{d\omega}{dt} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$ [θ ক্ষুদ্র বলিয়া, $\sin\theta = \theta$]

অথবা, $$\frac{d\omega}{dt} + \omega^2\theta = 0 \qquad \cdots(1.77)$$

যেখানে, $\omega^2 = \frac{mgl}{I}$

অথবা, $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad \cdots(1.78)$$

এক্ষণে, বস্তুটির ভারকেন্দ্র G দিয়া অতিক্রান্ত এবং 0 বিন্দুগামী অক্ষের সমান্তরাল K কোন অক্ষের সাপেক্ষে I_g বস্তুটির জাড্য ভ্রামক হইলে,

$I = I_g + ml^2$ [সমান্তরাল অক্ষের উপপাদ্য হইতে]

$= mK^2 + ml^2$ [K = বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ]

$$= m(K^2 + l^2) \qquad \cdots(1.79)$$

সমীকরণ (1.78) ও (1.79) হইতে পাই,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + l^2}{lg}} \qquad \cdots(1.80)$$

যৌগিক দোলকের ক্ষেত্রে $\left(\frac{K^2 + l^2}{l}\right)$ বা $\left(\frac{K^2}{l} + l\right)$ কে বলা হয় তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য।

1.15.1 দোলনকাল লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ হইবার শর্ত (Condition for minimum and maximum time-periods)

যৌগিক দোলকের ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + l^2}{lg}}$$

অথবা, $T^2 = 4\pi^2\left(\frac{K^2 + l^2}{lg}\right)$

$$= \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{K^2}{l} + l\right) \qquad \cdots(1.81)$$

সমীকরণ (1.81) কে l-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$2T\frac{dT}{dl}=\frac{4\pi^2}{g}\left(1-\frac{K^2}{l^2}\right) \quad \cdots(1.82)$$

(i) যখন দোলনকাল লঘিষ্ঠ বা অল্পতম তখন,

$$\frac{dT}{dl}=0 \qquad \therefore\ l-\frac{K^2}{l^2}=0 \quad \text{অথবা,}\quad K=l$$

$$\therefore\ T\,\text{min}=2\pi\sqrt{\frac{K^2+l^2}{gK}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} \quad \cdots(1.83)$$

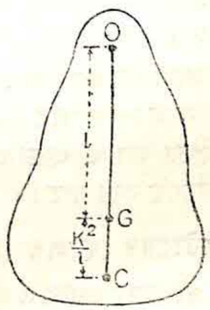
(ii) যখন দোলনকাল অসীম বা গরিষ্ঠ হইবে তখন

$$l=0$$

অর্থাৎ তখন অনুভূমিক অক্ষ দোলকের ভারকেন্দ্র দিয়া অতিক্রম করিবে।

1.15.2 নিলম্বন কেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র বিনিময়যোগ্য (Centre of suspension and centre of oscillation are interchangeable)

যৌগিক দোলকের ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে দোলককে O অথবা C (চিত্র 1.11) যে কোন বিন্দুতে ঝুলানো হউক না কেন উহার দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকিবে।



চিত্র 1.11

আমরা জানি, $OG=l$

এবং $OC=\frac{K^2}{l}+l$

মনে করি, $GC=l'$

$\therefore\ OC=l'+l$

যেখানে $l'=\frac{K^2}{l}$

অথবা, $ll'=K^2$

দোলকটিকে যদি নিলম্বন কেন্দ্র O হইতে ঝুলানো হয় তবে দোলনকাল,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{K^2+l^2}{lg}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{ll'+l^2}{g}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l'+l}{g}} \quad \cdots(1.84)$$

এখন দোলকটিকে যদি C হইতে ঝুলানো হয় তবে, দোলনকাল,

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{K^2+l'^2}{l'g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{ll'+l'^2}{l'g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l+l'}{g}} \qquad \cdots(1.85)$$

সমীকরণ (1.84) ও (1.85) হইতে দেখা যায় যে, $T = T'$। অর্থাৎ নিলম্বন কেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র পরস্পর বিনিময়যোগ্য।

1.15.3 সরল দোলক অপেক্ষা যৌগিক দোলকের সুবিধা (Advantages of a compound pendulum over a simple pendulum)

(i) সরল দোলক একটি কাল্পনিক দোলক ; বাস্তবে ইহা পাওয়া সম্ভব নয়। কিন্তু যৌগিক দোলক সহজেই তৈয়ারী করা যায় ও ইহার দ্বারা নির্ভুলভাবে g-এর মান নির্ণয় করা যায়।

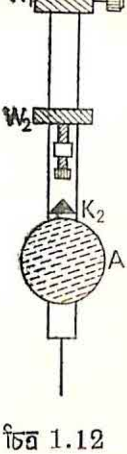
(ii) সরল দোলকের সুতা ও পিণ্ড একযোগে আন্দোলিত হয় না কিন্তু যৌগিক দোলক একযোগে দোলে।

(iii) সরল দোলকের ক্ষেত্রে নিলম্বন বিন্দু ও দোলনবিন্দু সঠিকভাবে বলা না থাকায় পরিমেয় দৈর্ঘ্য নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা যায় না। যৌগিক দোলকের ক্ষেত্রে এরূপ কোন অসুবিধা নাই।

(iv) সরল দোলকে পিণ্ডের ভর কম হওয়ায় দোলনকাল শীঘ্র বন্ধ হইয়া যায়। ফলে দোলনকাল নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা যায় না। যৌগিক দোলকে পিণ্ডের ভর ও জাড্য ভ্রামকের মান বেশী হওয়ায় দোলনকাল সঠিকভাবে নির্ণয় করা সম্ভব।

1.16 কেটারের দোলক (Kater's pendulum)

1817 খ্রীষ্টাব্দে কেটার একটি দোলক উদ্ভাবন করেন। ইহা একটি যৌগিক দোলক এবং ইহার সাহায্যে g-এর মান সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায়। যৌগিক দোলকের নিলম্বন কেন্দ্র ও দোলনকেন্দ্র বিনিমেয়—এই ঘটনার উপর ইহার কার্যনীতি প্রতিষ্ঠিত।



চিত্র 1.12

1.12 চিত্রে দোলকের একটি নকশা দেখানো হইয়াছে। একটি ইস্পাত ও পিতল দণ্ডের একপ্রান্তে একটি ভারী পিণ্ড A আটকানো থাকে। দণ্ডের দুইপ্রান্তের কাছাকাছি দুইটি পরস্পর মুখোমুখি ক্ষুরধার (knife edges) K_1 ও K_2 আছে। দণ্ডের গা বাহিয়া দুইটি ওজন W_1 ও W_2 চলাচল করিতে পারে এবং স্ক্রুর সাহায্যে উহাদের প্রয়োজনমত যে কোন জায়গায় আটকানো যাইতে পারে। অপেক্ষাকৃত কম ওজন W_2-কে ধীরে ধীরে সরাইবার জন্য উহার সহিত একটি মাইক্রোমিটার স্ক্রু লাগানো থাকে।

মনে করি, K_1 ও K_2 ক্ষুরধারের সাপেক্ষে দোলনকাল T_1 ও T_2 প্রায় সমান। ভারকেন্দ্র হইতে K_1 ও K_2 ক্ষুরধারের দূরত্ব যথাক্রমে l_1 ও l_2 হইলে,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + l_1^2}{l_1 g}}$$

এবং $$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + l_2^2}{l_2 g}}$$

বর্গ করিয়া, $$T_1^2 = \frac{4\pi^2(K^2 + l_1^2)}{l_1 g}$$

অথবা, $$T_1^2 l_1 = \frac{4\pi^2}{g}(K^2 + l_1^2) \quad \cdots(1.86)$$

অনুরূপে, $$T_2^2 l_2 = \frac{4\pi^2}{g}(K^2 + l_2^2) \quad \cdots(1.87)$$

সমীকরণ (1.86) হইতে (1.87) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{4\pi^2}{g}(l_1^2 - l_2^2) = (T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2) \quad \cdots(1.88)$$

অথবা, $$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}{(l_1 + l_2)(l_1 - l_2)} \quad \cdots(1.89)$$

$$= \frac{A}{(l_1 + l_2)} + \frac{B}{(l_1 - l_2)} \quad \cdots(1.90)$$

$$= \frac{A(l_1 - l_2) + B(l_1 + l_2)}{(l_1 + l_2)(l_1 - l_2)}$$

$$= \frac{l_1(A + B) - l_2(A - B)}{(l_1 + l_2)(l_1 - l_2)} \quad \cdots(1.91)$$

সমীকরণ (1.89) ও (1.91)-এ l_1 ও l_2-এর গুণাংক তুলনা করিলে পাই,

$$A + B = T_1^2 \text{ এবং } A - B = T_2^2$$

$$\therefore \quad A = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2}, \quad \text{এবং} \quad B = \frac{T_1^2 - T_2^2}{2} \quad \cdots(1.92)$$

সমীকরণ (1.90)-এ, A ও B-এর মান বসাইয়া পাই,

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(l_1 + l_2)} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(l_1 - l_2)}$$

$$= \frac{T_1^2 + T_2^2}{2(l_1 + l_2)} \qquad (\because \; T_1 \text{ ও } T_2 \text{ প্রায় সমান})$$

$$\therefore \quad g = \frac{8\pi^2(l_1 + l_2)}{T_1^2 + T_2^2} \quad \cdots(1.93)$$

এখানে $(l_1 + l_2) = K_1$ ও K_2 ক্ষুরধার দুইটির মধ্যে দূরত্ব। সমীকরণ (1.93)-এর সাহায্যে T_1 ও T_2 সঠিকভাবে পরিমাপ করিয়া 'g'-এর মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ (Examples)

1. একটি বস্তু কণা উহার কম্পন একপ্রান্ত হইতে যাত্রা শুরু করিয়া 12 cm বিস্তার বিশিষ্ট একটি অনুভূমিক সরল দোলগতি রচনা করে এবং উহার কম্পাঙ্ক প্রতি মিনিটে 40টি কম্পন। 2 সেকেন্ড পর উহার সরণ কত ?

(A particle starting at the ends of its swing performs horizontal SHM of amplitude 12 cm and frequency 40 vibrations per minute. What is the displacement at the ends of 2 seconds ?)

(C. U. '48)

বস্তুকণার সরণ, $x = a \cos \omega t$

$$= a \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$= a \cos 2\pi . nt$$

এখানে, বিস্তার, $a = 12$ cm

কম্পন, $n = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ vibration/second

অতিক্রান্ত সময় $t = 2$ second

$$\therefore \quad x = 12 \cos (2\pi \times \tfrac{2}{3} \times 2)$$

$$= 12 \cos \left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$= -12 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -12 \times \tfrac{1}{2} = -6 \text{ cm}$$

এখানে ঋণাত্মক চিহ্নটি বস্তুকণা যে প্রান্ত হইতে যাত্রা শুরু করিয়াছে তাহার মধ্যপ্রান্ত অতিক্রান্ত হইবার পর অপর প্রান্তের সরণ বুঝাইতেছে।

2. একটি 4 cm দীর্ঘ রেখায় একটি বিন্দু সরল দোলগতি রচনা করিয়া চলিয়াছে। ঐ রেখার মধ্যবিন্দু অতিক্রম করিবার সময় উহার বেগ 12 cm প্রতি সেকেন্ডে। পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

(A point performs simple harmonic vibration in a line 4 cm long. Its velocity when passing through the centre of the line is 12 cm per second. Find the period.)

বস্তুকণার বেগ, $v = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$

$$= \frac{2\pi}{T} \sqrt{a^2 - x^2}$$

এখানে, বস্তুকণার বেগ, $v = 12$ cm/second

বস্তুকণার বিস্তার, $a = \frac{4}{2} = 2$ cm

এবং মধ্যবিন্দুতে বস্তুকণার সরণ $x=0$

$$\therefore \quad 12=\frac{2\pi}{T}\sqrt{2^2-0}$$

অথবা, $T=\dfrac{2\times22\times2}{12\times7}$

$=1{\cdot}05$ second (প্রায়)

$\therefore$ পর্যায়কাল $=1{\cdot}05$ second ।

3. একটি সরল দোলগতির দোলনকাল 12 seconds এবং বিস্তার 10 cm হইলে গতিপথের সর্বশেষ ধনাত্মক প্রান্ত অতিক্রম করিবার পর 14 সেকেণ্ড পরে কণাটির দশা ও সরণ কত হইবে ?

(If the period of SHM is 12 second and amplitude 10 cm, what are the phase and the displacement at a time 14 second after a passage of the particle through its extreme positive elongation ?)

(C U. '52)

এক্ষেত্রে যেহেতু কণাটির দোলনকাল 12 সেকেণ্ড, সুতরাং কণাটি সর্বশেষ ধনাত্মক প্রান্ত অতিক্রম করিবার 14 সেকেণ্ড পর উহা আর একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করিবে। অর্থাৎ ধনাত্মক প্রান্ত আর একবার অতিক্রম করিবার $(14-12)$ বা 2 second পর অথবা মধ্য অবস্থানে পেঁৗছিবার $(3-2)$ বা 1 **second** পূর্বে উহার সরণ ও দশা নির্ণয় করিতে হইবে। কারণ ধনাত্মক প্রান্ত হইতে মধ্য অবস্থানে পেঁৗছাইতে কণাটির $\frac{12}{4}=3$ সেকেণ্ড সময় লাগে।

এখন আমরা জানি,

$$x=a\sin\omega t$$
$$=a\sin\frac{2\pi}{T}t$$

এখানে, $a=10$ cm

$T=12$ seconds

এবং $t=1$ second

$$\therefore \quad x=10\sin\frac{2\pi}{12}$$
$$=10\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=10\times\tfrac{1}{2}=5\text{ cm}$$

এবং দশাকোণ $= \omega t$

$$= \frac{2\pi}{T} t$$

$$= \frac{2\pi}{12} \times 1 = \frac{\pi}{6}$$

4. একটি সরল দোলগতির পর্যায়কাল 12 seconds এবং বিস্তার 10 cm। এক প্রান্তীয় প্রসারণ হইতে বস্তুকণার যাত্রার 14 seconds পরে উহার দশা এবং সরণ কত ?

(If the period of SHM is 12 seconds and amplitude 10 cm, what are the phase and the displacement at a time 14 seconds, after a passage of the particle through its extreme elongation ?)

(C. U. '62)

বস্তুকণার সরণ, $x = a \cos \omega t$

$$= a \cos \frac{2\pi}{T} t$$

এখানে, $a = 10$ cm

$T = 12$ seconds

$t = 14$ seconds

$$\therefore \quad x = 10 \cos \frac{2\pi}{12} \times 14$$

$$= 10 \cos \frac{7\pi}{3}$$

$$= 10 \cos \frac{\pi}{3} = 10 \times \tfrac{1}{2} = 5 \text{ cm}$$

দশা $= \frac{2\pi}{12} \times 14 = \frac{7\pi}{3}$.

5. একটি বস্তু সরল দোলগতি নির্বাহ করিতেছে। উহার বিস্তার 1·0 cm এবং কম্পাঙ্ক 12 প্রতি second-এ। যখন বস্তুটির সরণ 0·5 cm তখন উহার গতিবেগ কত ?

(A body executes SHM of amplitude 1·0 cm and frequency 12 cycles/second. What is the velocity when displacement is 0·5 cm ?)

(C. U. '77)

আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

এবং $v = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

এখানে, $n = 12$ cycles/second

$a = 1$ cm

$x = 0{\cdot}5$ cm

$\therefore \quad \omega = 2 \times \frac{22}{7} \times 12 = \frac{24 \times 22}{7}$

সুতরাং গতিবেগ, $v = \frac{24 \times 22}{7}\sqrt{(1)^2 - (0{\cdot}5)^2}$

$= 65{\cdot}39$ cm/second।

6. সরল দোলগতিতে আছে এমন একটি বস্তুকণার বিস্তার 5 feet এবং গতিপথের মধ্য অবস্থান হইতে 2 **feet** দূরত্বে ত্বরণ 8 **feet/second^2**। গতিপথের মধ্য অবস্থান হইতে 3 **feet** দূরত্বে কণাটির বেগ নির্ণয় কর।

(The amplitude of a particle moving with SHM is 5 feet and its acceleration at a distance of 2 feet from the mean position is 8 feet/second^2. Find its velocity when it is at a distance of 3 feet from the mean position.)

আমরা জানি, ত্বরণ $f = -\omega^2 x$

এবং কণাটির বেগ, $v = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

এখানে, $f = 8$ **feet/second^2**

এবং $x = 2$ **feet**

$\therefore \quad 8 = -\omega^2 . 2$

অথবা, $\omega = 2$

আবার দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

$x = 3$ **feet**

এবং $a = 5$ **feet**

$\therefore$ বেগ, $v = 2\sqrt{5^2 - 3^2}$

$= 2 \times 4 = 8$ feet/second।

7. একটি বস্তুকণা উহার দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হইতে দোলন শুরু করিয়া 10 **cm** বিস্তার বিশিষ্ট ও প্রতি মিনিটে 60 কম্পাঙ্কযুক্ত সরল দোলগতি নির্বাহ করে। 4·5 **second** পর কণাটির সরণ কত হইবে?

(A particle starting at the end of its swing, performs harizontal

SHM of amplitude 10 cm and of frequency 60 vibrations per minute. What is the displacement at the end of 4·5 second ?)

বস্তুকণার সরণ, $x = a \sin \omega t$

$= a \sin 2\pi\, nt$

এখানে, $a = 10$ cm

$n = \frac{60}{60} = 1$টি vibration/second

$t = 4{\cdot}5$ second

$\therefore \quad x = 10 \sin (2\pi \times 2 \times 4{\cdot}5)$

$= 10 \sin 9\pi = 0$

সুতরাং দোলনসীমার শেষ প্রান্ত হইতে যাত্রা শুরু করিয়া বস্তুকণাটি গতিপথের মধ্য অবস্থানে পৌঁছাইবে।

8. একটি বস্তুকণা সরলরেখা বরাবর সরল গতিতে আছে। সাম্য অবস্থান হইতে উহার দূরত্ব যখন x_1 ও x_2 তখন উহার বেগ যথাক্রমে u_1 ও u_2। দেখাও যে উহার দোলনকাল, $T = 2\pi \sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$.

(A particle is moving with SHM in a straight line. When the distance of the particle from the equilibrium positions is x_1 and x_2 the corresponding values of the velocity are u_1 and u_2. Show that the period, $T = 2\pi \sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{u_1^2 - u_2^2}}$)

ধরা যাক, সরল দোলগতির সমীকরণ

$$x = a \sin \omega t$$

তখন, $u = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t$

$\therefore \quad \frac{x}{a} = \sin \omega t$ এবং $\frac{u}{a\omega} = \cos \omega t$

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{a^2\omega^2} = 1$

$\therefore \quad \frac{u_1^2}{\omega^2} + x_1^2 = a^2 = \frac{u_2^2}{\omega^2} + x_2^2$

অথবা, $\frac{u_1^2 - u_2^2}{\omega^2} = (x_2^2 - x_1^2)$

$\therefore \quad \omega^2 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{x_2^2 - x_1^2}$

অথবা, $\omega = \left[\dfrac{u_1{}^2 - u_2{}^2}{x_2{}^2 - x_1{}^2}\right]^{1/2} = \dfrac{2\pi}{T}$

$\therefore \quad T = 2\pi\{(x_2{}^2 - x_1{}^2)/(u_1{}^2 - u_2^2)\}^{1/2}.$

9. একটি লম্বা হাল্কা স্প্রিং-এর নিম্নপ্রান্তে একটি 100 gram ভরের বস্তু বাঁধিয়া উহার উপরের প্রান্তটিতে একটি দৃঢ় বিন্দু ঝোলানো হইয়াছে। ইহাতে স্প্রীং-এর দৈর্ঘ্য 2 cm বৃদ্ধি পাইয়াছে। যদি বস্তুটি একটু টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া যায় তবে উহার উল্লম্ব কম্পনের পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

(A mass of 100 grams is attached to the lower end of a long light spring hanging vertically from a fixed point at its upper end. This increases the length of the spring by 2 cm. Find the time period of vertical oscillation when the mass is slightly pulled down and released.) (B. U. '63)

আমরা জানি, দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

এখানে, দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 2$ cm

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 980$ cm/second^2

$\therefore \quad T = 2 \times \dfrac{22}{7} \times \sqrt{\dfrac{2}{980}}$

$= 0{\cdot}283$ second (প্রায়)।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. সরল দোলগতির সংজ্ঞা লিখ এবং পর্যায়কালের রাশিমালা উপপাদন কর। প্রমাণ কর যে, একটি সরল দোলকের গতি সরল দোলগতি।

(Define SHM and deduce an expression for the time period. Show that the motion of a simple pendulum is simple harmonic.) (C. U. '68, '70, '71)

2. সংজ্ঞা লিখ : সরল দোলগতি নির্বাহকারী কণার বিস্তার, কম্পাঙ্ক, দশা এবং আদি দশা।

(Define : 'Amplitude', 'Frequency', 'Phase' and 'Epoch' of the particle executing SHM.) (C. U. '71)

3. সরল দোলগতিতে আছে এইরূপ একটি কণার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরণ $x = a\cos(\omega t + \epsilon)$ হইলে প্রমাণ কর যে, যে কোন মুহূর্তে উহার মোট শক্তি $\frac{1}{2}m\,\omega^2 a^2$ ergs ; m হইল কণাটির ভর।

(Show that if the displacement of a particle executing SHM from a fixed point given by $x = a\cos(\omega t + \epsilon)$, the total energy at any instant is given by $\frac{1}{2} m \omega^2 a^2$ ergs, m being the mass of the particle.) (C. U. '57)

4. সরল দোলগতির সংজ্ঞা লিখ। প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্ত বরাবর সমগতি দুইটি সমকোণী সরল দোলগতির সমতুল্য।

(Define SHM. Show that a uniform circular motion is equivalent to two SHM's at right angles to each other.)

(C. U. '53, '79)

5. সরল দোলগতির সংজ্ঞা লিখ এবং ইহার বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা কর। প্রমাণ কর যে, সরল দোলগতিবিশিষ্ট কোন বস্তুর ত্বরণ কেন্দ্রবিন্দু অভিমুখী এবং ইহার মান সরণের সমানুপাতিক।

(Define SHM and explain its characteristics. Prove that the acceleration of a particle executing SHM is directed towards the centre and is proportional to its displacement.)

(B. U. '77)

6. সরল দোলগতির সংজ্ঞা লিখ এবং বিস্তার ও দশা বলিতে কি বুঝায় ব্যাখ্যা কর। দেখাও যে, সমান পর্যায়কাল, ভিন্ন বিস্তার ও দশাবিশিষ্ট দুইটি পরপর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দোলগতির লব্ধি গতি হইবে উপবৃত্ত গতি।

(Define SHM and explain the terms amplitude and phase. Show that the resultant of two SHM's of the same period but different amplitudes and phases in perpendicular direction, is an elliptic motion.) (C. U. '69, '74)

7. সমান পর্যায়কাল, ভিন্ন বিস্তার ও দশা বিশিষ্ট দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল সরল দোলগতি একটি কণার উপর আরোপিত হইলে প্রমাণ কর যে উহাদের লব্ধ সরণ সাধারণতঃ একটি উপবৃত্ত হইবে। কোন্ অবস্থায় ইহা বৃত্তাকার হইবে তাহা আলোচনা কর।

(Two SHM's having the same period but with different amplitudes and phases are acting in mutually perpendicular directions upon a particle. Show that the resulting motion is elliptical in general. Discuss the case when the motion becomes circular.)

(C. U. '60, '61, '72, '76)

8. সংক্ষেপে টীকা লিখ ঃ লিসাজুর চিত্র।

(Write a short note on Lissajou's figure.) (C. U. '73)

9. সরল দোলক কাহাকে বলে ? একটি সরল দোলকের দোলনকালের রাশিমালা নির্ণয় কর। ইহার সাহায্যে g-এর মান কিরূপে নির্ণয় করিবে ? 'g' এর মান নির্ভুলভাবে নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর।

(What is simple pendulum ? Obtain an expression for the time period of a simple pendulum. How can you ordinarily determine the value of 'g' with it ? Describe any accurate method you know for its determination.) (C. U '62)

10. সরল দোলক ও যৌগিক দোলকের পার্থক্য বর্ণনা কর এবং সরল দোলকের সূত্রাবলী বিবৃত কর। একটি সরল দোলকের দোলনকালের রাশিমালা নির্ণয় কর।

(Distinguish between a simple and a compound pendulum and state the laws of a simple pendulum. Obtain an expression for the periodic time of a simple pendulum.) (C. U. '64)

11. সরল দোলগতি নিষ্পন্নকারী কোন বস্তুর সর্বোচ্চ বেগ হইল 10 cm/second। যদি কণাটির বিস্তার 3 cm হয় তবে দোলনকাল কত হইবে নির্ণয় কর।

(The maximum velocity of a particle executing SHM is 10 cm / second. If the amplitude of the motion is 3 cm, find the time period.) [Ans. 1·88 second] (C. U. '79)

12. সরল দোলগতি নির্বাহকারী একটি বস্তুর বিস্তার 10 cm এবং দোলনকাল 1·5 second। স্থির অবস্থান হইতে $5\sqrt{3}$ cm দূরত্ব অতিক্রম করিতে বস্তুটির কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

(A body executing SHM has an amplitude of 10 cm and time period is 1·5 second. Calculate the time taken by the body to travel a distance $5\sqrt{3}$ cm from its rest position.)

[Ans. 0·25 second]

13. একটি দোলগতির সময়-সরণ সমীকরণ হইতেছে $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$। দেখাও যে, বেগ ও ত্বরণ নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কযুক্ত $\omega^2 v^2 + f^2 = a^2\omega^4$।

(The space time equation for a SHM is given by $x = a \sin(\omega t + \epsilon)$. Show that the velocity v and acceleration f satisfy $\omega^2 v^2 + f^2 = a^2\omega^4$.)

14. 200 gram ভরের একটি বস্তু উহার ভারকেন্দ্র হইতে 20 cm দূরত্বে অবস্থিত অনুভূমিক অক্ষের সাপেক্ষে দুলিতেছে। তুল্য সরল দোলকের দৈর্ঘ্য যদি 35 cm হয় তবে নিলম্বন অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জাড্য ভ্রামক নির্ণয় কর।

(A body of mass 200 grams oscillates about a horizontal axis at a distance of 20 cm from its centre of gravity. If the length of the equivalent simple pendulum be 35 cm, find its moment of inertia about the axis of suspension.) [Ans. 14×10^4 gram cm^2]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

তরঙ্গ গতি

(Wave Motion)

2.1 সূচনা (Introduction)

যে কোন সময়ে আন্দোলিত অবস্থায় আছে এরূপ কণাগুলির অবস্থান একটি বক্ররেখা নির্দেশ করিবে। যদি এই কণাগুলি গতিশীল হয় তবে বক্ররেখাটি সম্মুখের দিকে অগ্রসর হইতেছে বলিয়া মনে হইবে, এই গতিশীল বক্ররেখাকে তরঙ্গ বলা হয়।

তরঙ্গকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়—**অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ ও তির্যক তরঙ্গ**। কোন মাধ্যমের ভিতর দিয়া অগ্রসর হইবার সময় যদি মাধ্যমের কণাগুলির কম্পন তরঙ্গ বিস্তারের অভিমুখের সাথে সমান্তরাল হয় তখন সেই তরঙ্গকে বলা হয় অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ; অপরপক্ষে যদি মাধ্যমের কণাগুলি কম্পন তরঙ্গ বিস্তারের অভিমুখের সহিত লম্বভাবে থাকে তবে তাহাকে তির্যক তরঙ্গ বলে। শব্দ যখন বায়ু মাধ্যমের ভিতর দিয়া গমন করে তখন অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের উৎপত্তি হয়। কিন্তু জলে ঢিল ফেলিলে অথবা একটি টান করা তারকে টানিয়া ছাড়িয়া দিলে তির্যক তরঙ্গের আকারে বিস্তার লাভ করে।

2.2 প্রগামী তরঙ্গ বা চল তরঙ্গ (Progressive wave)

যখন কোন তরঙ্গ সময়ের সহিত মাধ্যমের মধ্য দিয়া অগ্রসর হয় তখন তাহাকে চল তরঙ্গ বা প্রগামী তরঙ্গ বলে। এক্ষেত্রে কেবল মাধ্যমে সৃষ্ট আন্দোলন অগ্রসর হয় কিন্তু কণাগুলির কোন স্থান পরিবর্তন হয় না। চল তরঙ্গের গতিবেগ মাধ্যমের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

2.2.1 প্রগামী বা চল তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of progressive wave)

(i) কোন মাধ্যমের ভিতর দিয়া যখন চল তরঙ্গ অগ্রসর হইতে থাকে তখন বিভিন্ন বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের একইরূপ পরিবর্তন হয়।

(ii) মাধ্যমের প্রতিটি কণার বিস্তার ও কম্পাঙ্ক একই হয় এবং উহারা একই প্রকৃতির কম্পনে কম্পিত হয়।

(iii) তরঙ্গের বিস্তার-রেখা বরাবর দুইটি কণার দশা-পার্থক্য উহাদের দূরত্বের সহিত সমানুপাতিক হয়।

(iv) এই তরঙ্গ, তরঙ্গ মুখের লম্ব অভিমুখে শক্তি বহন করিয়া লয়।

(v) মাধ্যমের ঘনত্ব ও স্থিতিস্থাপকতার উপর নির্ভর করিয়া চল তরঙ্গ মাধ্যমের ভিতর দিয়া একটি নির্দিষ্ট বেগে অগ্রসর হয়।

2,3 প্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ (Equation of progressive wave)

মনে করি, প্রগামী তরঙ্গ X-অক্ষ বরাবর অগ্রসর হইতেছে। ধরা যাক, t সময়ে মূলবিন্দু O-তে অবস্থিত কোন কণার সরণ y। তির্যক তরঙ্গের ক্ষেত্রে সরণ Y-অক্ষ বরাবর এবং অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে সরণ X-অক্ষ বরাবর হইবে।

এক্ষণে, সরল দোলগতিতে কম্পমান কোন কণার t সময়ে সরণ,

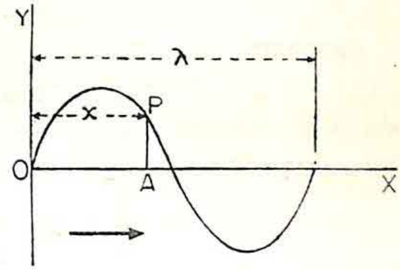
$$y = a \sin \omega t \qquad \dots (2.1)$$

যেখানে, a = কণাটির কম্পনের বিস্তার

$\omega = 2\pi n$, (n = কম্পাঙ্ক)

এবং $\omega t = 2\pi n t$ = কণাটির দশা।

আলোচ্য কণাটি হইতে x দূরত্বে যে কোন বিন্দু A-তে অবস্থিত আর একটি কণা P অনুরূপভাবে কম্পমান হইবে (চিত্র2.1), কিন্তু দূরত্বের জন্য উহার কিছু দশা-পার্থক্য দেখা যাইবে। আমরা জানি, কোন কণা যখন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের (λ) সমান দূরত্ব অতিক্রম করে তখন দশার পরিবর্তন হয় 2π; সুতরাং প্রথম কণা হইতে x দূরত্বে দ্বিতীয় কণা P-এর দশা-পার্থক্য হইবে $\frac{2\pi}{\lambda}x$.



চিত্র 2.1

$\therefore$ t সময়ে দ্বিতীয় কণাটির দশা $= \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

এবং উহার সরণ, $$y = a \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad \dots (2.2)$$

$$= a \sin \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad \left[\because \quad \omega = \frac{2\pi}{T}\right]$$

$$= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \dots (2.3)$$

আমরা জানি, $\lambda = VT$

যেখানে V = তরঙ্গের বেগ

অর্থাৎ, $$\frac{1}{T} = \frac{V}{\lambda} \qquad \dots (2.4)$$

অতএব সমীকরণ (2.3) হইতে পাই,

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{Vt}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(Vt - x) \qquad \dots (2.5)$$

সমীকরণ (2.3) অথবা (2.5) হইতেছে ধনাত্মক X-অক্ষ অভিমুখী প্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ। অনুরূপভাবে ঋণাত্মক x-অক্ষ অভিমুখী প্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হইবে,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t + x) \quad \ldots \quad (2.6)$$

2.4 প্রগামী তরঙ্গে কণার বেগ (Velocity of a particle in the progressive wave)

প্রগামী তরঙ্গে কণার সরণ সমীকরণ হইতেছে,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x)$$

সুতরাং কণাটির বেগ, $\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi a\mathrm{v}}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x)$ ... (2.7)

আবার সরণ লেখচিত্রের নতি,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x) \quad \ldots \quad (2.8)$$

সমীকরণ (2.7) এবং (2.8) হইতে পাই,

$$\frac{dy}{dt} = -\mathrm{v} \frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad (2.9)$$

∴ কণার বেগ = − (তরঙ্গের বেগ × সরণ লেখচিত্রের নতি)

2.5 প্রগামী তরঙ্গের অবকল সমীকরণ (Differential equation of a progressive wave)

প্রগামী তরঙ্গের সরণ সমীকরণকে লিখিতে পারি,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x)$$

'x'-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x) \quad \ldots \quad (2.10)$$

পুনরায় 'x'-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4\pi^2 a}{\lambda^2} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x)$$

$$= -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} y \quad \ldots \quad (2.11)$$

এক্ষণে 't'-এর সাপেক্ষে y কে অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi\mathrm{v}}{\lambda} a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathrm{v}t - x) \quad \ldots \quad (2.12)$$

't'-এর সাপেক্ষে পুনরায় অবকলন করিয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\ a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= -\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \cdot y \qquad \dots (2.13)$$

সমীকরণ (2.11) এবং (2.13) হইতে পাই,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \dots (2.14)$$

সমীকরণ (2.14) হইতেছে প্রগামী তরঙ্গের অবকল সমীকরণ। এই সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি,

কণার ত্বরণ $= v^2 \times$ সরণ লেখচিত্রের নতি পরিবর্তনের হার।

2.6 প্রগামী তরঙ্গের শক্তি (Energy of progressive wave)

কোন একটি সময়ে কম্পমান মাধ্যমের কণার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির সমষ্টি ধ্রুবক হয়। গতিশক্তির মান সর্বোচ্চ হইলে স্থিতিশক্তি শূন্য হয় অথবা স্থিতিশক্তি সর্বোচ্চ হইলে গতিশক্তি শূন্য হয়।

প্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হইতে পাই,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

প্রতি একক আয়তনে যত সংখ্যক কণা আছে উহাদের গতিশক্তি

$$= \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad [\ \rho = \text{মাধ্যমের ঘনত্ব}\ ]$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho\ \frac{4\pi^2 a^2 v^2}{\lambda^2} \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \qquad \dots (2.15)$$

এবং স্থিতিশক্তি $=$ বল $\times\ dy$ (সরণ)

$=$ একক আয়তনের ভর $\times$ ত্বরণ $\times\ dy$

$= \rho\ .\ \omega^2 y\ .\ dy$

অতএব y সরণের মোট স্থিতিশক্তি $= \int_0^y \rho . \omega^2 y . dy$

$$= \tfrac{1}{2}\ \rho \omega^2 y^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \rho\ \frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\ a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$\left[\because\ \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}\right] \qquad \dots (2.16)$$

মাধ্যমের প্রতি একক আয়তনে মোট শক্তি

$$= \text{গতিশক্তি} + \text{স্থিতিশক্তি}$$

$$= \frac{1}{2}\rho\ \frac{4\pi^2 a^2 \mathrm{v}^2}{\lambda^2}\left[\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{v}t-x)+\cos^2\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{v}t-x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho\ \frac{4\pi^2 a^2 \mathrm{v}^2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho \frac{4\pi^2 a^2 n^2 \lambda^2}{\lambda^2} \qquad [\because\ \mathrm{v}=n\lambda]$$

$$= 2\ \rho\pi^2 a^2 n^2 \qquad \cdots \quad (2.17)$$

প্রতি একক আয়তনে মাধ্যমের মোট শক্তিকে উহার শক্তি ঘনত্ব (**Energy density**) বলে। সমীকরণ (2.17) হইতে দেখিতে পাই যে, শক্তি ঘনত্ব মাধ্যমের ঘনত্বের সমানুপাতিক এবং কণার কম্পন-বিস্তার ও কম্পাঙ্কের বর্গের সমানুপাতিক। মাধ্যমের ভিতর তরঙ্গ বিস্তারের দিকে একক ক্ষেত্রফলের তরঙ্গ-মুখ দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে যে পরিমাণ শক্তি প্রবাহিত হয় তাহাকে শব্দ তরঙ্গের তীব্রতা (**Intensity of sound wave**) বলে। যেহেতু তরঙ্গ প্রতি সেকেণ্ডে v দূরত্ব অতিক্রম করে, অতএব,

শব্দ তরঙ্গের তীব্রতা $=$ শক্তি ঘনত্ব $\times$ তরঙ্গ বেগ

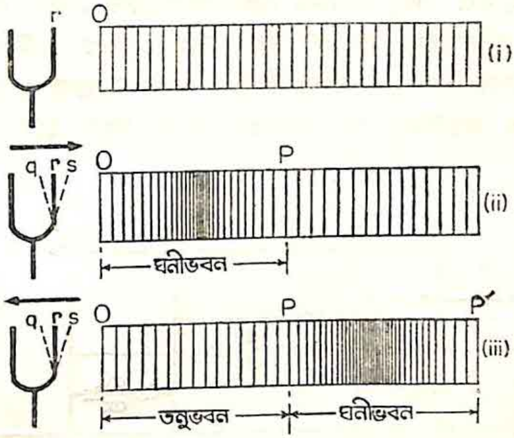
$$= 2\rho\pi^2 a^2 n^2 \mathrm{v} \qquad \cdots \quad (2.18)$$

2.7 বায়ু মাধ্যমে শব্দ বিস্তারের কৌশল (Mechanism of propagation of sound through air)

কোন শব্দ কিরূপে বায়ু মাধ্যমে বিস্তার লাভ করে তাহা চিত্র 2.2তে বোঝানো হইয়াছে। চিত্র 2.2(i)-এর ন্যায় দুই মুখ উন্মুক্ত একটি অনুভূমিক নলের অভ্যন্তরে একটি বায়ুস্তম্ভ আবদ্ধ আছে, যাহা অসংখ্য পাতলা খাড়া বায়ুস্তরে বিভক্ত বলিয়া মনে করা যাইতে পারে। মনে করি সুরশলাকার একটি বাহুর স্থির অবস্থান *r* এবং উহার উভয় পার্শ্বে বিস্তারের চরম অবস্থান *q* এবং *s*।

সুরশলাকার বাহুটি যখন *q* হইতে *s* এর দিকে যাইতে শুরু করিবে [চিত্র 2.2(ii)] তখন উহার সামনের বায়ুস্তর ঘনীভূত হইবে। স্থিতিস্থাপকতার জন্য এই সংনমিত বায়ুস্তর দ্রুত স্বাভাবিক অবস্থায় ফিরিয়া আসিতে চাহিবে। ইহার ফলে ইহা দ্বিতীয় বায়ুস্তরের উপর চাপ প্রয়োগ করিবে এবং উহা সংনমিত ও ঘনীভূত হইবে। এইরূপে বায়ুস্তরগুলি পর পর ঘনীভূত হইতে থাকিবে যতক্ষণ পর্যন্ত সুরশলাকার বাহুটি *q* হইতে *s* অবস্থানে না পেঁছাইবে। ধরা যাক, সুরশলাকার বাহুটির এই অর্ধকম্পনকালে ঘনীভবন (**Compression**) হয় O থেকে P পর্যন্ত।

এক্ষণে সুরশলাকার বাহুটি s অবস্থান হইতে q এর দিকে যাত্রা শুরু করিবে এবং উহার পশ্চাতে আংশিক শূন্যতার সৃষ্টি হইবে [চিত্র 2.2 (iii]। এই শূন্যতা



চিত্র 2.2

পূরণের জন্য পূর্বোক্ত প্রথম বায়ুস্তর সুরশলাকার বাহুর দিকে প্রসারিত হইবে; অর্থাৎ উহার চাপ স্বাভাবিকের তুলনায় হ্রাস পাইয়া তনুভূত হইবে। এই তনুকরণ (**rarefaction**) এক স্তর হইতে অপর স্তরে স্থানান্তরিত হইতে থাকিবে যতক্ষণ না সুরশলাকার বাহুটি q অবস্থানে ফিরিয়া আসে।

মনে করি, সুরশলাকার বাহুটি s হইতে q অবস্থানে ফিরিয়া যাইবার অবকাশে ঘনীভবন P হইতে P′ দূরত্ব পর্যন্ত অগ্রসর হয়। তনুভবন এই সময়ে O হইতে P পর্যন্ত অর্থাৎ ঘনীভবন যে অঞ্চল জুড়িয়া পূর্বে ছিল সেই অঞ্চল জুড়িয়া থাকিবে। যতক্ষণ পর্যন্ত সুরশলাকার কম্পন চলিতে থাকিবে ততক্ষণ একইভাবে পর্যায়ক্রমে একটি ঘনীভবন ও একটি তনুভবন সৃষ্টি হইয়া একটি পূর্ণ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ গঠন করিবে এবং উহারা একটির পর একটি বায়ু মাধ্যমের ভিতর শব্দের বেগে অগ্রসর হইবে।

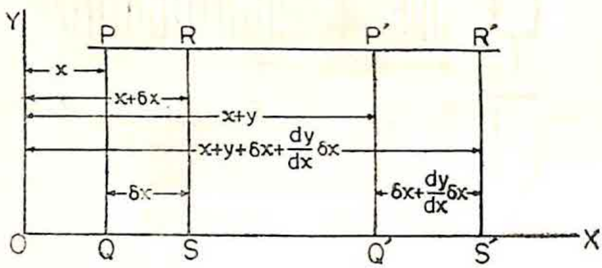
এখানে উল্লেখযোগ্য একটি পূর্ণকম্পনকালে সুরশলাকার বাহুর গতিবেগ বিভিন্ন হয়। গতিপথের ঠিক মধ্যে বেগ হয় সর্বাধিক এবং উহার দুই পার্শ্বে চরম অবস্থানে বেগ হয় ন্যূনতম। ইহার ফলে ঘনীভবন অথবা তনুভবনের মধ্যস্থলের বায়ুগুলি সর্বাধিক ঘনীভূত অথবা তনুভূত হয়, যেমন চিত্রে দেখানো হইয়াছে। যেহেতু ঘনীভবন এবং তনুভবন উভয়েই সুরশলাকার অর্ধকম্পনকালে সৃষ্ট উহাদের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

2.8 অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গে চাপের বণ্টন (Distribution of pressure in longitudinal waves)

আমরা জানি, অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের সহিত চাপ তরঙ্গও (**Pressure wave**) মাধ্যমের

মধ্য দিয়া অগ্রসর হয়। মাধ্যমের চাপের অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের সহিত যে পরিবর্তন হয় তাহা নিম্নলিখিত উপায়ে নির্ণয় করিতে পারি।

কোন গ্যাসীয়, যথা বায়ু, মাধ্যমের একক প্রস্থচ্ছেদের একটি চোঙ লইলাম যাহার ভিতরে তরঙ্গের অভিমুখের অভিলম্বভাবে PQ ও RS দুইটি বায়ুস্তর আছে (চিত্র 2.3)। স্থির বিন্দু O হইতে উহাদের দূরত্ব যথাক্রমে x ও $x+\delta x$। অর্থাৎ PQ ও RS এর অভ্যন্তরে যে বায়ুস্তর আছে তাহার দৈর্ঘ্য δx এবং আয়তন $\delta x \times 1 = \delta x$।



চিত্র 2.3

এক্ষণে মনে করি ধনাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে অগ্রসর হইতেছে এমন কোন অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ PQ স্তরকে y সরণ ঘটাইয়া P′Q′ অবস্থানে আনিল এবং ইহার ফলে RS স্তর R′S′ অবস্থানে আসিল। যেহেতু x অভিমুখে y সরণ হইল, অতএব দূরত্বের সহিত সরণের পরিবর্তনের হার $= \frac{dy}{dx}$। অর্থাৎ PQ ও RS এর ভিতর δx দূরত্বের জন্য সরণের পরিবর্তন

$$= \frac{dy}{dx}\,\delta x$$

∴ RS স্তরের সরণ = PQ স্তরের সরণ + δx দূরত্বের জন্য সরণ

$$= y + \frac{dy}{dx}\,\delta x$$

অর্থাৎ স্থির বিন্দু O হইতে R′S′ স্তরের দূরত্ব

$$= x + \delta x + y + \frac{dy}{dx}\,\delta x$$

সুতরাং P′Q′ ও R′S′-এর মধ্যে আবদ্ধ বায়ুর দৈর্ঘ্য

$$= \left(x + \delta x + y + \frac{dy}{dx}\delta x\right) - (x + y)$$

$$= \delta x + \frac{dy}{dx}\,\delta x$$

এবং উহার আয়তন

$$= \left(\delta x + \frac{dy}{dx}\,\delta x\right) \times 1$$

∴ আবদ্ধ বায়ুর আয়তনের পরিবর্তন

$$= \left(\delta x + \frac{dy}{dx}\,\delta x\right) - \delta x$$

$$= \frac{dy}{dx}\,\delta x$$

অর্থাৎ আয়তন বিকৃতি $= \dfrac{\frac{dy}{dx}\,\delta x}{\delta x}$

$$= \frac{dy}{dx}$$

অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের জন্য চাপের পরিবর্তন dp হইলে, মাধ্যমের আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক $\mathrm{K} = \dfrac{dp}{-\frac{dy}{dx}}$ হইবে। এক্ষেত্রে ঋণাত্মক চিহ্ন বুঝাইতেছে যে চাপ বৃদ্ধি পাইলে আয়তন হ্রাস এবং চাপ হ্রাস পাইলে আয়তন বৃদ্ধি পায়। অতএব আমরা পাই,

$$dp = -\mathrm{K}\,\frac{dy}{dx} \qquad \cdots \quad (2.19)$$

আবার, $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{V}t - x)$ ... (2.20)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi a}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{V}t - x)$$

$$\therefore \quad dp = \frac{2\pi a \mathrm{K}}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{V}t - x)$$

$$= \frac{2\pi a \mathrm{K}}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left[(\mathrm{V}t - x) + \frac{\pi}{2}\right] \qquad \cdots \quad (2.21)$$

সমীকরণ (2.21) তরঙ্গের যে কোন বিন্দুতে অতিরিক্ত চাপ প্রকাশ করে। সমীকরণ (2.20) ও (2.21) কে তুলনা করিয়া পাই, dp-এর দশা y-এর থেকে $\frac{\pi}{2}$ অগ্রবর্তী। অর্থাৎ, যখন $y = 0$, $dp = 2\pi ak/\lambda$ (চাপ পরিবর্তনের সর্বোচ্চ মান) এবং যখন $y = a$, $dp = 0$।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. দেখাও যে, $y=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{v}t-x)$ সমীকরণটি X-অক্ষ অভিমুখী প্রগামী তরঙ্গ প্রকাশ করে ; যেখানে বিস্তার, তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও বেগ যথাক্রমে a, λ ও v।

(Show that the equation $y=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\mathrm{v}t-x)$ represents a progressive wave along the X-axis ; where the amplitude, velocity and wavelength are respectively a, λ and v.)

2. প্রমাণ কর যে, প্রগামী তরঙ্গের শক্তি ঘনত্বের মান কম্পনের বিস্তারের বর্গের এবং কম্পাঙ্কের বর্গের সমানুপাতিক। ইহা হইতে শব্দের তীব্রতার রাশিমালা নির্ণয় কর।

(Prove that the energy density of a progressive wave is proportional to the square of the amplitude and the square of the frequency of vibration. Hence find out an expression for the intensity of sound)

3. প্রমাণ কর যে, প্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে কণার বেগ $\frac{dy}{dt}=-\mathrm{v}\frac{dy}{dx}$। ইহা হইতে প্রগামী তরঙ্গের অবকল সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

(Prove that the particle velocity of a progressive wave is $\frac{dy}{dt}=-\mathrm{v}\frac{dy}{dx}$. Hence derive the differential equation of a progressive wave.)

4. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ ঃ

(a) শব্দ তরঙ্গের শক্তি,

(b) শব্দ বিস্তারের কৌশল,

(c) প্রগামী তরঙ্গ।

(Write short notes on :

(a) Energy in sound waves, (C. U. '67)

(b) Mechanism of sound propagation, (C. U. '68)

(c) Progressive waves.). (C. U. '71)

5. গ্যাসীয় মাধ্যমের ভিতর দিয়া শব্দতরঙ্গের বিস্তার কৌশল ব্যাখ্যা কর। প্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে একটি গ্যাস স্তম্ভে শব্দ চাপ বণ্টনের রাশিমালা উপপাদন কর।

(Explain the mechanism of propagation of sound waves in a gaseous medium.

Deduce an expression for the accoustic pressure distribution in a column of gas at any instant of time for a plane progressive wave.) (C. U. '72)

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

শব্দ তরঙ্গের পারস্পরিক ক্রিয়া

(Interaction of Sound Waves)

3.1 সূচনা (Introduction)

উপরিপাতের নীতি (**principle of superposition**) অনুযায়ী বলা হয়, মাধ্যমের কোন কণা যদি একই সাথে দুই বা ততোধিক তরঙ্গ দ্বারা আন্দোলিত হয় তবে উহার লব্ধি সরণের মান এক একটি তরঙ্গ আলাদাভাবে কণাটিকে আন্দোলিত করিলে যে সরণ হইত তাহাদের ভেক্টর যোগফলের সমান হইবে। শব্দের স্থাণুতরঙ্গ, ব্যতিচারণ ও স্বরকম্প উপরিপাতের এই নীতির উপর প্রতিষ্ঠিত। মনে করি, মাধ্যমের একটি কণার উপর দুইটি তরঙ্গের যুগপৎ উপরিপাত ঘটিয়াছে। এক্ষেত্রে লব্ধি সরণ $\vec{x}$ কে লেখা যাইতে পারে,

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \qquad \dots (3.1)$$

যেখানে $\vec{x}_1$ এবং $\vec{x}_2$ যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় তরঙ্গের সরণ।

3.2 স্থাণু তরঙ্গ (Stationary wave)

দুইটি সমবিস্তার ও সমপর্যায়কাল যুক্ত প্রগামী তরঙ্গ বিপরীত দিক্ হইতে সমবেগে অগ্রসর হইয়া একটি আবদ্ধ স্থানে উপরিপন্ন (**superposed**) হইলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাহাকে স্থাণু তরঙ্গ বলে। এই তরঙ্গ যেখানে গঠিত হয় মাধ্যমের সেই অংশেই সীমাবদ্ধ থাকে। কোন দিকেই আর অগ্রসর হয় না ; কেবল সময়ের সহিত পর্যায়ক্রমে সংকুচিত ও প্রসারিত হয়।

প্রগামী তরঙ্গের ন্যায় স্থাণু তরঙ্গও অনুদৈর্ঘ্য ও অনুপ্রস্থ এই দুই প্রকার হইতে পারে।

3.2.1 স্থাণু তরঙ্গের গঠন (Formation of stationary wave)

ধনাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে প্রগামী তরঙ্গের সরণ সমীকরণকে লিখিতে পারি,

$$y_1 = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) \qquad \dots (3.2)$$

এবং ঋণাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে সমীকরণ,

$$y_2 = a \sin \omega \left(t + \frac{x}{V}\right) \quad \cdots \quad (3.3)$$

যেখানে, a = তরঙ্গের বিস্তার, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ = পর্যায়কাল এবং V = বেগ

বিপরীত অভিমুখী এই প্রগামীতরঙ্গ দুইটির যুগপৎ ক্রিয়ার দরুণ t সময়ে মাধ্যমে কোন কণার লব্ধি সরণ,

$$y = y_1 + y_2$$

$$= a \sin \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) + a \sin \omega \left(t + \frac{x}{V}\right)$$

$$= 2a \cos \frac{\omega x}{V} \sin \omega t$$

এক্ষণে, $\frac{\omega x}{V} = \frac{2\pi x}{VT} = \frac{2\pi x}{\lambda}$

$$\therefore \quad y = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t$$

$$= A \sin \omega t \quad \cdots \quad (3.4)$$

যেখানে, $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$

সমীকরণ (3.4) স্থাণু তরঙ্গ উৎপন্নকারী তরঙ্গদ্বয়ের সমপর্যায়কাল বিশিষ্ট সরল দোলগতির সমীকরণ, যাহার বিস্তার $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ ।

যখন, $\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \cdots, n\pi$ হইবে

অর্থাৎ যে সমস্ত বিন্দুতে, $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \ldots, n\frac{\lambda}{2}$ হইবে

সেই সব বিন্দুতে $A = \pm 2a$ হইবে। ইহাই সর্বাধিক বিস্তারের মান।

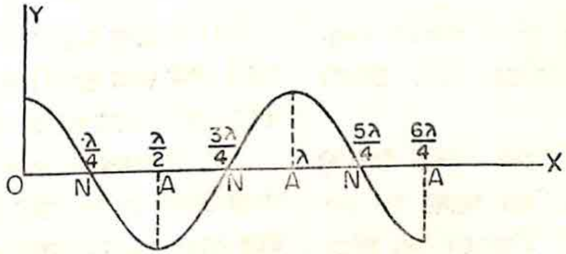
পুনরায় যখন, $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে

অর্থাৎ যে সমস্ত বিন্দুতে, $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots, (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ হইবে

সেই সব বিন্দুতে, A = 0 হইবে।

যে সমস্ত বিন্দুতে বিস্তারের মান সর্বাধিক হয় তাহাদের সুস্পন্দ বিন্দু (Antinodes) এবং যে সমস্ত বিন্দুতে কণাগুলির কোন কম্পন হয় না তাহাদের

নিস্পন্দ বিন্দু (Nodes) বলে। সুস্পন্দ এবং নিস্পন্দ বিন্দু উভয় ক্ষেত্রেই পরপর দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব $=\frac{\lambda}{2}=$ অর্ধেক তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য। চিত্র 3.1 এ, সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ



চিত্র 3.1

বিন্দুর অবস্থান A ও N দ্বারা দেখানো হইয়াছে। ইহা দেখা যাইতেছে যে, পর পর দুইটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি নিস্পন্দ বিন্দু অথবা পর পর দুইটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি সুস্পন্দ বিন্দু রহিয়াছে।

সুস্পন্দ বিন্দুতে কণার সরণ, $y=\pm 2a \sin \omega t$

$$=\pm 2a \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad \ldots (3.5)$$

এবং নিস্পন্দ বিন্দুতে কণার সরণ, $y=0$. ... (3.6)

3.2 2 স্থাণু তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যাবলী (Characteristics of stationary wave)

উপরি-উক্ত আলোচনা হইতে স্থাণু তরঙ্গের নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্যগুলি লক্ষ্য করা যায়ঃ

(i) স্থাণু তরঙ্গের বিভিন্ন বিন্দুতে কণার কম্পনের বিস্তার পৃথক হইয়া থাকে। যে সমস্ত বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক তাহাদের সুস্পন্দ বিন্দু এবং যে সব বিন্দুতে কোন কম্পন হয় না তাহাদের নিস্পন্দ বিন্দু বলে।

(ii) পর পর দুইটি সুস্পন্দ বা নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব স্থাণু তরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

(iii) সুস্পন্দ বিন্দুতে কণার বেগ ও ত্বরণ সর্বাধিক কিন্তু নিস্পন্দ বিন্দুতে সর্বনিম্ন। অপরপক্ষে নিস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন সর্বাধিক কিন্তু সুস্পন্দ বিন্দুতে সর্বনিম্ন হয়।

(iv) পর পর দুইটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে তরঙ্গের অংশকে লুপ (Loop) বলে। একটি লুপের কণাগুলির সরণ একই দিকে ঘটে।

(v) স্থাণু তরঙ্গ মাধ্যমের যে অংশে সৃষ্ট হয় সেই অংশেই পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয় এবং উহার পর্যায় ঐ তরঙ্গ সৃষ্টিকারী দুই প্রগামী তরঙ্গের পর্যায়কালের সমান।

3.2.3 প্রগামী তরঙ্গ ও স্থাণু তরঙ্গের মধ্যে তফাত (Distinction between progressive and stationary waves)

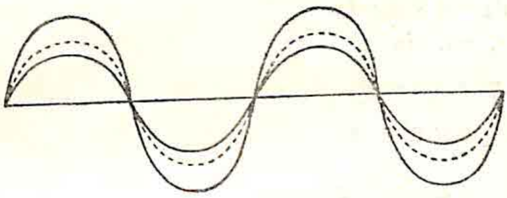
প্রগামী তরঙ্গ	স্থাণু তরঙ্গ
(i) মাধ্যমের কোন অঞ্চলের কণাগুলির পর্যাবৃত্ত গতির দরুণ প্রগামী তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।	(i) মাধ্যমের মধ্য দিয়া বিপরীতমুখী দুইটি একই রকম প্রগামী তরঙ্গের উপরিপাতের দরুণ স্থাণু তরঙ্গের উৎপত্তি হয়।
(ii) প্রগামী তরঙ্গ একটি নির্দিষ্ট বেগে মাধ্যমের মধ্য দিয়া অগ্রসর হয় এবং তরঙ্গের বিস্তারের অভিমুখে কণা হইতে কণাতে কম্পন হস্তান্তরিত হয়।	(ii) মাধ্যমের যে অংশে প্রগামী তরঙ্গদ্বয়ের উপরিপাত হয়, সেই অংশেই স্থাণু তরঙ্গ আবদ্ধ থাকে। সময়ের সহিত উহা অগ্রসর হয় না ; তবু পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়।
(iii) এক্ষেত্রে মাধ্যমের প্রতিটি কণার বিস্তার সমান কিন্তু উহাদের মধ্যে দশার পার্থক্য থাকে।	(iii) এক্ষেত্রে মাধ্যমের প্রতিটি কণার দশা সমান কিন্তু বিস্তার পৃথক হইয়া থাকে। নিস্পন্দ বিন্দুতে কণার বিস্তার সর্বাপেক্ষা কম এবং সুস্পন্দ বিন্দুতে বিস্তার সর্বাপেক্ষা বেশী।
(iv) বিস্তার, ত্বরণ, বেগ, ঘনত্ব, শক্তি, চাপ পরিবর্তন ইত্যাদি সাপেক্ষে মাধ্যমের প্রতিটি কণা একই রকম পরিবর্তন চক্রের মধ্য দিয়া আবর্তিত হয়।	(iv) এক্ষেত্রে বিস্তার, বেগ ও চাপ পরিবর্তন এক বিন্দু হইতে অপর বিন্দুতে বিভিন্ন হয় কিন্তু প্রতিবিন্দুতে উহাদের মান স্থির।
(v) একটি পূর্ণ কম্পনে কোন সময়ই মাধ্যমের সকল কণা এক সঙ্গে স্থির অবস্থায় আসে না।	(v) একটি পূর্ণ কম্পনে মাধ্যমের সকল কণা দুইবার একসঙ্গে স্থির অবস্থায় আসে।
(vi) প্রগামী তরঙ্গের সরণ সমীকরণ হইল ঃ $y=a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)$	(vi) স্থাণু তরঙ্গের সরণ সমীকরণ হইল ঃ $y=2a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t$

3.3 শব্দের ব্যতিচারণ (Interference of sound)

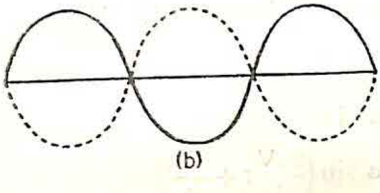
একই বিস্তার ও কম্পাংক বিশিষ্ট দুইটি শব্দতরঙ্গ যখন একই দিকে অগ্রসর হইয়া পরস্পরের উপর আপতিত হয় তখন মাধ্যমের কোন স্থানে শব্দ তীব্র হইবে আবার কোন স্থানে নিঃশব্দ হইবে, ইহাকে শব্দের ব্যতিচারণ বলে। যখন উভয় তরঙ্গ সম দশায় মিলিত হইয়া তীব্র শব্দ সৃষ্ট হয় তখন সেই ঘটনাকে গঠনমূলক ব্যতিচারণ বা ব্যতিচার

বলে। অপরপক্ষে তরঙ্গ দুইটি যখন বিপরীত দশায় মিলিত হইয়া নিঃশব্দ হয় তখন তাহাকে বলে ধ্বংসাত্মক বা বিনাশী ব্যতিচার।

অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে যদি দুইটি তরঙ্গের ঘনীভবন বা তনুভবন একই স্থানে মিলিত হয় অথবা তির্যক তরঙ্গের ক্ষেত্রে মাধ্যমের কোন বিন্দুতে যদি একটি তরঙ্গের তরঙ্গশীর্ষ অপর তরঙ্গের তরঙ্গশীর্ষের উপর বা একটির তরঙ্গ-পাদ অপরটির তরঙ্গ-পাদের উপর পতিত হয় [চিত্র 3.2 (*a*)] অর্থাৎ তরঙ্গদ্বয় যদি সমদশায় মিলিত হয় তবে সেই স্থলে জোরালো শব্দ শোনা যাইবে। কারণ এক্ষেত্রে লব্ধ তরঙ্গের বিস্তার তরঙ্গদ্বয়ের বিস্তারের যোগফলের সমান হইবে। পক্ষান্তরে, যদি একটি তরঙ্গের ঘনীভবন কোন বিন্দুতে অন্য একটি তরঙ্গের তনুভবনের সহিত মিলিত হয় বা একটি তরঙ্গের তরঙ্গশীর্ষ অপর তরঙ্গের তরঙ্গপাদের উপর পড়ে [চিত্র 3.2 (*b*)] অর্থাৎ তরঙ্গদ্বয় যদি বিপরীত



(a)



(b)

চিত্র 3.2

দশায় মিলিত হয় তবে সেই স্থলে শব্দের তীব্রতা শূন্য হওয়ায় নিঃশব্দ হইবে। সুতরাং আমরা দেখিতেছি যে, একই ধরনের দুইটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে মাধ্যমের কোথাও তীব্র শব্দ আবার কোথাও নিঃশব্দ হইবে।

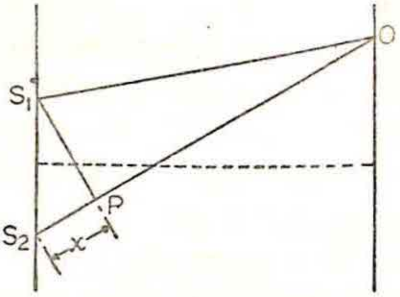
প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য, শব্দের ব্যতিচারণ ও আলোকের ব্যতিচারণের ভিতর একটি বিশেষ পার্থক্য আছে। আলোকের ব্যতিচারণের ক্ষেত্রে আলোক তরঙ্গমালাগুলিকে একই আলোক উৎস অথবা দশাসম্বন্ধ উৎস (coherent source) হইতে সৃষ্ট হইতে হইবে কিন্তু শব্দের ব্যতিচার ভিন্ন ভিন্ন উৎস হইতে উৎপন্ন শব্দ সৃষ্টি করিতে পারে, তবে তরঙ্গদ্বয়ের বিস্তার ও কম্পাঙ্ক সেক্ষেত্রে অভিন্ন হইতে হইবে।

3.3.1 ব্যতিচারণ হইবার শর্ত (Conditions of interference)

মনে করি, S_1 ও S_2 দুইটি শব্দ উৎস যাহা হইতে একই বিস্তার ও কম্পাঙ্কের দুইটি শব্দতরঙ্গ উৎপন্ন হয় (চিত্র 3.3)। তরঙ্গদ্বয় যখন কোন একটি বিন্দু O-তে

পৌঁছাইবে তখন উহাদের ভিতর পথ-পার্থক্য হইবে,

$$S_2O \sim S_1O = S_2P = x \text{ (ধরি)}$$



চিত্র 3.3

এক্ষণে, আমরা জানি,

পথ-পার্থক্য λ হইলে দশা-পার্থক্য হয় 2π

$\therefore$ x পথ-পার্থক্যের জন্য দশা-পার্থক্য হইবে $\frac{2\pi x}{\lambda} = \phi$ (ধরি)

অতএব তরঙ্গদ্বয়ের সরণ সমীকরণ হইবে,

$$y_1 = a \sin \omega t \qquad \cdots \quad (3.7)$$

এবং $$y_2 = a \sin (\omega t + \phi) \qquad \cdots \quad (3.8)$$

সমীকরণ (3.7) হইতে পাই,

$$y_1 = a \sin \omega t$$
$$= a \sin \frac{2\pi}{T} t$$
$$= a \sin \frac{2\pi V}{\lambda} t \qquad (\because \ VT = \lambda) \qquad \cdots \quad (3.9)$$

আবার সমীকরণ (3.8) হইতে পাই,

$$y_2 = a \sin (\omega t + \phi)$$
$$= a \sin \left(\frac{2\pi V}{\lambda} t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$
$$= a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt + x) \qquad \cdots \quad (3.10)$$

তরঙ্গ দুইটি যখন O বিন্দুতে উপরিপাতিত হইবে তখন লব্ধি সরণ,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= a \sin \frac{2\pi V}{\lambda} t + a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (Vt + x)$$
$$= 2a \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left(Vt + \frac{x}{2}\right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x}{2}\right) \qquad \cdots \quad (3.11)$$

সমীকরণ (3.11) একটি সরল দোলগতির সমীকরণ। এই সমীকরণ হইতে পাই, লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার,

$$A = 2a \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{x}{2}\right) \qquad \cdots (3.12)$$

অতএব তরঙ্গের বিস্তার পথ-পার্থক্য x-এর উপর নির্ভরশীল।

যখন, $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{x}{2}\right) = \pm 1$

অর্থাৎ, $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{2} = \frac{\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \cdots, n\pi$ হইবে

অর্থাৎ, $x = 0, \frac{2\lambda}{2}, \frac{4\lambda}{2}, \cdots, 2n.\frac{\lambda}{2}$ হইবে ($n = 0, 1, 2$ ইত্যাদি)

তখন, তরঙ্গ বিস্তার সর্বাধিক হইবে

অর্থাৎ, $A = \pm 2a$ হইবে।

আবার, যখন $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{x}{2}\right) = 0$

অর্থাৎ, $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{2} = \frac{\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\cdots, (2n+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে

অর্থাৎ, $x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \cdots\cdots, (2n+1)\frac{\lambda}{2}$ হইবে

তখন, তরঙ্গ বিস্তার সর্বনিম্ন হইবে।

অর্থাৎ, $A = 0$ হইবে।

অতএব, আমরা দেখিতে পাইতেছি যে লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার সর্বাপেক্ষা বেশী অর্থাৎ শব্দের তীব্রতা সর্বোচ্চ হইবে যখন তরঙ্গদ্বয়ের ভিতর পথ-পার্থক্য হইবে $\frac{\lambda}{2}$-এর যুগ্ম গুণিতক এবং শব্দের তীব্রতা ন্যূনতম হইবে যখন তরঙ্গ দুইটির ভিতর পথ-পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক হইবে।

শব্দের ব্যতিচারণ হইবার শর্তগুলি সংক্ষেপে নিম্নরূপ ঃ

(i) উভয় শব্দতরঙ্গকে তীব্রতার বিচারে প্রায় একইরূপ হইতে হইবে,

(ii) ব্যতিচারণ সৃষ্টিকারী তরঙ্গদ্বয় একই বিস্তার ও কম্পাঙ্কের হইতে হইবে,

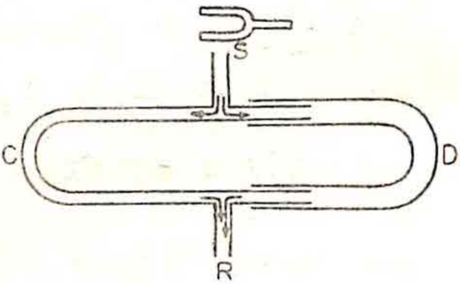
(iii) ব্যতিচারণ গঠনমূলক হইতে হইলে তরঙ্গদ্বয়ের ভিতর পথ-পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$-এর যুগ্ম গুণিতক এবং বিনাশী হইতে গেলে $\frac{\lambda}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক হইতে হইবে।

(iv) প্রত্যেকটি তরঙ্গ দ্বারা সরণ একই রেখা বরাবর হইতে হইবে।

3.3.2 তরঙ্গের ব্যতিচারণের প্রয়োগসিদ্ধ পরীক্ষা (Experimental demonstration of interference of waves)

কুইঙ্কের পরীক্ষার সাহায্যে নলের ভিতর প্রবাহিত শব্দতরঙ্গের ব্যতিচারণ দেখানো যায়। পরীক্ষায় ব্যবহৃত কুইঙ্কের যন্ত্রটি (Quinke's apparatus) 3.4 নং চিত্রে দেখানো হইয়াছে।

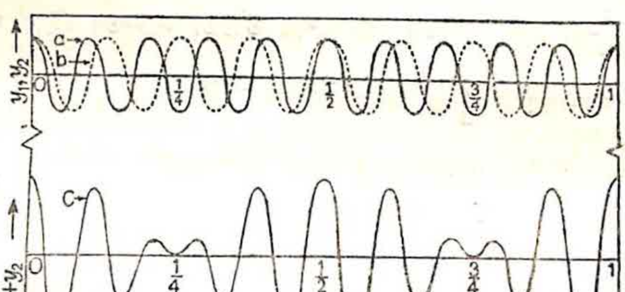
যন্ত্রের S মুখ দিয়া সুরশলাকার সাহায্যে শব্দতরঙ্গ ধাতব নলে প্রবেশ করানো হয়। নলের অভ্যন্তরে শব্দতরঙ্গ SCR ও SDR পথে বিভক্ত হইয়া নির্গম-নল R-এ মিলিত হয়। নলের D বাহুকে বাম অথবা ডানদিকে সরাইয়া SDR পথের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করা যাইতে পারে। যখন দৈর্ঘ্য (SDR − SCR) শব্দের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের গুণিতক বা $n\lambda$ হইবে তখন R নলে কান রাখিলে তীব্র শব্দ শুনা যাইবে। কিন্তু D বাহুকে সরাইয়া ঐ দৈর্ঘ্য যদি অর্ধ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অযুগ্ম গুণিতক বা $(n+\frac{1}{2})\lambda$ করা হয়, তাহা হইলে বিনাশী ব্যতিচারণের ফলে কোন শব্দ শুনা যাইবে না। এই দুই ক্ষেত্রে, যদিও শব্দতরঙ্গদ্বয়ের উৎস একই, কিন্তু পথের দৈর্ঘ্য ভিন্ন হওয়ায় উহারা যথাক্রমে সমদশায় ও বিপরীত দশায় পৌঁছায়।



চিত্র 3.4

3.4 স্বরকম্প (Beats)

দুইটি উৎস হইতে সৃষ্ট একই দিকে সঞ্চরমাণ শব্দতরঙ্গের কম্পাঙ্কে সামান্য তফাত থাকিলে উপরিপাতের ফলে মাধ্যমের নির্দিষ্ট এক বিন্দুতে কম্পনের বিস্তার পর্যায়ক্রমে বাড়িতে ও কমিতে থাকে। যেহেতু শব্দের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতী, ফলে ঐ বিন্দুতে শব্দ একবার জোর ও পরে ক্ষীণ এইভাবে পরিবর্তিত হয়। শব্দের তীব্রতার এই হ্রাসবৃদ্ধিকে স্বরকম্প বলে এবং একটি সম্পূর্ণ পর্যায়কে বলা হয় স্বরকম্পন।



চিত্র 3.5

চিত্র 3.5-এ a ও b লেখচিত্রের সাহায্যে সময়ের সহিত দুইটি তরঙ্গের সরণ y_1 ও y_2 দেখানো হইয়াছে, যাহাদের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে সেকেণ্ডে 10 ও 8। ঐ একই চিত্রে মোট সরণকে (অর্থাৎ, y_1+y_2) c লেখচিত্রের দ্বারা দেখানো হইয়াছে। এখানে লক্ষণীয় যে, $t=0, \frac{1}{2}$ ও 1 সেকেণ্ড সময়ে y_1 ও y_2 সমদশায় থাকে, ফলে মোট কম্পনের বিস্তার সর্বাধিক হয়। কিন্তু $t=\frac{1}{4}$ ও $\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড সময়ে উহারা বিপরীত দশায় থাকে বলিয়া মোট কম্পনের বিস্তার সর্বনিম্ন বা শূন্য হয়। ফলে 1 সেকেণ্ডে শব্দের তীব্রতার দুইবার হ্রাসবৃদ্ধি ঘটে এবং শ্রোতার কাছে ইহা দুইটি স্বরকম্পনরূপে পরিগণিত হয়।

3.4.1 স্বরকম্পের গাণিতিক ব্যাখ্যা (Mathematical explanation of beats)

মনে করি, দুইটি শব্দ উৎস হইতে সৃষ্ট দুইটি তরঙ্গ একইদিকে অগ্রসর হইতেছে। তরঙ্গ দুইটির ভিতর কম্পাঙ্কের পার্থক্য সামান্য। ধরা যাক যে কোন বিন্দুতে উপরিপাতিত তরঙ্গ দুইটির সরণ সমীকরণ,

$$y_1 = a \sin nt \qquad \cdots (3.13)$$

এবং

$$y_2 = b \sin (n+n_1)t \qquad \cdots (3.14)$$

এখানে a ও b তরঙ্গ দুইটি বিস্তার এবং উহাদের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে $\frac{n}{2\pi}$ ও $\frac{n+n_1}{2\pi}$। যদি n_1-এর মান n-এর সহিত তুলনামূলকভাবে খুব কম হয়, তবে উৎস দুইটির ভিতর কম্পাঙ্ক প্রায় সমান ধরিতে পারি।

তরঙ্গদ্বয়ের উপরিপাতের ফলে যে লব্ধি তরঙ্গ পাওয়া যাইবে তাহার বিস্তার ও দশা পৃথক হইবে। যদি A লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার এবং ϕ লব্ধি তরঙ্গ ও প্রথম তরঙ্গের ভিতর দশা পার্থক্য হয় তবে লব্ধি সরণ হইবে,

$$y = \text{A} \sin (nt+\phi) \qquad \cdots (3.15)$$

এক্ষণে, উপরিপাতের সূত্র $y = y_1 + y_2$ হইতে পাই,

$$\text{A} \sin (nt+\phi) = a \sin nt + b \sin (n+n_1)t$$

অথবা,

$$\text{A} \sin nt \cos \phi + \text{A} \cos nt \sin \phi = a \sin nt + b \sin nt \cos n_1t + b \cos nt \sin n_1t$$

$$= (a + b \cos n_1t) \sin nt + b \cos nt \sin n_1t \qquad \cdots (3.16)$$

সমীকরণ (3.16) হইতে লিখিতে পারি,

$$\text{A} \cos \phi = a + b \cos n_1t \qquad \cdots (3.17)$$

এবং

$$\text{A} \sin \phi = b \sin n_1t \qquad \cdots (3.18)$$

সমীকরণ (3.18)-কে (3.17) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\tan \phi = \frac{b \sin n_1 t}{a + b \cos n_1 t} \qquad \cdots (3.19)$$

আবার, (3.17) ও (3.18) সমীকরণ দুইটির বর্গের সমষ্টি লইলে পাই,

$$\text{A}^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos n_1t$$

অর্থাৎ,

$$\text{A} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos n_1t} \qquad \cdots (3.20)$$

সমীকরণ (3.20) হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, লব্ধি বিস্তারের মান A সময়ের সহিত পরিবর্তিত হয়, ফলে শব্দের তীব্রতার হ্রাসবৃদ্ধি ঘটে এবং একটি কম্পিত শব্দ শোনা যায়। কম্পিত এই শব্দকেই স্বরকম্প বলে।

3.4.2 স্বরকম্পের সংখ্যা (Frequency of beats)

সমীকরণ (3.20) হইতে দেখা যাইতেছে যে, লব্ধি বিস্তার A সর্বাধিক হইবে যখন,

$\cos n_1 t = 1$ হইবে

অর্থাৎ, $n_1 t = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$ হইবে

অর্থাৎ, $t = 0, \frac{2\pi}{n_1}, \frac{4\pi}{n_1}, \frac{6\pi}{n_1}, \ldots$ হইবে।

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, লব্ধি বিস্তার A-এর পর পর দুইটি সর্বোচ্চ মানের মধ্যে $\frac{2\pi}{n_1}$ সময়ের ব্যবধান হইবে।

এক্ষণে, $\cos n_1 t = 1$ বসাইয়া পাই

$$A = a + b \qquad \cdots(3.21)$$

আবার সমীকরণ (3.20)-এ লব্ধি বিস্তার A-এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাইবে যখন $\cos n_1 t = -1$ হইবে।

অর্থাৎ, $n_1 t = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$ইত্যাদি

অর্থাৎ, $t = \frac{\pi}{n_1}, \frac{3\pi}{n_1}, \frac{5\pi}{n_1}, \cdots$ইত্যাদি

সুতরাং, লব্ধি বিস্তারের পর পর দুইটি সর্বনিম্ন মানের ভিতর সময়ের ব্যবধান হইবে $\frac{2\pi}{n_1}$।

অনুরূপভাবে, $\cos n_1 t = -1$ বসাইয়া পাই,

$$A = a \sim b \qquad \cdots \quad (3.22)$$

উপরি-উক্ত আলোচনা হইতে ইহা বোঝা যাইতেছে যে, লব্ধি তরঙ্গের বিস্তারের পর পর দুইটি সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের ভিতর সময়ের ব্যবধান $= \frac{2\pi}{n_1}$.

$\therefore$ শব্দের তীব্রতার হ্রাস-বৃদ্ধির কম্পাঙ্ক $= \dfrac{1}{\frac{2\pi}{n_1}} = \dfrac{n_1}{2\pi}$.

ইহাই স্বরকম্পের সংখ্যা। অর্থাৎ স্বরকম্পের সংখ্যা স্বরকম্প সৃষ্টিকারী শব্দ উৎস দুইটির কম্পাঙ্কের বিয়োগফলের সমান হইবে।

3.4.3 স্বরকম্পের প্রয়োগ (Application of beats)

(*i*) **অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় :** একটি পরিজ্ঞাত (**known**) কম্পাঙ্কের সুরশলাকা লইলাম। মনে করি উহার কম্পাঙ্ক n। এক্ষণে পরিজ্ঞাত ও অপরিজ্ঞাত সুরশলাকাদ্বয়ের কম্পন সৃষ্টি করিয়া একটি নির্দিষ্ট সময়ে স্বরকম্পের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। উহা হইতে প্রতি সেকেন্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা বাহির করা হইল। মনে করা যাক, স্বরকম্পের সংখ্যা x। তাহা হইলে অপরিজ্ঞাত সুরশলাকার কম্পাঙ্ক হইবে $n + x$ অথবা $n - x$।

এখন সঠিক মানটি জানিবার জন্য অপরিজ্ঞাত সুরশলাকাটির একটি বাহুতে কিছু মোম লাগাইতে হইবে ; ফলে উহার কম্পাঙ্ক কমিয়া যাইবে। পূর্বের ন্যায় সুরশলাকা দুইটির কম্পন সৃষ্টি করিয়া পুনরায় প্রতি সেকেণ্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে। যদি এই সংখ্যা বৃদ্ধি পায় তবে বুঝিতে হইবে যে, সুরশলাকা দুইটির কম্পাঙ্কের পার্থক্য বৃদ্ধি পাইয়াছে। মোম লাগাইয়া যেহেতু অপরিজ্ঞাত সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক হ্রাস করা হইয়াছে, সুতরাং প্রথম হইতেই পরিজ্ঞাত সুরশলাকার কম্পাঙ্ক অপেক্ষা অপরিজ্ঞাত সুরশলাকার কম্পাঙ্ক কম না থাকিলে এইরূপ হইত না, অর্থাৎ অপরিজ্ঞাত সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক হইবে $n-x$। অপরপক্ষে যদি স্বরকম্পের সংখ্যা পূর্বাপেক্ষা হ্রাস পায় তখন অপরিজ্ঞাত সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক হইবে $n+x$।

(ii) **খনিতে দূষিত গ্যাসের অস্তিত্ব নির্ণয় ঃ** খনির দূষিত বায়ু এবং বিশুদ্ধ বায়ু দ্বারা দুইটি অর্গান নল পূর্ণ করিয়া সুর উৎপাদন করা হইল। দূষিত বায়ুর ঘনত্ব ভিন্ন হওয়ার দরুণ দুই অর্গান নল হইতে সৃষ্ট সুরের কম্পাঙ্কের সামান্য পরিবর্তন হইবে। ফলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হইবে। কিন্তু বায়ু দূষিত না হইলে কোন স্বরকম্প হইবে না।

(iii) **বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় ঃ** দুইটি বাদ্যযন্ত্রকে এক সুরে আনিতে হইলে উহাদের একই সঙ্গে বাজাইয়া স্বরকম্পের উপস্থিতি লক্ষ্য করা হয়। সুর মিলিলে স্বরকম্প আর শুনিতে পাওয়া যায় না।

3.4.4 ব্যতিচার ও স্বরকম্পের তুলনামূলক আলোচনা (Comparative discussion between interference and beats)

ব্যতিচার	স্বরকম্প
(i) ব্যতিচার হইতে গেলে উভয় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক একই হইতে হইবে।	(i) স্বরকম্প হইতে গেলে উভয় তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সামান্য পার্থক্য থাকিতে হইবে।
(ii) ব্যতিচারের ক্ষেত্রে একই দিকে অথবা বিপরীত দিকে অগ্রসরমান তরঙ্গ দুইটির বিস্তার প্রায় সমান হইতে হইবে।	(ii) স্বরকম্পের ক্ষেত্রে একই দিকে অগ্রসরমান তরঙ্গ দুইটির বিস্তার সমান অথবা প্রায় সমান হইতে হইবে।
(iii) ব্যতিচারের ক্ষেত্রে কোন বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের ভিতর দশা-পার্থক্য সকল সময়ে একই থাকে।	(iii) স্বরকম্পের ক্ষেত্রে কোন বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের ভিতর দশা-পার্থক্য সর্বদা পরিবর্তিত হয়।
(iv) এক্ষেত্রে শব্দ তরঙ্গের বিস্তার বা শব্দের তীব্রতা সময়ের সহিত অপরিবর্তিত থাকে।	(iv) সময়ের সহিত পরিবর্তিত হয়।

3.5 সংযুক্ত সুর (Combination tone) ঃ

যখন দুইটি পৃথক কম্পাঙ্কের সুর একই সাথে ধ্বনিত হইতে থাকে তখন বিশেষ বিশেষ অবস্থায় মূল কম্পাঙ্কের সুর ছাড়াও বিভিন্ন কম্পাঙ্কের ভিন্ন ভিন্ন সুরের সৃষ্টি হইতে পারে। ইহাদের সংযুক্ত সুর বলে।

যদি ভিন্ন কম্পাঙ্কের দুইটি সুরের মান n_1 ও n_2 হয় তবে n_1 ও n_2-কে বিভিন্ন উপায়ে সংযুক্তিকরণের মধ্য দিয়া, যথা $(n_1 \sim n_2)$, (n_1+n_2), $(2n_1+n_2)$, (n_1+2n_2), $2n_1$, $2n_2$ ইত্যাদি বিভিন্ন সুরের কম্পাঙ্কগুলি পাওয়া যাইবে। ইহাদের সকলকেই সংযুক্ত সুর বলা হয়। ইহাদের মধ্যে (n_1+n_2) কম্পাঙ্কের সুরকে যোজিত সুর (**Summation tone**) এবং $(n_1 \sim n_2)$ কম্পাঙ্কের স্বরকে বিয়োজিত বা অন্তর সুর (**Difference tone**) বলে। মূল সুরের উপসুরগুলিকে অর্থাৎ $2n_1$ বা $2n_2$ ইত্যাদি স্বতঃসংযুক্ত সুর (**Self-combination tone**) বলা হইয়া থাকে।

3.5.1 স্বরকম্প ও সংযুক্ত সুরের তফাত (Difference between beats and combination tones) ঃ

স্বরকম্প	সংযুক্ত সুর
(i) স্বরকম্পের অস্তিত্ব শ্রোতার উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ ইহার অস্তিত্ব ব্যক্তি-নিষ্ঠ (**subjective**)।	(i) সংযুক্ত সুরের অস্তিত্ব কোন শ্রোতার উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ ইহা বিষয়নিষ্ঠ (**objective**)।
(ii) প্রায় সম কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুইটি সুর একই সঙ্গে ধ্বনিত হইলে স্বরকম্প সৃষ্টি হয় এবং নিয়মিত সময়ের ব্যবধানে উহার তীব্রতা হ্রাস-বৃদ্ধি হয়। n ও n_1 যদি দুইটি সুরের কম্পাঙ্ক হয় তবে প্রতি সেকেন্ডে $(n \sim n_1)$ সংখ্যক স্বরকম্পের সৃষ্টি হইবে। অর্থাৎ দুইটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে $(n \sim n_1)$ কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি নিম্ন সুরের সৃষ্টি হয়।	(ii) পৃথক পৃথক কম্পাঙ্কের দুইটি তীব্র সুর n_1 ও n_2 যদি একই সঙ্গে ধ্বনিত হইতে থাকে তখন বিশেষ বিশেষ অবস্থায় বিভিন্ন কম্পাঙ্কের সুর, যথা (n_1+n_2), $(n_1 \sim n_2)$, $(2n_1+n_2)$, (n_1+2n_2), $2n_1$, $2n_2$ ইত্যাদি ধ্বনিত হইতে থাকে। ইহাদের সংযুক্ত সুর বলে। যখন একই সঙ্গে কানের কাছে দুইটি পেটা ঘড়ির শব্দ করা হয় অথবা দুইটি হুয়িসল (**whistle**) খুব জোরে বাজানো হয় তখন সংযুক্ত সুর সৃষ্টি হইয়া থাকে।
(iii) স্বরকম্পের বেলায় সরণ, সরণ-সৃষ্টিকারী বলের সমানুপাতিক।	(iii) সংযুক্ত সুরের ক্ষেত্রে সরণ, সরণ-সৃষ্টিকারী বলের সমানুপাতিক হয় না।

উদাহরণ (Examples)

1. A ও B দুইটি সুরশলাকা একই সঙ্গে কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 8টি স্বরকম্প শোনা যায়। একটি বন্ধ নলের 32 cm দৈর্ঘ্যের বায়ুস্তম্ভের সহিত A সুরশলাকা অনুনাদ সৃষ্টি করে এবং বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 1 cm বৃদ্ধি করিলে B সুরশলাকা অনুরূপ অনুনাদ সৃষ্টি করে। সুরশলাকা দুইটির কম্পাংক নির্ণয় কর।

(Two turning forks A and B are sounded together and 8 beats per second are heard. A is in resonance with a column of air 32 cm long in a pipe closed at one end and B is similarly in resonance when the length of column is increased by 1 cm. Calculate the frequency of the forks.) **(C. U. '50)**

এখানে,

$$n_1 = \frac{V}{4 \times 32}$$

এবং $n_2 = \frac{V}{4 \times 33}$

আবার, $n_1 - n_2 = 8$

$\therefore \quad 8 = \frac{V}{4}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{33}\right)$

অথবা, $V = 8 \times 4 \times 32 \times 33$

সুতরাং $n_1 = \frac{8 \times 4 \times 32 \times 33}{4 \times 32} = 264$

এবং $n_2 = \frac{8 \times 4 \times 32 \times 33}{4 \times 33} = 256$

$\therefore$ সুরশলাকা দুইটির কম্পাংক 264 ও 256।

2. 50 cm ও 50·5 cm তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুইটি তরঙ্গ কোন গ্যাসে প্রতি সেকেণ্ডে 6টি স্বরকম্পের সৃষ্টি করিলে ঐ গ্যাসে শব্দের বেগ কত হইবে নির্ণয় কর।

(Calculate the velocity of sound in a gas in which two waves of wavelengths 50 cm and 50·5 cm produce 6 beats per second.)

(C. U. '67, '74)

মনে করি, গ্যাসে শব্দের বেগ V

প্রথম তরঙ্গের কম্পাংক n_1 ও দ্বিতীয় তরঙ্গের কম্পাংক n_2 হইলে আমরা লিখিতে পারি, $n_1 \times 50 = V$

অথবা, $n_1 = \frac{V}{50}$

এবং $n_2 \times 50{\cdot}5 = V$

অথবা, $n_2 = \frac{V}{50{\cdot}5}$

সুতরাং $n_1 - n_2 = V\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{50{\cdot}5}\right)$

অথবা, $6 = \frac{V \times 0{\cdot}5}{50 \times 50{\cdot}5}$ $[\because \; n_1 - n_2 = 6]$

$\therefore \; V = \frac{6 \times 50 \times 50{\cdot}5}{0{\cdot}5}$

$= 30300$ cm/second.

3. একটি সুর 512 কম্পাঙ্কের একটি সুরশলাকার সহিত প্রতি সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্প সৃষ্টি করে এবং 514 কম্পাঙ্কের সুরশলাকার সহিত 6টি স্বরকম্পের সৃষ্টি করে। স্বরটির কম্পাঙ্ক কত হইবে নির্ণয় কর।

(A note produces 4 beats per second with a tuning fork of frequency 512 and 6 beats per second with a tuning fork of frequency 514. Find the frequency of the note.)

প্রথম ক্ষেত্রে সুরশলাকার কম্পাঙ্ক = 512

এবং স্বরকম্পের সংখ্যা = 4

∴ অপরিজ্ঞাত স্বরের সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক, $512 - 4 = 508$

অথবা $512 + 4 = 516$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, সুরশলাকার কম্পাঙ্ক = 514

এবং স্বরকম্পের সংখ্যা = 6

∴ অপরিজ্ঞাত সুরের সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক $514 - 6 = 508$

অথবা $514 + 6 = 520$

∴ উভয় ক্ষেত্রেই 508 কম্পাঙ্ক রহিয়াছে, সুতরাং অপরিজ্ঞাত স্বরের কম্পাঙ্ক হইবে 508।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. স্থাণু তরঙ্গে নিস্পন্দ ও সুস্পন্দ বিন্দুর গঠন ব্যাখ্যা কর। প্রমাণ কর যে, পরপর দুইটি নিস্পন্দ বা সুস্পন্দ বিন্দুর ভিতর দূরত্ব স্থাণু তরঙ্গ সৃষ্টিকারী তরঙ্গ-দ্বয়ের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান।

(Explain the formation of nodes and antinodes in stationary waves. Prove that the distance between two consecutive nodes or antinodes is equal to half the wavelength of the interfering waves.)

(C. U. '70)

2. স্থাণু তরঙ্গ কিরূপে সৃষ্ট হয় ব্যাখ্যা কর এবং উহার বৈশিষ্ট্যগুলি আলোচনা কর। প্রগামী তরঙ্গের সহিত স্থাণু তরঙ্গের পার্থক্য কোথায় ?

(Explain the formation of stationary waves and discuss their characteristics. How do stationary waves differ from progressive waves ?) (C. U. '73)

3. স্থাণু তরঙ্গ এবং প্রগামী তরঙ্গের পার্থক্য বর্ণনা কর। বন্ধ নলে কিরূপে স্থাণু তরঙ্গ গঠিত হয় ? শব্দের ব্যতিচার ও স্বরকম্পের গঠন সংক্ষেপে আলোচনা কর।

(Distinguish between stationary and progressive wave. How are stationary waves formed in a closed pipe ? Briefly discuss the phenomenon of interference and formation of beats in acoustics.) (C. U. '67)

4. শব্দ বিজ্ঞানে স্বরকম্পের গঠনপ্রক্রিয়া বর্ণনা কর। উহার তত্ত্ব উপপাদন কর। একটি সুরশলাকার কম্পাঙ্ক পরিজ্ঞাত থাকিলে অপর একটি অপরিজ্ঞাত সুরশলাকার কম্পাঙ্ক স্বরকম্পের সাহায্যে কিরূপে নির্ণয় করা যায় তাহা দেখাও।

(Discuss the formation of beats in sound. Deduce its theory. Show how the formation of beats may help to determine the frequency of one tuning fork when that of the other is supplied.) (C. U. '71)

5. স্বরকম্প কি ? স্বরকম্প গঠনের গাণিতিক তত্ত্ব লিখ। সংযুক্ত সুরের সহিত স্বরকম্পের পার্থক্য কি ?

(What are beats ? Give a mathematical theory of beat formation. How do beats differ from combination tones ?) (C. U. old '68)

6. স্থাণু তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যগুলি উল্লেখ কর। কি অবস্থায় শব্দ তরঙ্গের ব্যতিচার সম্ভব ?

(State the characteristics of stationary waves. Under what conditions interference of sound waves is possible ?) (C. U. '66)

7. শব্দ বিজ্ঞানে স্বরকম্পের উৎপত্তি ব্যাখ্যা কর এবং স্বরকম্পের সংখ্যা প্রকাশের গাণিতিক রাশিমালা নির্ধারণ কর। স্বরকম্প ও সংযুক্ত সুরের ভিতর পার্থক্য দেখাও। শব্দের ব্যতিচার বলিতে কি বোঝ ?

(Explain the production of beats in acoustics and obtain a mathematical expression giving the frequency of beats.

Distinguish between beats and combination tones. What is meant by interference of sound ?) (C. U. '64)

8. কি অবস্থায় শব্দের ব্যতিচার সম্ভব তাহা ব্যাখ্যা কর। শব্দ বিজ্ঞানে স্বরকম্পের উৎপত্তি ব্যাখ্যা কর। স্বরকম্পের সংখ্যা প্রকাশের একটি রাশিমালা নির্ধারণ কর।

(Explain under what conditions interference of sound waves possible. Explain the formation of beats in acoustics. Obtain an expression for the frequency of beats.) (C. U. New Syllabus '80)

9. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ :

(a) স্থাণু তরঙ্গ, (b) প্রগামী তরঙ্গ, (c) স্বরকম্প, (d) শব্দের ব্যতিচার, (e) সংযুক্ত সুর

(Write short notes on : (a) stationary wave ('72, '75), (b) progressive wave ('71), (c) beats (C. U. '66, '69, '77), (d) interference of sound ('67), (e) combination tone ('66).)

10. দুইটি সুরশলাকা A ও B প্রতি সেকেণ্ডে 5টি স্বরকম্প উৎপন্ন করে। A-এর কম্পাঙ্ক 512 দেওয়া আছে। B-কে ঘষা হইলে প্রতি সেকেণ্ডে পুনরায় 5টি স্বরকম্পের উৎপত্তি হইল। ঘষিবার পূর্বে ও পরে B সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(Two tuning forks A and B give 5 beats per second. The frequency of A is 512. When B is filed 5 beats per second are again produced. Find the frequency of B before and after filing.) [Ans. 507, 517]

11. 64টি সুরশলাকা ক্রমবর্ধমান কম্পাঙ্ক হিসাবে সাজানো আছে এবং পর পর দুইটি সুরশলাকা একই সঙ্গে কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 4টি স্বরকম্পের উৎপত্তি হয়। যদি শেষ সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক প্রথমটির দ্বিগুণ হয় তবে প্রথম শলাকাটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(64 tuning forks are arranged in order of increasing frequency and any two successive forks give 4 beats per second when sounded together. If the last fork gives the octave of the first, calculate the frequency of the first.) (C. U. '46) [Ans. 252]

12. দুইটি সুরশলাকা A ও B একই সঙ্গে কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে 8টি করিয়া স্বরকম্পের সৃষ্টি হয়। A শলাকাটি স্থির বিততির সনোমিটার তারের 45 cm দৈর্ঘ্যের সহিত ও B শলাকাটি 44 cm দৈর্ঘ্যের সহিত সমসুর উৎপন্ন করে। শলাকা দুইটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(Two tuning forks A and B are sounded together to produce 8 beats per second. A is in unision with 45 cm length of a sonometer wire under constant tension and B is in unision with the same wire of length 44 cm. Find the frequencies of the tuning forks.) (C.U. '78) [Ans. 352, 360]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

শব্দের বেগ

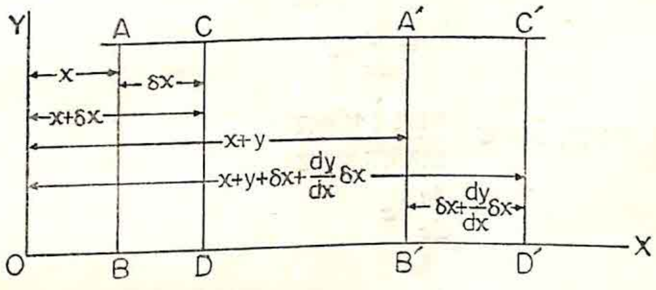
(Velocity of Sound)

4.1 সূচনা (Introduction)

অন্যান্য তরঙ্গের ন্যায় শব্দ নির্দিষ্ট সীমিত বেগে সঞ্চারিত হয়। শব্দের এই সীমিত বেগের পরিচয় আমরা বিভিন্ন ঘটনা হইতে জানিতে পারি। দূরে কোথাও হাতুড়ী ঠুকিতে বা গাছ কাটিতে দেখিলে হাতুড়ী বা কুঠার চালানোর কিছুক্ষণ পর উহাদের শব্দ শুনিতে পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে, আকাশে বিদ্যুৎ চমকাইবার কিছুক্ষণ পর আমরা উহার শব্দ শুনিতে পাই। শব্দের বেগ সীমিত হওয়ার দরুণই প্রতিফলনের ফলে সৃষ্ট শব্দের প্রতিধ্বনিকে মূলধ্বনি হইতে আলাদা করিয়া শোনা সম্ভব হয়।

4.2 গ্যাসীয় মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ (Velocity of longitudinal wave in a gaseous medium)

যে কোন একটি গ্যাসীয় মাধ্যমের একক প্রস্থচ্ছেদের একটি চোঙ কল্পনা করিলাম। মনে করি, অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ OX অক্ষ বরাবর বাম হইতে ডান দিকে অগ্রসর হইতেছে (চিত্র 4.1)। O বিন্দু হইতে x ও $x+\delta x$ দূরে তরঙ্গের অভিমুখের অভিলম্ব-



চিত্র 4.1

ভাবে AB ও CD দুইটি তল কল্পনা করা হইল। অতএব, এই তল দুইটি দ্বারা আবদ্ধ গ্যাসীয় স্তরের দৈর্ঘ্য হইবে δx এবং উহার আয়তন হইবে $\delta x \times 1 = \delta x$, যেহেতু একক প্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট চোঙ লওয়া হইয়াছে।

মনে করি, মাধ্যমের ভিতর দিয়া অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের অগ্রসর হওয়ার ফলে AB এবং CD তল যথাক্রমে A′B′ ও C′D′ অবস্থানে স্থানচ্যুত হইল। AB তলের সরণ y হইলে O বিন্দু হইতে A′B′ তলের দূরত্ব হইবে $x+y$। এক্ষণে, যেহেতু x অভিমুখে সরণ y, সুতরাং ঐ অভিমুখে সরণের পরিবর্তনের হার হইবে $\frac{dy}{dx}$।

$\therefore$ AB ও CD তলের মধ্যে δx দূরত্বের জন্য সরণের পরিবর্তন $=\frac{dy}{dx}\delta x$ ।

অতএব CD তলের সরণ $=y+\frac{dy}{dx}\delta x$ এবং O বিন্দু হইতে C′D′ তলের দূরত্ব $=$

$x+\delta x+y+\frac{dy}{dx}\delta x$ ।

এখন, A′B′ এবং C′D′ তলের মধ্যে আবদ্ধ গ্যাসীয় স্তরের দৈর্ঘ্য

= O বিন্দু হইতে C′D′ তলের দূরত্ব − O বিন্দু হইতে A′B′ তলের দূরত্ব

$$=\left(x+\delta x+y+\frac{dy}{dx}\delta x\right)-(x+y)$$

$$=\delta x+\frac{dy}{dx}\delta x$$

এবং উহার আয়তন $=\left(\delta x+\frac{dy}{dx}\delta x\right)\times 1$

$\therefore$ আবদ্ধ গ্যাসের আয়তনের পরিবর্তন = A′B′ ও C′D′ তলের মধ্যে আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন − AB ও CD তলের মধ্যে আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন

$$=\left(\delta x+\frac{dy}{dx}\delta x\right)-\delta x$$

$$=\frac{dy}{dx}\delta x \qquad \cdots \quad (4.1)$$

অতএব, আয়তন বিকৃতি $=\frac{\text{আয়তন পরিবর্তন}}{\text{প্রাথমিক আয়তন}}$

$$=\frac{\frac{dy}{dx}\delta x}{\delta x}$$

$$=\frac{dy}{dx} \qquad \cdots \quad (4.2)$$

অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের দরুণ AB তলে যদি স্বাভাবিক অপেক্ষা অতিরিক্ত চাপ p ধরা হয় তবে আয়তন বিকৃতি গুণাংক,

$$K=-\frac{p}{dy/dx}$$

(ঋণাত্মক চিহ্ন ইঙ্গিত করে যে চাপ বৃদ্ধি পাইলে আয়তন হ্রাস পায় অথবা চাপ হ্রাস পাইলে আয়তন বৃদ্ধি পায়)

অথবা, $p=-K(dy/dx)$ $\cdots$ (4.3)

সমীকরণ (4.3) ধনাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে AB তলের উপর অতিরিক্ত চাপ নির্ণয় করে।

অনুরূপভাবে, CD তলের উপর ঋণাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে অতিরিক্ত চাপ

$$= p + \frac{dp}{dx}\,\delta x$$

$$= -K\,\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(-K\,\frac{dy}{dx}\right)\delta x$$

$$= -K\,\frac{dy}{dx} - K\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta x \qquad \cdots (4.4)$$

∴ AB তলের উপর অতিরিক্ত চাপ

$$= K\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta x$$ [সমীকরণ (4.3) হইতে (4.4) বিয়োগ করিয়া]

অর্থাৎ, AB তলের উপর অতিরিক্ত বল

$$= K\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta x$$ (∵ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল একক)

এই বল আবদ্ধ গ্যাসের উপর প্রয়োগের ফলে উহা গতিশীল হয়।

এক্ষণে, আবদ্ধ গ্যাসের ভর = দৈর্ঘ্য × প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল × ঘনত্ব

$$= \delta x \times 1 \times \rho$$ (ρ = গ্যাসের ঘনত্ব)

∴ নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে পাই,

$$K\frac{d^2y}{dx^2}\,\delta x = \delta x \times 1 \times \rho \times \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \ldots(4.5)$$

সমীকরণ (4.5) এ, $\frac{d^2y}{dt^2}$ হইতেছে ত্বরণ,

আমরা পাই, $$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K}{\rho}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \ldots(4.6)$$

ইহাই **D' Alembert**-এর ধরণের তরঙ্গের সমীকরণ।

$\frac{K}{\rho} = V^2$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = V^2\,\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \ldots(4.7)$$

সমীকরণ (4.7) এর সাধারণ সমাধান হইতেছে,

$$y = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt) \qquad \ldots(4.8)$$

এখানে f_1 ও f_2 হইতেছে যদৃচ্ছ অপেক্ষক (**arbitrary functions**)। প্রথম পদ, $y = f_1(x - Vt)$ হইতে বোঝা যায় যে t এর মান যদি 1 বৃদ্ধি করা হয় তবে y এর মান অপরিবর্তিত রাখিতে হইলে x কে V বৃদ্ধি করিতে হইবে অর্থাৎ যে আন্দোলন t সময়ে x অবস্থানে ছিল তাহা 1 সেকেণ্ড পর $(x + V)$ দূরত্ব অতিক্রম করিবে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে, $y = f_1\,(x - Vt)$ এমন একটি তরঙ্গ যাহা V বেগে ধনাত্মক

X-অক্ষ অভিমুখে অগ্রসর হয়। অনুরূপে, $y=f_2\ (x+Vt)$ একটি তরঙ্গ যাহা V বেগে ঋণাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে অগ্রসর হয়।

$$\therefore \text{ গ্যাসীয় মাধ্যমে তরঙ্গ বেগ, } V=\sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad \ldots(4.9)$$

$$=\sqrt{\frac{\text{গ্যাসের আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক}}{\text{গ্যাসের ঘনত্ব}}}$$

4.3 নিউটনের সূত্র (Newton's formula)

নিউটন তত্ত্বগতভাবে প্রথম কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের গতিবেগ সংক্রান্ত সূত্রটি উপস্থাপন করেন। নিউটনের মতে কোন শব্দ বিস্তার লাভ করিবার সময় মাধ্যমের তাপমাত্রার কোন তারতম্য হয় না, অর্থাৎ ইহা একটি সমোষ্ণ প্রক্রিয়া (isothermal process)। কোন আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ার সমীকরণকে আমরা লিখিতে পারি।

$$Pv=\text{ধ্রুবক} \qquad (4.10)$$

অথবা, $v\dfrac{dP}{dv}+P=0$ (v এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া)

অথবা, $-\dfrac{dP}{dv}=\dfrac{P}{v}$

অথবা, $$-\frac{dP}{\frac{dv}{v}}=P \qquad \ldots(4.11)$$

এখানে dP = চাপের পরিবর্তন

এবং $\dfrac{dv}{v}$ = আয়তন বিকৃতি

ধনাত্মক চিহ্ন বুঝাইতেছে যে, চাপ বৃদ্ধি পাইলে আয়তন হ্রাস এবং চাপ হ্রাস পাইলে আয়তন বৃদ্ধি পায়।

আবার আমরা জানি,

$$\text{আয়তন বিকৃতি গুণাঙ্ক, } K=\frac{dP}{-\frac{dv}{v}} \qquad \cdots(4.12)$$

সমীকরণ (4.11) এবং (4.12) হইতে লিখিলে পারি,

$$K=P \qquad \ldots(4.13)$$

∴ বায়ু মাধ্যমে শব্দের বেগ,

$$V=\sqrt{\frac{P}{\rho}} \qquad \cdots(4.14)$$

ইহাই নিউটনের শব্দের বেগ সংক্রান্ত সূত্র।

4.4 প্রমাণ তাপমাত্রা ও চাপে বায়ু মাধ্যমে শব্দের বেগ (Velocity of sound in air at NTP)

প্রমাণ চাপ বলিতে 0°C তাপমাত্রায় 76 cm পারদস্তম্ভ সমুদ্রপৃষ্ঠে 45° অক্ষাংশে যে চাপ প্রদান করে তাহাই বোঝায়।

$$\therefore \quad P = 76 \times 13{\cdot}6 \times 981 \text{ dynes/cm}^2$$

আবার প্রমাণ তাপমাত্রায় (0°C) বায়ুর ঘনত্ব = 0·001293 gram/c.c.

সুতরাং নিউটনের সূত্রানুযায়ী,

$$V = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

$$= \sqrt{\frac{76 \times 13{\cdot}6 \times 981}{0{\cdot}001293}}$$

$$= 280 \text{ metres/second}$$

নিউটনের সূত্র হইতে প্রাপ্ত এই ফলের সহিত পরীক্ষালব্ধ ফলের বিশেষ মিল নাই। প্রমাণ তাপমাত্রা ও চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ হইতেছে **332 metres/second** এর মত ; অর্থাৎ প্রায় 16% ত্রুটি। এই ত্রুটি পরীক্ষার কারণে নয়। নিউটন সূত্রটি তাই ত্রুটিপূর্ণ বলিয়া মনে হইল।

4.5 লাপ্লাসের শুদ্ধি (Laplace's Correction)

প্রায় 120 বৎসর পর 1817 সালে ফরাসী গণিতবিদ্ লাপ্লাস নিউটনের সূত্রটি সংশোধন করেন। তিনি বলেন যে, শব্দ যখন গ্যাস মাধ্যমের ভিতর দিয়া অগ্রসর হয় তখন মাধ্যমের ঘনীভবন ও তনুভবন অত্যন্ত দ্রুত সংঘটিত হয়। ফলে ঘনীভবনের দরুণ সৃষ্ট তাপ মাধ্যমের ঐ অংশেই আবদ্ধ থাকে ; পরিপার্শ্বে সঞ্চালিত হইবার অবকাশ পায় না। অনুরূপভাবে তনুভবনের দরুণ মাধ্যমের যে অংশে শৈত্যের উদ্ভব হয় সেই অংশ ও পরিপার্শ্বের সহিত তাপ আদানপ্রদানের সময় পায় না, ফলে গ্যাস মাধ্যমে শব্দ বিস্তার রুদ্ধতাপ (adiabatic) প্রক্রিয়ায় সম্পন্ন হয়।

রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$Pv^{\gamma} = \text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad (4.15)$$

v-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই,

$$v^{\gamma}\frac{dP}{dv} + P.\gamma\, v^{\gamma-1} = 0$$

অথবা, $$v\frac{dP}{dv} + P = 0 \qquad \left(v^{\gamma-1} \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া}\right)$$

অথবা, $$\frac{dP}{\frac{-dv}{v}} = \gamma P$$

অথবা, $K = \gamma P$ $\left(\because\ K = -\dfrac{dP}{\frac{dv}{v}}\right)$

সুতরাং গ্যাস মাধ্যমে শব্দের বেগ,

$$V = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad \cdots \quad (4.16)$$

বায়ুর ক্ষেত্রে, $\gamma = 1{\cdot}41$

$$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{1{\cdot}41 \times 76 \times 13{\cdot}6 \times 981}{0{\cdot}001293}}$$

$$= 331{\cdot}4 \text{ metres / second}$$

এই মান পরীক্ষালব্ধ মানের প্রায় সমান।

4.6 শব্দের গতিবেগের উপর গ্যাসের ঘনত্ব, চাপ, উষ্ণতা, আর্দ্রতা ও বায়ুপ্রবাহের প্রভাব (Effect of density, pressure, temperature, moisture and wind on the velocity of sound)

(a) ঘনত্বের প্রভাব (Effect of density) : মনে করি, ρ_1 ও ρ_2 দুইটি গ্যাসের ঘনত্ব এবং উহাদের মধ্য দিয়া শব্দের বেগ যথাক্রমে V_1 ও V_2। উহাদের চাপ ও উষ্ণতা সমান থাকিলে,

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_1}} \\ \text{এবং } V_2 &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_2}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \quad (4.17)$$

$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

অর্থাৎ, $$V \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} \qquad \cdots \quad (4.18)$$

$\therefore$ গ্যাস মাধ্যমে শব্দের বেগ উহার ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

(b) চাপের প্রভাব (Effect of pressure) : মনে করি, m গ্রাম গ্যাসের আয়তন v এবং ঘনত্ব ρ

$$\therefore \quad v = \frac{m}{\rho}$$

এখন বয়েলের সূত্র হইতে জানি,

$$Pv = \text{ধ্রুবক}$$

অর্থাৎ $$P\frac{m}{\rho} = \text{ধ্রুবক}$$

যেহেতু চাপ ও উষ্ণতার পরিবর্তনে গ্যাসের ভর একই থাকে,

$$\therefore \quad \frac{P}{\rho} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\text{অথবা,} \quad \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \text{ধ্রুবক} \quad \cdots \quad (4.19)$$

সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে, চাপের পরিবর্তন হইলেও শব্দের বেগ $V = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ একই থাকে।

(c) **উষ্ণতার প্রভাব (Effect of temperature) :** মনে করি, $0^\circ C$ ও $t^\circ C$ উষ্ণতায় গ্যাসের ঘনত্ব ρ_o ও ρ_t এবং শব্দের বেগ যথাক্রমে V_o ও V_t। সুতরাং আমরা লিখিতে পারি,

$$\left.\begin{aligned} V_o &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_o}} \\ \text{এবং} \quad V_t &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_t}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (4.20)$$

$$\therefore \quad \frac{V_t}{V_o} = \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_t}} \quad \cdots \quad (4.21)$$

$$\because \quad \rho_o = \rho_t \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

$$\text{সুতরাং,} \quad \frac{V_t}{V_o} = \sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

$$= \sqrt{\frac{273 + t}{273}}$$

$$= \sqrt{\frac{T}{T_o}} \quad \cdots \quad (4.22)$$

(T ও T_o হইতেছে $t^\circ C$ ও $0^\circ C$ উষ্ণতায় আনুষঙ্গিক পরম উষ্ণতা)

i.e. $V \propto \sqrt{T}$

∴ গ্যাস মাধ্যমে শব্দের বেগ মাধ্যমের পরম উষ্ণতার বর্গমূলের সমানুপাতিক।

সমীকরণ (4.22) হইতে পাই,

$$V_t = V_o \left(1 + \frac{t}{273}\right)^{1/2}$$

$$= V_o \left(1 + \frac{t}{273} \cdot \frac{1}{2}\right) \quad \text{(} t \text{ এর উচ্চঘাতের পদগুলিকে উপেক্ষা করিয়া)}$$

$$= V_o\left(1+\frac{t}{546}\right)$$

$$= V_o\,(1+0{\cdot}00183\,t) \quad \ldots \quad (4.23)$$

বায়ুর ক্ষেত্রে $0°C$ এ শব্দের বেগ,

$$V_o = 332 \text{ metres/second}$$

$$\therefore \quad V_t = 332\,(1+0{\cdot}00183\,t)$$

$$= (332+0{\cdot}61\,t) \text{ metres/second}$$

(d) আর্দ্রতার প্রভাব (Effect of moisture) ঃ জলীয় বাষ্প বায়ু অপেক্ষা হাল্কা বলিয়া ইহার উপস্থিতি বায়ুর ঘনত্ব হ্রাস করে। ইহার ফলে শব্দের বেগ বৃদ্ধি পায়।

মনে করি, P cm পারদস্তম্ভের চাপে এবং $t°C$ উষ্ণতায় শুষ্ক ও আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ যথাক্রমে V_d ও V_m এবং ঘনত্ব ρ_d ও ρ_m.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad V_d &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_d}} \\ \text{এবং} \quad V_m &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_m}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots (4.24)$$

$$\text{সুতরাং,} \quad \frac{V_d}{V_m} = \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_d}}$$

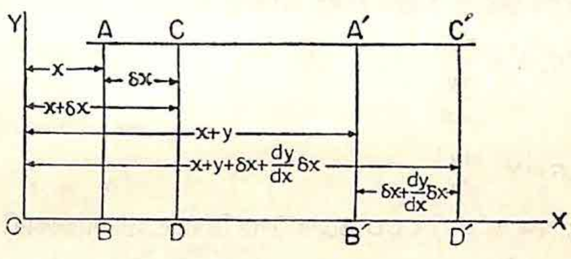
$$\text{অথবা,} \quad V_d = V_m\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_d}} \quad \ldots (4.25)$$

সমীকরণ (4.25) হইতে দেখা যাইতেছে যে, যেহেতু আর্দ্র বায়ুর ঘনত্ব শুষ্ক বায়ুর ঘনত্ব অপেক্ষা কম, কাজেই শুষ্ক বায়ু অপেক্ষা আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ বেশী।

(e) বায়ু প্রবাহের প্রভাব (Effect of wind)ঃ যে মাধ্যমে শব্দ সঞ্চারিত হয় তাহার নিজস্ব গতিবেগ থাকিলে উহা শব্দের বেগের সহিত সংযুক্ত হয়। ফলে বায়ুতে শব্দের গতিবেগের দিকে কোন প্রবাহ থাকিলে বায়ুপ্রবাহের বেগ শব্দের বেগের সহিত যোগ করিতে হয়। অপরপক্ষে প্রবাহ শব্দের গতিবেগের বিপরীত দিকে থাকিলে বায়ুপ্রবাহের বেগ শব্দের বেগ হইতে বিয়োগ করিতে হয়, অতএব, শব্দের বেগ V এবং বায়ুপ্রবাহের বেগ ω হইলে প্রথম ক্ষেত্রে শব্দের বেগ $(V+\omega)$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $(V-\omega)$ হইবে। প্রসঙ্গত উল্লেখযোগ্য, বায়ুপ্রবাহ শব্দ বিস্তারের লম্ব অভিমুখে ক্রিয়া করিলে (অর্থাৎ $\theta=90°$), শব্দের বেগের কোন পরিবর্তন হইবে না।

4.7 কঠিন মাধ্যমে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ (Velocity of longitudinal wave in a solid medium)

যে কোন একটি কঠিন মাধ্যমের একক প্রস্থচ্ছেদের একটি চোঙ কল্পনা করিলাম। মনে করি, অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ OX অক্ষ বরাবর বাম হইতে ডান দিকে অগ্রসর হইতেছে (চিত্র 4.2)। O বিন্দু হইতে x ও $x+\delta x$ দূরে তরঙ্গের অভিমুখের অভিলম্বভাবে AB ও CD দুইটি তল কল্পনা করা হইল। অতএব এই তল দুইটি দ্বারা আবদ্ধ কঠিন স্তরের দৈর্ঘ্য হইবে δx।



চিত্র 4.2

মনে করি, মাধ্যমের ভিতর দিয়া অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের অগ্রসর হওয়ার ফলে AB ও CD তল যথাক্রমে A′B′ ও C′D′ অবস্থানে স্থানচ্যুত হইল। AB তলের সরণ y হইলে O বিন্দু হইতে A′B′ তলের দূরত্ব হইবে $x+y$। এক্ষণে, যেহেতু x অভিমুখে সরণ y, সুতরাং ঐ অভিমুখে সরণের পরিবর্তনের হার হইবে $\frac{dy}{dx}$।

∴ AB ও CD তলের মধ্যে δx দূরত্বের জন্য সরণের পরিবর্তন $=\frac{dy}{dx}\,\delta x$।

অতএব CD তলের সরণ $=y+\frac{dy}{dx}\,\delta x$ এবং O বিন্দু হইতে C′D′ তলের দূরত্ব $=x+\delta x+y+\frac{dy}{dx}\,\delta x$।

এখন, A′B′ এবং C′D′ তলের মধ্যে আবদ্ধ ফালির দৈর্ঘ্য

= O বিন্দু হইতে C′D′ তলের দূরত্ব − O বিন্দু হইতে A′B′ তলের দূরত্ব

$$=\left(x+\delta x+y+\frac{dy}{dx}\delta x\right)-(x+y)$$

$$=\delta x+\frac{dy}{dx}\delta x$$

$\therefore$ ফালির দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন $= \left(\delta x + \frac{dy}{dx}\delta x\right) - \delta x$

$$= \frac{dy}{dx}\delta x \qquad (4.26)$$

অতএব, অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{\frac{dy}{dx}\delta x}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$ ... (4.27)

এক্ষণে যদি একক প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট AB তলের উপর সম্প্রসারণকারী বল F ঋণাত্মক X অক্ষ অভিমুখে ক্রিয়া করে তবে আমরা লিখিতে পারি,

ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = \frac{F/1}{\frac{dy}{dx}}$

অথবা, $F = Y \cdot \frac{dy}{dx}$ ... (4.28)

ধনাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে CD তলের উপর ক্রিয়ারত সম্প্রসারণকারী বল

$$= F + \frac{dF}{dx}\delta x$$

$$= Y\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(Y.\frac{dy}{dx}\right)\delta x$$

$$= Y\frac{dy}{dx} + Y\frac{d^2y}{dx^2}\delta x \qquad \cdots (4.29)$$

$\therefore$ AB ও CD তলের উপর ক্রিয়ারত সম্প্রসারণকারী বল দুইটির মধ্যে তফাত $= Y\frac{d^2y}{dx^2}\delta x$ ... (4.30)

[সমীকরণ (4.28) ও (4.29) হইতে]

এই বল AC বা BD ফালির উপর ক্রিয়া করার ফলে উহা গতিশীল হয়। এক্ষণে কঠিন বস্তুটির ঘনত্ব ρ হইলে ফালিটির ভর $(\delta x \times 1 \times \rho)$ হইবে।

$\therefore$ নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে পাই,

$$Y\frac{d^2y}{dx^2}\delta x = \delta x \times 1 \times \rho \times \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \cdots (4.31)$$

সমীকরণ (4.31)-এ, $\frac{d^2y}{dt^2}$ হইতেছে ত্বরণ।

আমরা পাই,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \cdots (4.32)$$

ইহাই D' Alembert-এর ধরণের তরঙ্গের সমীকরণ।

$\frac{Y}{\rho} = V^2$ বসাইয়া পাই,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = V^2\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \cdots (4.33)$$

সমীকরণ (4.33)-এর সাধারণ সমাধান হইতেছে,

$$y = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt) \qquad \cdots (4.34)$$

এখানে f_1 ও f_2 হইতেছে যদৃচ্ছ অপেক্ষক। এই সমাধান হইতে আমরা বলিতে পারি যে, $y = f_1(x - Vt)$ এমন একটি তরঙ্গ যাহা V বেগে ধনাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে অগ্রসর হয়। অনুরূপে, $y = f_2(x + Vt)$ একটি তরঙ্গ যাহা V বেগে ঋণাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে অগ্রসর হয়।

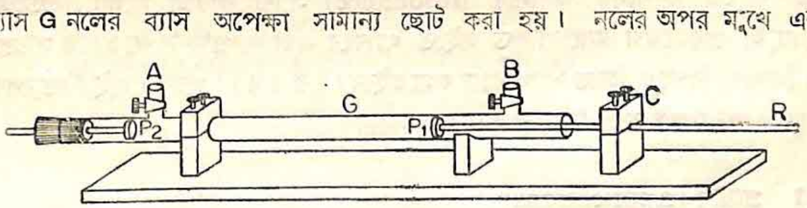
∴ কঠিন মাধ্যমে তরঙ্গ বেগ,

$$V = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \cdots (4.35)$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ইয়ং গুণাঙ্ক}}{\text{গ্যাসের ঘনত্ব}}}\ ।$$

4.8 কুন্‌টের নল (Kundt's tube)

4.3 নং চিত্রে কুন্‌টের নলের একটি নকশা দেখানো হইয়াছে। একটি প্রায় এক মিটার লম্বা ও তিন সেন্টিমিটার ব্যাসযুক্ত কাচনল G-কে উপযুক্ত অবলম্বনের সাহায্যে অনুভূমিক অবস্থায় রাখা থাকে। G নলে A ও B দুইটি প্রবেশ পথ আছে। উহাদের সাহায্যে নলের ভিতরের গ্যাস অপসারণ করিয়া অন্য কোন গ্যাস ভর্তি করা যায়। একটি ধাতব দণ্ড R, নলের এক মুখ দিয়া নলের অভ্যন্তরে এমনভাবে প্রবেশ করানো হয় যাহাতে দণ্ডের অক্ষ নলের অক্ষের সহিত একই রেখায় থাকে। দণ্ডটির মধ্যবিন্দু C ক্ল্যাম্প দ্বারা দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ থাকে এবং উহার যে প্রান্ত নলের মধ্যে প্রবেশ করানো থাকে সেই প্রান্তে একটি হাল্কা গোল চাক্‌তি P_1 আটকানো থাকে। P_1 চাক্‌তির ব্যাস G নলের ব্যাস অপেক্ষা সামান্য ছোট করা হয়। নলের অপর মুখে একটি



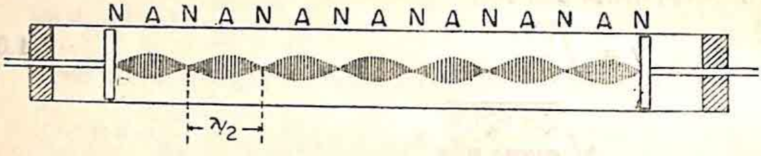
চিত্র 4.3

সঞ্চরণশীল পিস্টন P_2-এর সহিত একটি দণ্ড সংযুক্ত থাকে। নলটিকে শুষ্ক করিয়া উহার ভিতর দৈর্ঘ্য বরাবর কর্কের গুঁড়া বা লাইকোপোডিয়াম পাউডার পাতলা করিয়া

ছড়াইয়া দেওয়া হয়। এখানে C নলটিকে তরঙ্গ নল (**wave tube**) এবং R দণ্ডটিকে শব্দসৃষ্টিকারী দণ্ড (**sounding rod**) বলে।

কার্যপ্রণালী ঃ (i) প্রথমে R দণ্ডটিকে P_1 চাক্তি-সহ কাচনলের বাহিরে আনিয়া নলের অভ্যন্তরে গরম হাওয়া পাঠাইয়া শুষ্ক করিতে হইবে। অতঃপর কর্কের গুঁড়া বা লাইকোপোডিয়াম পাউডার নলের দৈর্ঘ্য বরাবর পাতলা করিয়া ছড়াইয়া দিতে হইবে। এখন P_1 চাক্তিকে পূর্বের জায়গায় রাখিয়া C-কে ভালভাবে ক্ল্যাম্প দ্বারা আটকাইতে হইবে।

(ii) এইবার R দণ্ডের C বিন্দু থেকে উহার দৈর্ঘ্য বরাবর রজন মাখানো চামড়া (ধাতব দণ্ডের বেলায়) বা ভিজা কাপড় (কাচদণ্ডের বেলায়) দ্বারা টানিলে দণ্ডে অনুদৈর্ঘ্য কম্পনের উৎপত্তি হইবে। দণ্ডের দুই প্রান্ত মুক্ত এবং মধ্য বিন্দু আবদ্ধ



চিত্র 4.4

থাকায় দুইপ্রান্তে সুস্পন্দ বিন্দু এবং মধ্যস্থলে নিস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হয়। সুতরাং নলের ভিতর যে শব্দতরঙ্গের সৃষ্টি হইবে সেই তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অর্ধেক হইবে দণ্ডের দৈর্ঘ্যের সমান। দণ্ডের কম্পনের ফলে P_1 চাক্তি অগ্র-পশ্চাৎ কম্পিত হইতে থাকিবে এবং ইহার কম্পাঙ্ক পূর্বোক্ত শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সমান হইবে।

এই সময়ে নলের ভিতরের বায়ু পরবশ বা প্রণোদিত কম্পনে (**forced vibration**) কম্পিত হইতে থাকিবে এবং P_2 পিস্টন কর্তৃক তরঙ্গ প্রতিফলিত হইয়া নলের বায়ুতে স্থাণুতরঙ্গের সৃষ্টি করিবে। P_2 পিস্টনকে অগ্র-পশ্চাৎ সরাইয়া বায়ুস্তম্ভের কম্পনের সহিত দণ্ডের কম্পনের অনুনাদ (**resonance**) সৃষ্টি করিলে নলের ভিতরের গুঁড়াগুলি প্রবলবেগে আন্দোলিত হইতে থাকিবে এবং সুস্পন্দ বিন্দু হইতে সরিয়া গিয়া নিস্পন্দ বিন্দুগুলিতে স্তূপাকারে জমা হইবে (চিত্র 4.4)। পরপর দুইটি স্তূপের ভিতরকার গড় দৈর্ঘ্য তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান।

4.8.1 প্রয়োগ (Applications)

কুন্‌টের নলের সাহায্যে (i) কঠিন, তরল ও গ্যাসে শব্দের গতিবেগ, (ii) কঠিন পদার্থের ইয়ং গুণাঙ্ক, (iii) আপেক্ষিক তাপের অনুতাপ প্রভৃতি বিষয় পরিমাপের ব্যবস্থা করা যায়।

(a) **কঠিনে অথবা বায়ুতে শব্দের গতিবেগ** (Velocity of sound in solid or in air)

মনে করি,

R দণ্ডের দৈর্ঘ্য $= L$

পরপর দুইটি স্তূপের মধ্যে গড় দৈর্ঘ্য $= l_1$,

দণ্ডে শব্দের বেগ $= V_r$

এবং বায়ুতে শব্দের বেগ $= V_a$

এক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\lambda_r}{2} \\ \text{এবং } l_1 &= \frac{\lambda_a}{2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (4.36)$$

$$\therefore \quad V_r = n\lambda_r = n.2L \quad \cdots \quad (4.37)$$

$$\text{এবং} \quad V_a = n.\lambda_a = n.2l_1 \quad \cdots \quad (4.38)$$

সমীকরণ (4.37) কে (4.38) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{V_r}{V_a} = \frac{L}{l_1} \quad \cdots \quad (4.39)$$

সমীকরণ (4.39)এ V_a জানা থাকিলে V_r বা কঠিন উপাদানে শব্দের বেগ নির্ণয় করা যায়। অনুরূপে, V_r-এর মান অবহিত থাকিলে বায়ুতে শব্দের বেগ V_a নির্ণয় করা যায়।

(b) **তরলে শব্দের বেগ** (Velocity of sound in a liquid) ঃ

কুন্টের নল প্রথমে যে তরলে শব্দের বেগ নির্ণয় করিতে হইবে উহার দ্বারা ভর্তি করা হইল। এখানে, লাইকোপোডিয়াম পাউডারের পরিবর্তে মিহি লোহাচুর ব্যবহার করা হয়। দণ্ডে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ সৃষ্টি করিলে লোহাচুর নিস্পন্দ বিন্দুগুলিতে স্তূপাকারে জমা হইবে। যদি পর পর দুইটি স্তূপের মধ্যে গড় দূরত্ব l_2 এবং তরলে শব্দের বেগ V_l হয়, তবে $V_l = 2n.l_2 \quad \cdots \quad (4.40)$

সমীকরণ (4.40)-কে (4.38) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{V_l}{V_a} = \frac{l_2}{l_1} \quad \cdots \quad (4.41)$$

$$\text{অথবা,} \quad V_l = V_a.\frac{l_2}{l_1} \quad \cdots \quad (4.42)$$

সুতরাং V_a অবহিত থাকিলে, V_l নির্ণয় করা যাইবে।

(c) **গ্যাসে শব্দের বেগ** (Velocity of sound in a gas) ঃ

কুন্টের নল প্রথমে পরীক্ষাধীন গ্যাস দ্বারা ভর্তি করা হইল। ইহার পর দণ্ডকে

কম্পিত করিয়া গ্যাসে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ সৃষ্টি করা হইল। মনে করি, এই অবস্থায় পর পর দুইটি স্তূপের মধ্যে দূরত্ব l_3।

এখন, গ্যাসে শব্দের বেগ V_g হইলে আমরা জানি,

$$V_g = 2n.l_3 \qquad \cdots (4.42)$$

সমীকরণ (4.42)-কে (4.38) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{V_g}{V_a} = \frac{l_3}{l_1}$$

$$\text{অথবা,}\quad V_g = V_a.\frac{l_3}{l_1} \qquad \cdots (4.43)$$

সুতরাং V_a জানা থাকিলে, V_g নির্ণয় করা যাইবে।

(d) কঠিনের ইয়ং গুণাঙ্ক (Young's modulus of a solid) ঃ

কুনটের নলের পরীক্ষায় কঠিনে শব্দের বেগ,

$$V_r = V_a.\frac{L}{l_1} \qquad \cdots (4.44)$$

আবার, আমরা জানি কঠিনে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ সৃষ্টি করিলে ঐ তরঙ্গের বেগ,

$$V_r = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \cdots (4.45)$$

সমীকরণ (4.44) ও (4.45) হইতে পাই

$$\sqrt{\frac{Y}{\rho}} = V_a.\frac{L}{l_1}$$

$$\text{অথবা,}\quad Y = \frac{V_a^2.L^2.\rho}{l_1^2} \qquad \cdots (4.46)$$

সুতরাং সমীকরণ (4.46)-এর সাহায্যে আমরা Y বা ইয়ং গুণাঙ্কের মান নির্ণয় করিতে পারি।

(e) গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত (Ratio of two specific heats of a gas) ঃ

লাপ্লাসের সূত্র হইতে আমরা জানি,

$$\text{বায়ুতে শব্দের বেগ,}\quad V_a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

$$\text{অথবা,}\quad \gamma = \frac{V_a^2.\rho}{P} \qquad \cdots (4.47)$$

সুতরাং কুন্‌ট নলের সাহায্যে V_a পরিমাপ করিয়া এবং বায়ুর ক্ষেত্রে P ও ρ জানা থাকায় সমীকরণ (4.47)-এর সাহায্যে দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত γ নির্ণয় করা যাইবে।

উদাহরণ (Examples)

1. প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ বাহির কর। বায়ুর ক্ষেত্রে দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত 1·4।

(Find the velocity of sound in air at NTP. The ratio of the two sp. heats for air being 1·4.)

প্রমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ, $P = 76 \times 13{\cdot}6 \times 981$ dynes/cm²

এবং $\gamma = 1{\cdot}4$

আমরা জানি,

শব্দের বেগ, $V = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$

যেখানে, ρ = প্রমাণ উষ্ণতা ও চাপে বায়ুর ঘনত্ব

$= 0{\cdot}001293$ gram/c.c.

$$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{1{\cdot}4 \times 76 \times 13{\cdot}6 \times 981}{0{\cdot}001293}}$$

$= 33130$ cm/second

$= 331{\cdot}3$ metres/second

2. কত উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ 0°C উষ্ণতায় শব্দের বেগের 1·414 গুণ হইবে নির্ণয় কর।

(Determine the temperature at which the velocity of sound in air becomes 1·414 times its value at 0°C.) (C. U. '63)

আমরা জানি, $V_t = V_o\,(1 + 0{\cdot}00183\ t)$

অথবা, $\dfrac{V_t}{V_o} = 1 + 0{\cdot}00183\ t$

এখানে, $\dfrac{V_t}{V_o} = 1{\cdot}414$

$$\therefore \quad 1{\cdot}414 = 1 + 0{\cdot}00183t$$

অথবা, $t = \dfrac{0{\cdot}414}{0{\cdot}00183}$

$= 226{\cdot}2^\circ$C।

3. বিদ্যুৎ চমকের 6 seconds পর বজ্রের শব্দ শোনা গেল। বায়ুর গড় উষ্ণতা যদি 25°C হয় তবে বিদ্যুৎ চমকের দূরত্ব নির্ণয় কর। (0°C উষ্ণতায় বায়ুতে শব্দের বেগ হইতেছে 332 metres/second)।

(A thunder is heard after 6 seconds of a lighting flash. Calculate the distance at which the lightning occurred if the mean temperature of the air be 25°C (velocity of sound in air at 0°C is 332 metres/second.) (C. U. '66)

আমরা জানি, $V_t = V_o (1 + 0{\cdot}00183\, t)$

এখানে, $V_o = 332$ metres/second

$t = 25^\circ C$

সুতরাং $V_{25} = 332 (1 + 0{\cdot}00183 \times 25)$

$= 347{\cdot}188$ metres/second

এখন, বিদ্যুৎ চমকের স্থানের উচ্চতা h হইলে,

$h = V_{25} \times$ সময়

$= 347{\cdot}188 \times 6$ ($\because$ সময় $= 6$ seconds)

$= 2083{\cdot}128$ metres।

4. কুনড্টের নলের 70 c.c. দীর্ঘ দণ্ডের ক্ল্যাম্প করা মধ্যস্থল কম্পিত করিলে গুড়াগুলি 5 cm দীর্ঘ কতগুলি লুপে সজ্জিত হইয়া পড়ে। দণ্ডে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। বায়ুতে শব্দের বেগ 340 metres/second।

(When the rod of the Kundt's tube of length 70 cm clamped in the middle is set in vibration, the power is arranged in loops, length of each loop being 5 cm. Find the velocity of sound in the rod ; velocity of sound in air equals 340 metres/second.) (C.U. '68)

আমরা জানি, $\dfrac{V_r}{V_a} = \dfrac{L}{l_1}$

এখানে, $V_a = 340$ metres/second

$L = 70$ cm

$l_1 = 5$ cm

$\therefore \quad V_r = \dfrac{340 \times 70}{5}$

$= 4760$ metres/second।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. গ্যাস মাধ্যমে শব্দের বেগের একটি সাধারণ রাশিমালা উপপাদন কর এবং নিউটন ও লাপ্লাসের সূত্র আলোচনা কর।

শব্দের বেগ চাপ, উষ্ণতা ও আর্দ্রতার উপর কিরূপে নির্ভর করে ?

(Deduce a general expression for the velocity of sound in a gas and discuss the formula due to Newton and Laplace.

How does the velocity of sound depend on pressure, temperature and humidity ?) (C. U. '67)

2. গ্যাসে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগের রাশিমালা উপপাদন কর।

বিভিন্ন উষ্ণতা ও চাপে গ্যাসের ভিতর দিয়া শব্দের পরিমাপের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর। শব্দের বেগ হইতে কিরূপে দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত নির্ণয় করা যায় ?

(Deduce the expression for the velocity of longitudinal wave in gases.

Describe a method of measuring the velocity of sound in gas at different temperatures and pressures. How can the ratio of sp. heats be determined from the velocity of sound ?) (C. U. '66)

3. গ্যাস মাধ্যমে শব্দের বেগ সম্পর্কিত লাপ্লাসের রাশিমালা উপপাদন কর। গ্যাসে শব্দের বেগ পরম তাপমাত্রার সহিত কিরূপে পরিবর্তিত হয় তাহা দেখাও।

(Deduce Laplace's expression for the velocity of sound in a gas. Show how the velocity of sound in a gas varies with its absolute temperature.) (C. U. '65)

4. কুন্টের নল কি ? ইহার সাহায্যে গ্যাসে শব্দের বেগ কিরূপে নির্ণয় করা যায় বর্ণনা কর। কোন ধাতব দণ্ডের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয়ে এই পদ্ধতি কি প্রয়োগ করিতে পার ? তোমার বক্তব্য ব্যাখ্যা কর।

(What is Kundt's tube ? Describe how you can find the velocity of sound in a gas with it. Can you apply this method for the determination of Young's modulus of a metallic rod ? Explain your statement.) (C. U. '62)

5. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ :

(a) কুন্টের নল পরীক্ষা,

(b) কুন্টের নল ও ইহার ব্যবহার।

[Write short notes on :

(a) Kundt's tube experiment, (C. U. '70, '71)

(b) Kundt's tube and its uses. (C. U. '78)]

6. স্থির কম্পাঙ্কের একটি শব্দ উৎস শুষ্ক বাতাসে -13°C এবং 27°C উষ্ণতায় যে তরঙ্গ সৃষ্টি করে তাহাদের দৈর্ঘ্যের তুলনা কর।

(Compare the wavelengths in dry air at -13°C and 27°C for sound generated by a given source at a constant frequency.)

(C. U. '79) [Ans. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0{\cdot}93$]

7. 150 cm দীর্ঘ একটি পিতলের দণ্ডের সাহায্যে একটি কুন্ট নলের বায়ুস্তম্ভে কম্পনের সৃষ্টি করা হইলে দেখা গেল পর পর দুইটি নিস্পন্দ বিন্দুর ভিতর দূরত্ব 13·6 cm। পিতলের দণ্ডে ও বায়ুতে শব্দের বেগের অনুপাত কত হইবে ?

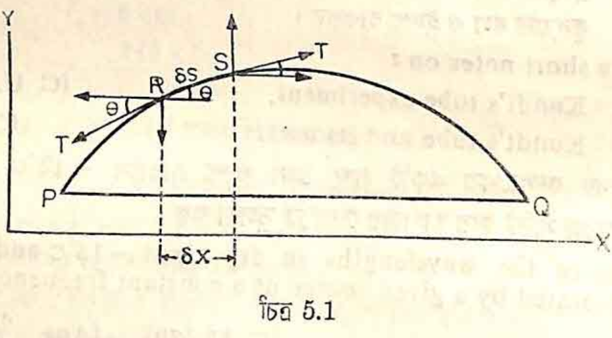
(A Kundt's tube is excited by a brass rod 150 cm long and the distance between the successive nodes in the tube is 13·6 cm. What is the ratio of the velocity of sound in brass to that in air ? [Ans. 11·03]

পঞ্চম পরিচ্ছেদ
তারের তির্যক কম্পন
(Transverse Vibration of Strings)

5.1 সূচনা (Introduction)

বিতত অর্থাৎ প্রসারিত বা বিস্তৃত করিয়া রাখা সুষম, নমনীয় এবং ক্ষুদ্র ব্যাসযুক্ত একটি তারকে উহার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে টানিয়া ছাড়িয়া দিলে তারের বিভিন্ন কণা দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে কাঁপিতে থাকিবে এবং ঐ কম্পন কণা হইতে কণাতে স্থানান্তরিত হইবে—অর্থাৎ তারে তির্যক তরঙ্গের সৃষ্টি হইবে। এই তরঙ্গ একটি নির্দিষ্ট বেগ লইয়া দুই বদ্ধ প্রান্তের দিকে অগ্রসর হইবে এবং অতঃপর বদ্ধ প্রান্ত কর্তৃক প্রতিফলিত হইবে। প্রতিফলিত এই তরঙ্গদ্বয় বিপরীত দিকে একই বেগ লইয়া অগ্রসর হইতে থাকিবে এবং যখন তারের দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দুতে পৌঁছাইবে তখন একে অপরকে অতিক্রম করিবে। একই প্রকৃতির দুই বিপরীতমুখী তরঙ্গের মিলনের ফলে স্থাণু তরঙ্গের উৎপত্তি হইবে এবং তারটি কম্পিত হইতে থাকিবে।

5.2 বিতত তারে তির্যক বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ (Vetocity of transverse waves along a stretched string)



চিত্র 5.1

মনে করি, চিত্র 5.1 এর ন্যায় P ও Q বিন্দুতে আবদ্ধ করিয়া একটি তারকে T বিতানের সাহায্যে X-অক্ষ বরাবর বিতত করা হইয়াছে। তারটিকে Y-অক্ষ অভিমুখে অর্থাৎ উহার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে বিতত করিয়া ছাড়িয়া দেওয়ার ফলে মনে করি কোন এক সময়ে $PRSQ$ অবস্থান পাইল। যদি তারটির সরণ খুব কম ধরা হয় তবে $PRSQ$ অবস্থানে PQ রেখার সহিত তারটির নতি সামান্য হইবে। এই অবস্থায় খুব কাছাকাছি অবস্থিত R ও S বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী তারের অংশ δs-কে ঋজু মনে করা যাইতে পারে।

R ও S বিন্দুতে যে বল ক্রিয়া করিবে তাহা হইতেছে যথাক্রমে R বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর টান T এবং S বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর টান T। তারের RS অংশ X-অক্ষের সহিত θ কোণে নত থাকিলে R বিন্দুতে টান ঋণাত্মক X-অক্ষ বরাবর $T \cos \theta$ এবং ঋণাত্মক Y-অক্ষ বরাবর $T \sin \theta$ হইবে।

এক্ষণে যেহেতু θ খুব ক্ষুদ্র

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad & \cos \theta = 1, \\ \text{এবং } & \sin \theta = \tan\theta = \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \qquad (5.1)$$

$\therefore$ R বিন্দুতে T-এর উপাংশ দুইটি হইবে

$$\left.\begin{aligned} & T \cos \theta = T \\ \text{এবং } \; & T \sin \theta = T\frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \qquad (5.2)$$

অতঃপর S বিন্দুতে T-এর উপাংশ দুইটির মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ R বিন্দুতে y-উপাংশটির মান $T\frac{dy}{dx}$, অতএব X-অক্ষ বরাবর T-এর y-উপাংশটির পরিবর্তনের হার হইবে $\frac{d}{dx}\left(T\frac{dy}{dx}\right)$।

সুতরাং R বিন্দু হইতে S বিন্দুতে আসিতে মোট পরিবর্তন

$$= \frac{d}{dx}\left(T \frac{dy}{dx}\right) \delta x$$

$$= \frac{d}{dx}\left(T \frac{dy}{dx}\right) \delta s = T\frac{d^2y}{dx^2}\delta s$$

[যেখানে, $\delta x = X$-অক্ষের উপর RS-এর অভিক্ষেপ (projection)
$= \delta s$ ($\because$ θ খুব ক্ষুদ্র)]

এখন, S বিন্দুতে বিতত T-এর y-উপাংশের মান

$= R$ বিন্দুতে বিতত T-এর y-উপাংশের মান $+$ R ও S বিন্দুর ভিতর বিতত T-এর y-উপাংশের মান

$$= T\frac{dy}{dx} + T\frac{d^2y}{dx^2}\delta s$$

এবার RS-এর উপর লব্ধি বলের পরিমাণ নির্ণয় করা যাইতে পারে। যেহেতু R বিন্দুতে X-অক্ষ বরাবর উপাংশটি x-এর উপর নির্ভরশীল নয়, কাজেই R-বিন্দুতে X-অক্ষ বরাবর উপাংশটির যে মান পাওয়া গিয়াছে S বিন্দুতেও তাহা একই হইবে। R ও S বিন্দুতে বিতত T-এর x উপাংশদ্বয় সমান ও বিপরীত বলিয়া পরস্পরকে প্রশমিত করে।

∴ লব্ধি বল যাহা তারের RS অংশের উপর y-অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করে

$$= \left(T\frac{dy}{dx}+T\frac{d^2y}{dx^2}\delta s\right)-\left(T\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= T\frac{d^2y}{dx^2}\delta s$$

এই লব্ধি বলের দ্বারাই তারটি গতিপ্রাপ্ত হয়। যদি তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ভর m ধরা হয় তবে δs দৈর্ঘ্যে ভর হয় $m\times\delta s$। সুতরাং নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র হইতে পাই,

$$T\frac{d^2y}{dx^2}\delta s=m.\ \delta s.\ \frac{d^2y}{dt^2} \quad \dots \quad (5.3)$$

সমীকরণ (5.3)-এ $\frac{d^2y}{dt^2}$ হইতেছে y-অক্ষ বরাবর ত্বরণ।

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{T}{m}\ \frac{d^2y}{dx^2} \quad \dots \quad (5.4)$$

সমীকরণ (5.4) হইতেছে তরঙ্গের অবকল সমীকরণ। ইহাকে প্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $\frac{d^2y}{dt^2}=V^2\frac{d^2y}{dx^2}$ এর সহিত তুলনা করিয়া পাই,

$$V=\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \dots \quad (5.5)$$

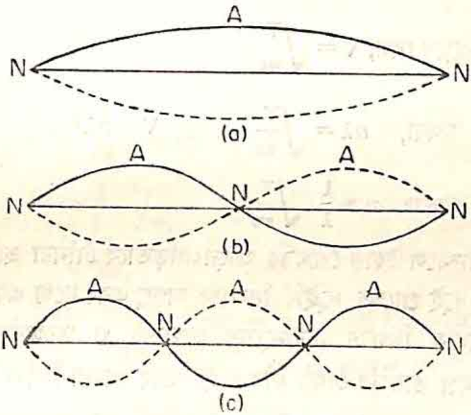
এখানে V= বিতত তারে তির্যক তরঙ্গের বেগ।

5.3 বিতত তারে বিভিন্ন ধরণের কম্পন (Different modes of vibration of a stretched string)

(i) একটি বিতত তারের মধ্য বিন্দুতে উহার দৈর্ঘ্যের আড়াআড়ি ভাবে অল্প একটু টানিয়া ছাড়িয়া দিলে তারটি উহার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে একযোগে উঠানামা করিবে এবং উহা তির্যক তরঙ্গের আকার পাইবে। চিত্র 5.2(a)-তে ইহা দেখানো হইয়াছে। তারটির দুই আবদ্ধ প্রান্তে কোন কম্পন হইবে না কিন্তু মধ্যভাগে কম্পন সর্বাধিক হইবে। দুই আবদ্ধ প্রান্তকে নিস্পন্দ বিন্দু (nodes) এবং মধ্যভাগে সর্বাধিক কম্পনের বিন্দুটিকে সুস্পন্দ বিন্দু (antinode) বলে। অনুপ্রস্থ কম্পনের ফলে এই সময়ে যে সুর নির্গত হয় তাহাকে মূল সুর (fundamental tone) বা প্রথম সমমেল বা পূর্ণগুণিত উপস্থর (first harmonic) বলে। মূল সুরের কম্পাঙ্ক সর্বাপেক্ষা কম।

(ii) একটি বিতত তারের মধ্য বিন্দুকে আঙুল দ্বারা স্পর্শ করিয়া উহাকে দুই অংশে বিভক্ত করা হইল। এক্ষণে এক অংশের মধ্য বিন্দু আড়াআড়ি ভাবে অল্প টানিয়া ছাড়িয়া দিলে এবং সঙ্গে সঙ্গে আঙুল তুলিয়া লইলে তারটি 5.2(b) চিত্রের মত কম্পিত

হইবে। ফলে তারটির মধ্য বিন্দুতে এবং দুই আবদ্ধ প্রান্তে নিস্পন্দ বিন্দু এবং দুইটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি করিয়া সুস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হইবে। অর্থাৎ মোট তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু ও দুইটি সুস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হইবে। তারের এই কম্পনে যে সুর নির্গত হয় তাহাকে দ্বিতীয় সমমেল বা দ্বিতীয় পূর্ণগুণিত উপসুর (**second harmonic**) বলে। ইহা প্রথম অষ্টম সুর বা প্রথম সপ্তক (**first octave**) নামেও অভিহিত হয়। দ্বিতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হইয়া থাকে।



চিত্র 5.2

(iii) একটি বিতত তারকে তিন অংশে বিভক্ত করিয়া এক অংশের সীমানা আঙ্গুল দ্বারা স্পর্শ করা হইল। এক্ষণে ঐ অংশের মধ্যবিন্দু অল্প টানিয়া ছাড়িয়া দিলে এবং সঙ্গে সঙ্গে আঙ্গুল তুলিয়া লইলে তারটি 5.2(c) চিত্রের মত কম্পিত হইবে। এক্ষেত্রে মোট চারটি নিস্পন্দ বিন্দু ও তিনটি সুস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হইবে। তারের এই কম্পনে যে সুর নির্গত হয় তাহাকে তৃতীয় সমমেল বা তৃতীয় পূর্ণগুণিত উপসুর (**third harmonic**) বলে। তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের তিনগুণ হয়।

5.3.1 সমমেল ও অসমমেল উপসুর (Harmonic and inharmonic overtones)

যে সমস্ত সুরের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক তাহাদের বলা হয় সমমেল (**harmonic**)। মূলসুরকে প্রথম সমমেল, মূলসুরের দ্বিগুণ কম্পাঙ্ক যুক্ত সুরকে দ্বিতীয় সমমেল, তিনগুণ কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট সুরকে তৃতীয় সমমেল ইত্যাদি বলে।

কোন সুর মূলসুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হউক বা না হউক, যদি ইহার কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বেশী হয় তবে তাহাকে আমরা উপসুর (**overtone**) বলি। এই হিসাবে প্রথম সমমেল ছাড়া আর সমস্ত সমমেলই উপসুর। দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি সমমেলকে সমমেল উপসুর (**harmonic overtones**)

বলে। অপরপক্ষে যে সমস্ত সুরের কম্পাঙ্ক মূলসুর অপেক্ষা অধিক কিন্তু মূলসুরের সরল গুণিতক নয় তাহাদের অসমমেল উপসুর (**inharmonic overtones**) বলে।

5.4 বিতত তারের অনুপ্রস্থ কম্পনের কম্পাঙ্ক (Frequency of transverse vibration of a stretched string)

আমরা জানি, যদি বিতত তারের ক্ষেত্রে T তারে প্রযুক্ত বিততন এবং m তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ভর হয় তবে,

$$\text{অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ, } V = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\text{অথবা,} \quad n\lambda = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (\because \ V = n\lambda)$$

$$\text{অর্থাৎ,} \quad n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad (5.6)$$

তারটিকে যদি মধ্যস্থলে উহার দৈর্ঘ্যের আড়াআড়িভাবে টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে উহার দুই প্রান্তে দুইটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং মধ্যে একটি সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্ট হইবে। এই সময়ে নির্গত মূলসুরের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য যদি যথাক্রমে n_1 ও λ_1 হয় এবং সমগ্র তারটির দৈর্ঘ্য যদি l হয় তবে আমরা লিখিতে পারি,

$$l = 1 \times \frac{\lambda_1}{2}$$

$$\text{অথবা,} \quad \lambda_1 = 2l \qquad \cdots \quad (5.7)$$

$\therefore$ সমীকরণ (5.6)-কে লেখা যাইতে পারে,

$$n_1 = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad \cdots \quad (5.8)$$

যদি তারের ব্যাসার্ধ r এবং ঘনত্ব ρ হয় তবে,

$$m = \pi r^2 \rho$$

$$\text{অতএব,} \quad n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 \rho}}$$

$$= \frac{1}{2rl}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$$

$$= \frac{1}{dl}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \quad (d = \text{তারের ব্যাস} = 2r) \qquad \cdots \quad (5.9)$$

এইবার তারটিকে যদি দুইটি খণ্ডে কম্পিত করা হয় তবে তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং দুইটি সুস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হইবে। যেহেতু দুইটি পরপর অবস্থিত নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান। সুতরাং পরপর তিনটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের দ্বিগুণ হইবে। এই সময়ে নির্গত দ্বিতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক যদি n_2 এবং তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য λ_2 হয় তবে,

$$l = 2 \times \frac{\lambda_2}{2}$$

$$= \lambda_2$$

সুতরাং, $$n_2 = \frac{1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= 2n_1 \qquad \cdots \quad (5.10)$$

আবার তারটিকে যদি তিনটি খণ্ডে কম্পিত করা যায় তবে চারটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং তিনটি সুস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হইবে। এক্ষেত্রে পরপর চারটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের তিনগুণ হইবে। সুতরাং এই সময়ে নির্গত তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক যদি n_3 এবং তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য λ_3 হয় তবে,

$$l = 3 \times \frac{\lambda_3}{2}$$

অথবা, $$\lambda_3 = \frac{2l}{3}$$

সুতরাং, $$n_3 = \frac{1}{\lambda_3}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{3}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= 3n_1 \qquad \cdots \quad (5.11)$$

এইভাবে সমীকরণদ্বয় (5.10) এবং (5.11) হইতে দেখা যাইতেছে যে, দ্বিতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ এবং তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের তিনগুণ হয়। যদি বিতত তারটি s খণ্ডে কম্পিত হয় তবে s সংখ্যক সুস্পন্দ বিন্দু এবং $(s+1)$ সংখ্যক নিস্পন্দ বিন্দু থাকিবে। সেক্ষেত্রে,

$$l = s \times \frac{\lambda_s}{2}$$

অথবা, $\lambda_s = \frac{2l}{s}$

$$\therefore \quad n_s = \frac{s}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = sn_1 \qquad \cdots \quad (5.12)$$

এখানে n_s হইতেছে s-তম সমমেলের কম্পাংক।

5.5 বিতত তারের অনুপ্রস্থ কম্পনের সূত্রাবলী (Laws of transverse vibration of a stretched string)

সমীকরণ (5.12) হইতে তারের মূলসুরের কম্পাংক n-এর সহিত উহার দৈর্ঘ্য l, বিততি T এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m-এর সম্পর্কের সূত্র পাওয়া যায়।

(i) **দৈর্ঘ্যের সূত্র** (Law of length)ঃ নির্দিষ্ট তারের বিততি সমান থাকিলে কম্পাঙ্ক উহার দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতী হয়,

অর্থাৎ, $n \propto \frac{1}{l}$, যখন T ও m স্থির থাকে।

(ii) **বিততির বা টানের সূত্র** (Law of tension)ঃ নির্দিষ্ট তারের দৈর্ঘ্য সমান থাকিলে কম্পাঙ্ক উহার বর্গমূলের সমানুপাতী হয়,

অর্থাৎ, $n \propto \sqrt{T}$, যখন l ও m স্থির থাকে।

(iii) **ভরের সূত্র** (Law of mass)ঃ একই দৈর্ঘ্য ও টান বিশিষ্ট বিভিন্ন তারের কম্পাঙ্ক উহাদের একক দৈর্ঘ্যের ভরের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতী হয়,

অর্থাৎ, $n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$, যখন l ও T স্থির থাকে।

5.6 অনুদৈর্ঘ্য ও অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগের তুলনা (Comparison of the velocities of longitudinal and transverse waves)

কঠিন বস্তুর ভিতর দিয়া অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ, V_L-কে লেখা যাইতে পারে,

$$V_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \cdots \quad (5.13)$$

সুতরাং V_L বস্তুটির উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক এবং ঘনত্বের উপর নির্ভরশীল।

অপরপক্ষে, বিতত তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ, V_T-কে লিখিতে পারি,

$$V_T = \sqrt{\frac{T}{m}} \qquad \cdots \quad (5.14)$$

অর্থাৎ, এক্ষেত্রে বেগ তারের বিততি এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভরের উপর নির্ভর করে।

অতএব আমরা বলিতে পারি যে, বিততি পরিবর্তন করিয়া অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগের পরিবর্তন করা সম্ভব।

এখন গাণিতিকভাবে দেখা যাইতে পারে যে, কত বিততি প্রয়োগ করিলে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগের সহিত সমান হয়।

আমরা জানি, অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ, $V_L = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y\alpha}{\rho\alpha}}$ ... (5.15)

আবার, অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ, $V_T = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{T}{\alpha\rho}}$ (α = তারের প্রস্থচ্ছেদ এবং ρ = ঘনত্ব। $\because$ $m = \alpha \times 1 \times \rho$) ... (5.16)

(5.15) এবং (5.16) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$\sqrt{\frac{Y\alpha}{\rho\alpha}} = \sqrt{\frac{T}{\alpha\rho}}$$

অথবা, $T = Y\alpha$ ... (5.17)

সুতরাং, দুইটি বেগ সমান হইতে হইলে তারের উপর প্রযুক্ত বিততি উহার উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক এবং প্রস্থচ্ছেদের গুণফলের সমান হইতে হইবে।

সমীকরণ (5.17) হইতে পাই,

$$Y = \frac{T}{\alpha} \quad \cdots \quad (5.18)$$

অর্থাৎ, ইয়ং গুণাঙ্ক = $\dfrac{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিততি}}{\text{প্রস্থচ্ছেদ}}$ = অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন

আবার আমরা জানি,

$$Y = \frac{\text{অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

সুতরাং অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি 1 হইলেই একমাত্র ইয়ং গণাঙ্ক, অনুদৈর্ঘ্য পীড়নের সমান হইবে। কিন্তু যেহেতু অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি সর্বদা 1 অপেক্ষা কম,

$\therefore$ $Y >$ অনুদৈর্ঘ্য পীড়ন

অথবা, $Y > \frac{T}{\alpha}$

অথবা, $Y\alpha > T$

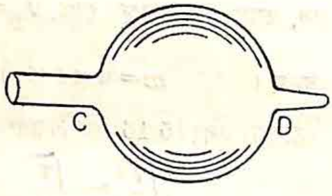
অর্থাৎ, $V_L > V_T$

কাজেই আমরা বলিতে পারি যে, বিতত তার দিয়া প্রবাহিত অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ অপেক্ষা বৃহত্তর।

5.7 হেল্‌মোজের অনুনাদক (Helmholtz resonator)

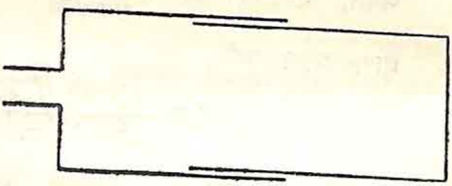
জার্মান বিজ্ঞানী হেল্‌মোজ একটি সহজ যন্ত্র উদ্ভাবন করেন যাহার সাহায্যে বহু কম্পাংকযুক্ত স্বরকে বিশ্লেষণ করিতে পারা যায়। তাঁহার নামানুযায়ী এই যন্ত্রকে হেল্‌মোজের অনুনাদক বলে।

ইহা একটি পাতলা কাচ বা পিতলের তৈয়ারী ফাঁপা গোলক যাহার অভ্যন্তরে বায়ু বা অন্য কোন গ্যাস রাখা হয় (চিত্র 5.3)। গোলকের C ও D দুইটি মুখ থাকে যাহার C মুখটি অপেক্ষাকৃত বড়। C মুখ ও গোলকের মধ্যের অংশটুকুকে বলে অনুনাদকের মধ্যকুশন বা গ্রীবা (neck)। সাধারণত দুইটি বিভিন্ন ধরনের অনুনাদক ব্যবহৃত হয়। প্রথমটিতে অনুনাদকের গ্রীবার দৈর্ঘ্য অনুনাদকের ব্যাসের সহিত তুলনামূলকভাবে উপেক্ষণীয় কিন্তু অপরটিতে অনুনাদকের গ্রীবার দৈর্ঘ্য উহার ব্যাসের প্রায় সমান অথবা বেশী। C মুখের সম্মুখে শব্দের উৎস ধরা হয় এবং উহার বিপরীত দিকে অবস্থিত D মুখে কান রাখিয়া অথবা উহার সঙ্গে একটি রবার নল যোগ করিয়া শব্দ শোনা যায়।



চিত্র 5.3

অনুনাদকের আকার অনেক সময় চোঙাকৃতি হইয়া থাকে। চিত্র 5.4-এ এরূপ একটি চোঙাকৃতি অনুনাদক দেখানো হইয়াছে। উহার ভিতরের অংশের উপর দিয়া বাহিরের অংশ টানিয়া উহার আয়তনের পরিবর্তন করা যায় এবং ফলে উহার কম্পাঙ্কের পরিবর্তন হয়। অনুনাদকের আয়তন অনুযায়ী উহার ভিতরের বায়ুর একটি স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (natural frequency) থাকে। অনুনাদকের গ্রীবার সামনে কোন শব্দ উৎস ধরিলে গ্রীবার অভ্যন্তরে বায়ুতে কম্পন হয়। ফলে অনুনাদকের ভিতরের বায়ু কম্পনরত বায়ুর উপর স্প্রিং-এর মত কাজ করে। যদি গ্রীবায় আপতিত শব্দে এমন কোন সুর থাকে যাহার কম্পাঙ্ক অনুনাদকের স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সহিত সমান, তবে অনুনাদকের ভিতরের বায়ুতে অনুনাদের উৎপত্তি হইবে এবং ঐ বিশেষ কম্পাংক বিশিষ্ট সুরটি জোরে শোনা যাইবে। সুতরাং বোঝা যাইতেছে যে, কোন জটিল স্বরের কম্পাংক বিশ্লেষণের জন্য বিভিন্ন কম্পাঙ্কের ও পৃথক পৃথক আয়তনের অনেকগুলি অনুনাদকের সাহায্য লইতে হইবে।


চিত্র 5.4

5.7.1 অনুনাদকের স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (Natural frequency of a resonator)

মনে করি, বায়ুতে শব্দের বেগ V এবং অনুনাদকের আয়তন v। যদি বায়ুর ঘনত্ব $=\rho$, অনুনাদকের মধ্যকুণ্ডনের বা গ্রীবার দৈর্ঘ্য $=l$ এবং উহার প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $=s$ ধরা হয় তবে গ্রীবার ভিতরে আবদ্ধ বায়ুর ভর $=\rho ls$। এখন ধরা যাক, সামান্য চাপ হ্রাসের ফলে গ্রীবার বায়ু বাহিরের দিকে x দূরত্ব সরিয়া গেল। যদি গ্রীবার ভিতরে ও বাহিরে বায়ুর চাপ যথাক্রমে P ও P_o হয় তবে চাপের পরিবর্তন $=(P-P_o)$

$\therefore$ গ্রীবার উপর প্রযুক্ত বল $=(P-P_o)s$

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হইতে পাই,

$$(P-P_o)s=\rho ls\,\frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots (5.19)$$

সমীকরণ (5.19)এ, $\frac{d^2x}{dt^2}$ হইতেছে বায়ুস্তরের ত্বরণ।

এক্ষণে যেহেতু এক্ষেত্রে তনুভবন ঘটিয়াছে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায়,

$\therefore \quad P(v+sx)^\gamma=P_o v^\lambda \qquad$ ($\gamma=$ বায়ুর দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত)

অথবা, $\quad P\left(1+\frac{sx}{v}\right)^\gamma v^\gamma=P_o v^\gamma$

অথবা, $\quad P\left(1+\frac{\gamma sx}{v}\right)=P_o$

অথবা, $\quad P-P_o=-\frac{\gamma sxP}{v}$

সমীকরণ (5.19) হইতে পাই,

$$\rho ls\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\gamma sxP}{v}\cdot s$$

অথবা, $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\gamma sxP}{v\rho l}$$

$$=-\omega^2x \quad \cdots (5.20)$$

যেখানে, $\omega^2=\frac{\gamma Ps}{v\rho l}$

সমীকরণ (5.20) হইতেছে সরল দোলগতির অবকল সমীকরণ। অর্থাৎ আমরা দেখিতে পাইতেছি যে, অনুনাদকের বায়ুর কম্পন সরল দোলগতি অনুসরণ করে। ইহার কম্পাঙ্ক যদি n হয় তবে,

$$\omega^2=(2\pi n)^2=\frac{\gamma Ps}{v\rho l}$$

$$\text{অথবা,}\quad n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}\frac{s}{lv}}.$$

$$=\frac{V}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{lv}}\quad\left(\because\ V=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}\right)\qquad \cdots (5.21)$$

সমীকরণ (5.21)এ, s/l অনুপাতকে গ্রীবার শব্দ পরিবাহিতা (**acoustical conductivity of the neck**) বলে।

5.8 ডপলার সূত্র (Doppler's principle)

মনে করি, কোন শব্দ উৎস n কম্পাঙ্কের সুর উৎপন্ন করিতেছে। দূরে দন্ডায়মান কোন শ্রোতা n সংখ্যক কম্পাঙ্কের সুর শুনিতে পাইবে, যদি উৎস ও শ্রোতা উভয়েই স্থির থাকে। কিন্তু যদি উৎস গতিশীল, শ্রোতা গতিশীল বা উভয়েই গতিশীল হয় তবে উহাদের আপেক্ষিক গতির ফলে শ্রোতার কানে শব্দের আপাত পরিবর্তন হইবে। অর্থাৎ শ্রোতা প্রতি সেকেন্ডে ভিন্ন সংখ্যক তরঙ্গ শুনিতে পাইবে। প্লাটফরমে দাঁড়াইয়া কোন গতিশীল ট্রেনের বংশীধ্বনি শুনিলে স্বরের তীক্ষ্নতার এই পরিবর্তন উপলব্ধি করা যায়। যখন ট্রেন প্লাটফরমের দিকে অগ্রসর হয় তখন স্বরের তীক্ষ্নতা বৃদ্ধি পাইতেছে বলিয়া মনে হয় কিন্তু প্লাটফরম ছাড়াইয়া চলিয়া যাইবার সময় মনে হয় যেন তীক্ষ্নতা ক্রমশ কমিয়া আসিতেছে।

আপেক্ষিক গতির ফলে শ্রোতা ও উৎসের মধ্যে কম্পাঙ্কের এই আপাত পরিবর্তনকে **ডপলার ক্রিয়া (Doppler's effect)** বলে। যে নীতির উপর এই আপাত পরিবর্তনের ব্যাখ্যা ডপলার প্রতিষ্ঠিত করেন তাহা **ডপলার সূত্র (Doppler's principle)** নামে খ্যাত। অবশ্য একথা মনে রাখিতে হইবে যে, শ্রোতা ও উৎসের ভিতর এই আপেক্ষিক গতিবেগের মান যদি শব্দের গতিবেগ অপেক্ষা বেশী হয় তবে সেক্ষেত্রে ডপলার সূত্র প্রযোজ্য হইবে না।

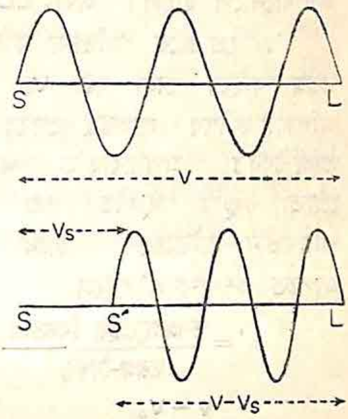
5.8.1 ডপলার ক্রিয়ার দরুণ স্বরের তীক্ষ্নতার আপাত পরিবর্তন (Apparent change of pitch due to Doppler's effect)

ডপলার ক্রিয়ার আলোচনায় আমরা নিম্নলিখিত তিনটি বিষয় বিবেচনা করিতে পারি ঃ (*a*) শ্রোতা স্থির কিন্তু উৎস গতিশীল, (*b*) উৎস স্থির কিন্তু শ্রোতা গতিশীল এবং (*c*) উৎস ও শ্রোতা উভয়েই গতিশীল।

(*a*) **শ্রোতা স্থির কিন্তু উৎস গতিশীল (Listener at rest but the source in motion)**

মনে করি, শব্দের বেগ V এবং S উৎস প্রতি সেকেন্ডে n-সংখ্যক তরঙ্গ উৎপন্ন করিতেছে। যদি উৎস স্থির থাকে তবে তরঙ্গ V দৈর্ঘ্য অধিকার করিবে, কারণ শব্দের বেগ V।

এখন উৎস যদি V_s গতিবেগ লইয়া শ্রোতার দিকে অগ্রসর হয় তবে 1 সেকেণ্ড পর S হইতে S′ অবস্থানে আসিবে (চিত্র 5.5) এবং তখন $SS' = V_s$। ইহার ফলে প্রতি সেকেণ্ডে যে n-সংখ্যক তরঙ্গ সৃষ্টি হইতেছে তাহারা S′L স্থানে অবস্থান করিবে। অর্থাৎ উহারা $(V - V_s)$ দৈর্ঘ্য অধিকার করিবে। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, উৎসের গতির ফলে তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হয়।



চিত্র 5.5

∴ পরিবর্তিত তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য $= \dfrac{V - V_s}{n}$ ... (5.22)

শ্রোতা L যে শব্দ শুনিবে তাহার আপাত কম্পাঙ্ক n' হইলে,

$$n' = \frac{\text{শব্দের গতিবেগ}}{\text{পরিবর্তিত তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য}}$$

$$= \frac{V}{V - V_s} . n \qquad \cdots (5.23)$$

∴ উৎস শ্রোতার দিকে অগ্রসর হইলে, $n' > n$; অর্থাৎ শ্রুত স্বরের তীক্ষ্ণতার আপাত বৃদ্ধি হয়।

আবার, উৎস যদি শ্রোতা হইতে দূরে সরিয়া যায়, তবে

$$n' = \frac{V}{V + V_s} \cdot n \qquad [\because V_s \text{ ঋণাত্মক}] \qquad \cdots (5.24)$$

∴ উৎস শ্রোতা হইতে দূরে সরিয়া গেলে, $n' < n$; অর্থাৎ এক্ষেত্রে শ্রুত স্বরের তীক্ষ্ণতার আপাত হ্রাস হয়।

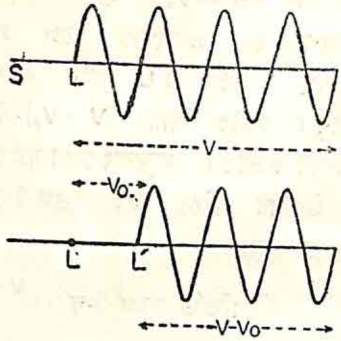
(*b*) **উৎস স্থির কিন্তু শ্রোতা গতিশীল (Source at rest but the listener in motion)**

শ্রোতা যদি স্থির থাকে তবে প্রতি সেকেণ্ডে শ্রোতাকে অতিক্রম করিয়া যে n-সংখ্যক তরঙ্গ যাইবে তাহারা V দূরত্ব অধিকার করিবে।

∴ এক্ষেত্রে শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য, $\lambda = \dfrac{V}{n}$ ... (5.25)

এক্ষণে মনে করি, শ্রোতা v_o বেগে উৎস হইতে দূরে সরিয়া 1 সেকেন্ড পরে L' অবস্থানে পেঁছাইল। অর্থাৎ $LL' = v_o$ হইল (চিত্র 5.6)।

∴ শ্রোতাকে অতিক্রম করিয়া যে তরঙ্গ যাইবে তাহা $(V - v_o)$ দৈর্ঘ্য অধিকার করিবে। সুতরাং এক্ষেত্রে তরঙ্গের তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকিলেও শ্রোতা কর্তৃক গৃহীত তরঙ্গ সংখ্যার পরিবর্তন হইতেছে। কাজেই শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক n' হইলে,



চিত্র 5.6

$$n' = \frac{\text{তরঙ্গগুচ্ছের বিস্তার}}{\text{তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য}}$$

$$= \frac{V - v_o}{\lambda} \qquad \cdots (5.26)$$

$$= \frac{V - v_o}{V} \cdot n \quad [\ \lambda \text{ এর মান বসাইয়া }] \qquad \cdots (5.27)$$

∴ শ্রোতা উৎস হইতে দূরে সরিয়া গেলে, $n' < n$; অর্থাৎ শ্রুত স্বরের তীক্ষ্ণতার আপাত হ্রাস হয়।

আবার, শ্রোতা যদি উৎসের দিকে অগ্রসর হয়, তবে

$$n' = \frac{V + v_o}{V} \cdot n \quad [\ \because v_o \text{ ঋণাত্মক }] \qquad \cdots (5.28)$$

∴ শ্রোতা উৎসের দিকে অগ্রসর হইলে, $n' > n$; অর্থাৎ এক্ষেত্রে শ্রুত স্বরের তীক্ষ্ণতার আপাত বৃদ্ধি হয়।

(c) উৎস ও শ্রোতা উভয়েই গতিশীল (Source and listener both in motion)

মনে করি, উৎস ও শ্রোতা উভয়েই শব্দের গতির অভিমুখে অগ্রসর হইতেছে। এক্ষেত্রে উৎসের গতির জন্য তরঙ্গ-দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন ও শ্রোতার গতির জন্য শ্রোতা কর্তৃক গৃহীত তরঙ্গ সংখ্যার পরিবর্তন হইবে।

এখন, উৎসের গতির জন্য পরিবর্তিত তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য,

$$\lambda' = \frac{V - v_s}{n} \qquad \cdots (5.29)$$

এবং শ্রোতার গতির জন্য শ্রোতা কর্তৃক গৃহীত তরঙ্গগুচ্ছের বিস্তার $= V - v_o$ শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক n_1 হইলে,

$$n_1 = \frac{\text{তরঙ্গগুচ্ছের বিস্তার}}{\text{তরঙ্গ-দৈর্ঘ্য}}$$

$$= \frac{V - v_o}{V - v_s}\, n \qquad \cdots (5.30)$$

উদাহরণ (Examples)

1. 50 cm দীর্ঘ ও 6·5 gram ভরের একটি পিয়ানো তার বিতত করা আছে এমনভাবে যে উহার মূলসুরের কম্পাঙ্ক হয় 80 প্রতি সেকেণ্ডে। তারের বিতন gm-wt এককে নির্ণয় কর।

(A piano wire 50 cm long and of mass 6·5 gram is stretched so that the frequency of its fundamental mode of vibration is 80 cycles/second. Find the stretching force in gram-wt.) (C. U.' 64)

আমরা জানি,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এখন, T kg-wt $=T\times 1000\times 980$ dynes

$$\therefore\quad 80=\frac{1}{2\times 50}\sqrt{\frac{T\times 1000\times 980\times 500}{65}}$$

অথবা, $T=\dfrac{64\times 65}{98\times 5}$

$=8{\cdot}49$ kg-wt

$=8{\cdot}49\times 10^3$ kg-wt।

2. 50 cm দীর্ঘ ও 5 gram ভরের একটি স্টীল নির্মিত পিয়ানো তার 400×10^5 dynes তারে প্রসারিত করা আছে। ইহার মূলসুরের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(A steel piano wire 50 cm long of mass 5 gram is stretched with a tension of 400×10^5 dynes. Determine the frequency of its fundamental mode of vibration.)

আমরা জানি,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এখানে, $l=50$ cm

$T=400\times 10^5$ dynes

$m=\frac{5}{50}=0{\cdot}1$ gram/cm

$\therefore$ মূলসুরের কম্পাঙ্ক, $n=\dfrac{1}{2\times 50}\sqrt{\dfrac{4\times 10^7}{0{\cdot}1}}$

$=200$ vib/second।

3. 2 kgm-wt ভার দ্বারা বিতত্ন করা একটি তারের অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ 500 metres/second। ঐ একই তারে 8 kg-wt চাপাইলে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ কত হইবে বাহির কর।

(The velocity of transverse waves in a stretched string is 500 metres/second, when the tension in the string is 2 kg-wt. Determine the velocity of the transverse waves in the same string when the tension is 8 kg-wt.)

বিতত্ন করা তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগ, $V=\sqrt{\frac{T}{m}}$

প্রথম ক্ষেত্রে, $V_1=\sqrt{\frac{T_1}{m}}$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $V_2=\sqrt{\frac{T_2}{m}}$

$$\therefore \quad \frac{V_2}{V_1}=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

এখানে,

$$V_1=500 \text{ metres/second}$$
$$T_1=2 \text{ kg-wt}$$
$$T_2=8 \text{ kg-wt}$$
$$\therefore \quad V_2=500\sqrt{\tfrac{8}{2}}$$
$$=1000 \text{ metres/second}$$

4. সমদৈর্ঘ্যের দুইটি স্টীলের তার একটি সনোমিটারের উপর প্রসারিত আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় তারের বিতত্তির মান যথাক্রমে 8 kg-wt ও 2 kg-wt। যদি প্রথম তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাস দ্বিতীয় তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসের অর্ধেক হয় তাহা হইলে তার দুইটি হইতে নির্গত মূলসুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত নির্ণয় কর।

(Two wires of steel of the same length are stretched on a sonometer. The tensions in the first and second wire are 8 kg-wt and 2 kg-wt. respectively. Find the ratio of the fundamental notes emitted by the two wires when the diameter of cross-section of the first wire is half that of the second.) (C. U. '77)

আমরা জানি,

$$n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 \rho}}$$

$$= \frac{1}{ld}\sqrt{\frac{T}{\pi \rho}}$$

যেখানে d হইতেছে তারের ব্যাস।

এক্ষেত্রে মনে করি, n_1 ও n_2 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় তারের মূলসুরের কম্পাঙ্ক। প্রশ্নানুসারের দ্বিতীয় তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাস d হইলে প্রথম তারের ব্যাস হইবে $\frac{d}{2}$।

$$\therefore \quad n_1 = \frac{1}{l \times \frac{d}{2}}\sqrt{\frac{8 \times 1000 \times 981}{\pi \rho}}$$

$$\text{এবং} \quad n_2 = \frac{1}{l \times d}\sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 981}{\pi \rho}}$$

সুতরাং মূলসুরদ্বয়ের অনুপাত, $\frac{n_1}{n_2} = 4.$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগের একটি রাশিমালা উপপাদন কর। অনুপ্রস্থ কম্পনে কম্পিত একটি তারের তীক্ষ্নতা কিরূপে উহার বিততি, দৈর্ঘ্য এবং রৈখিক ঘনাঙ্কের উপর নির্ভর করে তাহা ব্যাখ্যা কর।

(Deduce an expression for the velocity of transverse waves in a string. Explain how the pitch of a string vibrating transversely depends on tension, length and line density.) (C. U. '69)

2. একটি সুষম বিতত তার বরাবর প্রবহমান অনুপ্রস্থ তরঙ্গের গতিবেগের সহিত উহার উপর প্রযুক্ত বিতত এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভরের সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(Find a relation between the velocity of transverse waves along a uniform stretched string its tension and its mass per unit length.) (C. U. '71, '75)

3. তারের অনুপ্রস্থ কম্পনের সূত্রগুলি লিখ।

(State the laws of transverse vibrations of string.) (C. U. '74)

4. একটি বিতত তারে বিভিন্ন সমমেল উৎপন্ন করিতে হইলে তুমি কি পদ্ধতি অবলম্বন করিবে তাহা সাধারণভাবে আলোচনা কর।

(Discuss in a general way the procedure you would adopt in order to excite different harmonics in a stretched string.)

(C. U. '66)

5. একটি সনোমিটার তারে অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগের একটি রাশিমালা উপপাদন কর। তারটিকে যখন উহার মধ্যবিন্দুতে টানিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হইবে সেক্ষেত্রে উৎপন্ন সুরের কম্পাঙ্ক কি হইবে ?

(Deduce an expression for the velocity of transverse waves in a sonometer. What are the frequencies for the case when the wire is plucked at its middle point ?) (C. U. '67)

6. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ ঃ

(a) হেলমোজের অনুনাদক,

(b) ডপলার সূত্র।

(Write short notes on :

(a) Helmholtz's resonator, (C. U. '63)

(b) Doppler's principle.)

7. একটি পিতল ও একটি স্টীলের দুইটি সমদৈর্ঘ্যের তার একটি সনোমিটারের উপর টান করিয়া রাখা অবস্থায় কম্পিত হইতেছে এবং উভয়ে একই মূলসুর নির্গত করিতেছে। দুই ক্ষেত্রে বিততির মান যথাক্রমে 5 ও 8 kg-wt। স্টীলের তারের ব্যাস 0·8 mm হইলে পিতলের তারের ব্যাস নির্ণয় কর। পিতলের ঘনত্ব = 8·4 gram/c.c., স্টীলের ঘনত্ব = 7·8 gram/c.c.।

(Two wires of equal length one of brass and the other of steel are stretched on a sonometer to emit the fundamental note. The tensions in the two cases are 5 and 8 kg-wt respectively. If the diameter of the steel wire is 0·8 mm find the diameter of the brass wire. Density of brass = 8·4 gram/c.c., density of steel = 7·8 gram/c.c.) (C. U. '75) [Ans. 0·6 mm]

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

সুরযুক্ত শব্দ বা সুস্বর
(Musical Sound)

6.1 সূচনা (Introduction)

আমরা প্রতিনিয়ত নানা রকমের শব্দ শুনিতে পাই। ইহাদের মধ্যে কিছু শব্দ শ্রুতিমধুর আবার কিছু বা শ্রুতিকটু। কোন বাদ্যযন্ত্র হইতে উৎপন্ন শব্দ, টিনের চালে বৃষ্টি পড়ার শব্দ, দূর হইতে আগত ঘন্টার শব্দ ইত্যাদি শ্রুতিমধুর ; আবার যানবাহনের শব্দ, হাটবাজারের অপস্বর বা কোলাহল, গোলাগুলির শব্দ ইত্যাদি শ্রুতিকটু। শ্রবণানুভূতির দিক্ হইতে শব্দকে তাই দুই ভাগে ভাগ করা যাইতে পারে : শ্রুতিসুখকর বা সুরযুক্ত শব্দ (**musical sound**) এবং শ্রুতিকটু বা অপস্বর শব্দ (**noise**)। কিন্তু এইভাবে শব্দের পার্থক্য নির্ধারণ করা সর্বদা খুব সহজ নয়। একই শব্দ অবস্থাভেদে কখনও শ্রুতিমধুর আবার কখনও বা শ্রুতিকটু লাগে। যেমন দূর হইতে আগত জনসমাবেশের বা হাটবাজারের কোলাহল শ্রুতিসুখকর হইতে পারে কিন্তু উহার নিকটে পেঁছাইলে ঐ একই শব্দ কানে পীড়াদায়ক মনে হয়। আবার উচ্চাঙ্গ সঙ্গীত কাহারও নিকট মধুর, কাহারও বা নিকট কর্কশ অনুভূতির সৃষ্টি করে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি, অনুভূতির বিচারে শব্দের এই শ্রেণীবিভাগ পুরোপুরি ব্যক্তিনির্ভর (**subjective**)।

সুরযুক্ত ও সুরবর্জিত শব্দের যথার্থ সংজ্ঞা এইরূপে দেওয়া যাইতে পারে। আমরা জানি উৎসের কম্পনের ফলে শব্দের উৎপত্তি হয়। এই কম্পন যদি নিয়মিত (**regular**), পর্যাবৃত্ত (**periodic**) এবং নিরবচ্ছিন্ন (**continuous**) হয় তাহা হইলে উৎস হইতে নিঃসৃত শব্দ কানে শ্রুতিসুখকর বলিয়া মনে হয় এবং উহাকে সুরযুক্ত শব্দ বা সুস্বর বলে। অপরপক্ষে উৎসের কম্পন যদি অনিয়মিত (**irregular**), অপর্যাবৃত্ত (**non-periodic**) এবং ক্ষণস্থায়ী (**short-lived**) বা আকস্মিক (**abrupt**) হয় তাহা হইলে উৎস হইতে সৃষ্ট শব্দ পীড়াদায়ক মনে হইবে এবং ইহাকে সুরবর্জিত শব্দ বা অপস্বর নামে অভিহিত করা হইবে।

6.2 সুরযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of musical sound)

সুরযুক্ত শব্দের তিনটি বৈশিষ্ট্য থাকে : (a) তীব্রতা **Intensity**) বা প্রাবল্য (**Loudness**), (b) তীক্ষ্ণতা (**Pitch**) এবং (c) গুণ বা উপস্বন (**Quality or Timbre**)।

(a) **তীব্রতা (Intensity)**—শব্দ যে মাধ্যমের মধ্য দিয়া অগ্রসর হয় তাহার একক আয়তন যে পরিমাণ শক্তি ধারণ করে তাহাকে স্বরের তীব্রতা বলে। শ্রবণ সময়ে খুব বেশী শব্দতরঙ্গ আমাদের কানে পেঁছাইলে আমরা বলি যে ঐ স্বরের তীব্রতা বা প্রাবল্য খুব বেশী। তীব্রতা ও প্রাবল্য উভয়েই উৎসের কম্পনের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক

বলিয়া তীব্রতা ও প্রাবল্যকে সাধারণত একই বলিয়া মনে করা হয় ; কিন্তু প্রকৃতপক্ষে প্রাবল্য বলিতে তীব্রতা কানে যে অনুভূতির সৃষ্টি করে তাহা বুঝায় এবং ইহা ব্যক্তি-নির্ভর (subjective)।

স্বরের তীব্রতা বা প্রাবল্য নিম্নলিখিত বিষয়গুলির উপর নির্ভর করে ঃ

(i) **উৎসের আকার (Size of the source)** ঃ উৎসের আকার বড় হইলে শব্দতরঙ্গ বেশী শক্তি সঞ্চারিত করিতে পারে এবং ইহার ফলে শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়।

(ii) **উৎসের কম্পন বিস্তার (Amplitude of vibration of the source)** ঃ শব্দের কম্পন বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক বলিয়া উৎসের কম্পন বিস্তার বৃদ্ধি পাইলে শব্দের তীব্রতাও বৃদ্ধি পায়।

(iii) **মাধ্যমের ঘনত্ব (Density of the medium)** ঃ শব্দ যে মাধ্যমের ভিতর দিয়া বিস্তারলাভ করে তাহার ঘনত্ব বেশী হইলে শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়।

(iv) **মাধ্যমের গতি (Motion of the medium)** ঃ মাধ্যমের গতি শব্দ বিস্তারের অভিমুখে হইলে শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায় এবং বিপরীত দিকে হইলে প্রাবল্য হ্রাস পায়।

(v) **উৎস হইতে শ্রোতার দূরত্ব (Distance of the listener from the source)** ঃ শব্দের তীব্রতা উৎস হইতে শ্রোতার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক হয়। ইহাকে বিপরীত বর্গীয় সূত্র (**Inverse square law**) বলে। এই সূত্র অনুযায়ী বোঝা যাইতেছে যে উৎস ও শ্রোতার ভিতর দূরত্ব যত বেশী হইবে শব্দের তীব্রতাও তত হ্রাস পাইবে।

(vi) **অনুনাদী বস্তুর উপস্থিতি (Presence of resonant bodies)** ঃ উৎসের নিকট কোন অনুনাদী বস্তু থাকিলে স্বরের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়।

(b) **তীক্ষ্ণতা (Pitch)**—সুরযুক্ত শব্দের বা সুস্বরের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একই তীব্রতার দুইটি সুরের মধ্যে কোনটি খাদের এবং কোনটি চড়া সুরের তাহা নির্ণয় করা যায় তাহাকে স্বরের তীক্ষ্ণতা বলে। খাদের সুরের তীক্ষ্ণতা কম এবং চড়া সুরের তীক্ষ্ণতা বেশী। তীক্ষ্ণতা শব্দের কম্পাঙ্কের উপর নির্ভর করে। কম্পাঙ্ক যত বৃদ্ধি করা হয় স্বরের তীক্ষ্ণতাও তত বাড়িতে থাকে। হারমোনিয়াম রীডের **সা**, রে, গা, মা এই চারটি সুরের ভিতর 'সা' সুরটি সর্বাপেক্ষা খাদের এবং 'মা' সুরটি সর্বাপেক্ষা চড়া, অর্থাৎ 'সা' সুরটির তীক্ষ্ণতা এবং কম্পাঙ্ক সর্বনিম্ন কিন্তু 'মা' সুরটির তীক্ষ্ণতা ও কম্পাঙ্ক সর্বাপেক্ষা বেশী।

কোন সুরশলাকার একটি বাহুতে মোম লাগাইয়া দিলে উহার ওজন বৃদ্ধি পাইবে ; ফলে উহার কম্পাঙ্ক কমিয়া যাইবে অর্থাৎ তীক্ষ্ণতা হ্রাস পাইবে। মানুষের মধ্যে দেখা যায় যে সাধারণত, পুরুষের কণ্ঠস্বর খাদের এবং মহিলাদের চড়া সুরের হইয়া থাকে। ইহার কারণ পুরুষ অপেক্ষা মহিলাদের স্বরের তীক্ষ্ণতা বেশী।

তীক্ষ্ণতা কম্পাঙ্কের সমানুপাতিক হওয়ায় সাধারণত উহাকে কম্পাঙ্ক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুরসমৃদ্ধ শব্দের ক্ষেত্রে তীক্ষ্ণতা একটি প্রধান বৈশিষ্ট্য। সুরবর্জিত শব্দের কোন নির্দিষ্ট তীক্ষ্ণতা নাই।

(c) গুণ বা উপস্বন (Quality or Timbre)—সুরযুক্ত শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা পৃথক পৃথক বাদ্যযন্ত্র হইতে নিঃসৃত একই তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতার স্বরগুলির ভিতর তফাত বুঝিতে পারা যায় তাহাকে স্বরের গুণ বা উপস্বন বলে। সেতার, বেহালা, গীটার প্রভৃতি বাদ্যযন্ত্র হইতে উৎপন্ন একই প্রাবল্য ও তীক্ষ্ণতার সুরগুলিকে আমরা সহজেই চিনিতে পারি। ইহার কারণ এই যে বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র হইতে সৃষ্ট সুরের একটি স্বতন্ত্র বৈশিষ্ট্য আছে যাহাকে শব্দের গুণ বা উপস্বন বলে।

স্বরের গুণ বা উপস্বন নিম্নলিখিত বিষয়গুলির উপর নির্ভরশীল;

(i) মূলসুরের সহিত উপসুরগুলির কম্পাঙ্কের অনুপাতের উপর,

(ii) মূলসুরের সাথে মিশ্রিত উপসুরগুলির সংখ্যার উপর

এবং (iii) স্বরে উপস্থিত বিভিন্ন উপসুরের আপেক্ষিক তীব্রতার উপর।

6.2.1 শব্দের তীব্রতা ও প্রাবল্যের একক (Units of intensity and loudness)

তীব্রতার একককে 'বেল' (bel) বলা হয়। যদি দুইটি উৎস থেকে নিঃসৃত শব্দের তীব্রতার অনুপাত 10 হয় তবে উহাদের তীব্রতার পার্থক্য হইবে 1 'বেল'। কাজেই 1 বেল 10 গুণ তীব্রতা বৃদ্ধি বুঝাইতেছে। 'বেল' এককটি ব্যবহারের পক্ষে অপেক্ষাকৃত বড় হওয়ায় উহার দশমাংশ সাধারণত তীব্রতার একক হিসাবে ব্যবহৃত হয়। ইহাকে ডেসিবেল (decibel, সংক্ষেপে db) বলে। যখন দুইটি শব্দের মধ্যে একটির তীব্রতা অন্যটির ($10^{0.1}$ গুণ বা 1·259 গুণ হয় তখন উহাদের তীব্রতার পার্থক্য হয় 1 ডেসিবেল।

প্রাবল্যের একককে 'ফোন' (phon) বলে। কোন শব্দের প্রাবল্যকে 'ফোন' এককে পরিমাপ করিতে হইলে 1000 চক্রের (cycles per second) কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি শুদ্ধ প্রমাণ সুর লইয়া উহার সহিত মূল শব্দের তুলনা করা হয়। প্রমাণ সুরের তীব্রতাকে নিয়ন্ত্রণ করিয়া মূল শব্দের প্রাবল্য প্রমাণ সুরের প্রাবল্যের স্তরের সমান করা হয়। এখন প্রমাণ সুরের তীব্রতা লেভেল n ডেসিবেল হইলে মূলশব্দের প্রাবল্য হইবে n ফোন। শাব্দ প্রাবল্য পরিমাপের আর একটি নূতন এককের নাম 'সোন' (sone)। সাধারণ শ্রোতার শ্রাব্যতার সীমার 40 ডেসিবেল উপরে 1000 চক্রের কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি শুদ্ধ সুর যে প্রাবল্যের স্তর সৃষ্টি করে তাহাকে বলা হয় 1 সোন।

6.2.2 শব্দের প্রাবল্য ও তীব্রতার মধ্যে সম্পর্ক (Relation between loudness and intensity)

আমরা জানি, সঠিক বিচারে শব্দ প্রাবল্য ও তীব্রতা সমার্থজ্ঞাপক নয়। তীব্রতা

শক্তির দ্বারা প্রকাশ করা হয় বলিয়া উহা একটি প্রাকৃতিক রাশি এবং পরিমাপযোগ্য। কিন্তু প্রাবল্য তাহা নহে। শাব্দ তীব্রতা কানে যে সংবেদন সৃষ্টি করে তাহাই প্রাবল্য এবং উহা সরাসরি পরিমাপযোগ্য নহে।

কোন শব্দ শ্রাব্য হইতে গেলে, উহার তীব্রতা ও কম্পাঙ্ক একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকা চাই। নিম্নতম যে তীব্রতা শব্দ শুনিবার জন্য প্রয়োজন তাহাকে শ্রাব্যতার সীমা (**threshold of audibility**) বলে। শাব্দ তীব্রতা একটি বিশেষ সীমা অতিক্রম করিবার পর শব্দ আর শোনা যায় না; অবশ্য এই মান ব্যক্তিবিশেষে কিছু পৃথক হইয়া থাকে।

শাব্দ প্রাবল্য শব্দের তীব্রতা ও কম্পাঙ্ক উভয়ের উপর নির্ভরশীল। বিজ্ঞানী ওয়েবার ও ফেচনার শাব্দ প্রাবল্য ও তীব্রতার ভিতর একটি সূত্র প্রতিষ্ঠা করেন। এই সূত্র অনুযায়ী বলা যায় যে, "**উপলব্ধিযোগ্য ন্যূনতম প্রাবল্যবৃদ্ধি (dL) সৃষ্টি করিবার জন্য শব্দের যে তীব্রতাবৃদ্ধির (dI) প্রয়োজন হয় তাহা মূল তীব্রতা (I) এবং প্রাবল্য-বৃদ্ধির সমানুপাতিক হইবে।**

অর্থাৎ, $dI \propto dL \times I$

$$\text{অথবা,}\quad dL = K\frac{dI}{I} \qquad \cdots (6.1)$$

যেখানে K একটি ধ্রুবক।

সমীকরণ (6.1)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করিয়া পাই,

$$\int dL = \int K\frac{dI}{I}$$

অথবা, $L = K \log_e I + C$ (C = ইন্টিগ্রেশন ধ্রুবক বা সমাকলন অচর)

$$= K \times 2{\cdot}303 \log_{10} I + C$$

$$= a \log_{10} I + C \quad (a = \text{ধ্রুবক}) \qquad \cdots (6.2)$$

সমীকরণ (6.2)-এর সম্পর্কটি ওয়েবার-ফেচনার **সূত্র** নামে পরিচিত। এই সূত্র হইতে বলা যায় যে, শাব্দ তীব্রতা দ্বিগুণ করিলে শাব্দ প্রাবল্য দ্বিগুণ হয় না। কিন্তু তীব্রতা দ্বিগুণ করিয়া বাড়াইয়া গেলে প্রাবল্য প্রতিবার সমভাবে বৃদ্ধি পাইবে। তীব্রতার আপেক্ষিক মান অধিক তাৎপর্যপূর্ণ বলিয়া সাধারণত উহার অনপেক্ষ মান, অর্থাৎ প্রতি সেন্টিমিটার ক্ষেত্র দিয়া যে শক্তি প্রবাহ (**energy flux**) ঘটে, নির্ণয় করা হয় না।

1000 **cycles/second** কম্পনাঙ্ক বিশিষ্ট শব্দের শ্রাব্যতার সীমা 10^{-16} watt/cm^2 তীব্রতার সমান ধরা হয় এবং ইহাকে প্রমাণ তীব্রতা (**standard intensity**) বলে। ইহার সাপেক্ষেই সকল তীব্রতা পরিমাপ করা হয়। কোন শব্দের তীব্রতা লেবেল বলিতে আমরা ঐ শব্দের তীব্রতা এবং প্রমাণ তীব্রতার (I_0) অনুপাতকে বুঝি। দুইটি শব্দের বা স্বরের প্রাবল্য L_0 ও L এবং উহাদের তীব্রতা যথাক্রমে I_0 ও I হইলে,

শব্দদ্বয়ের প্রাবল্যের পার্থক্য, $\alpha = L - L_0$

$$= a\,(\log_{10} I - \log_{10} I_0)$$

$$= a \log_{10} \frac{I}{I_0} \qquad \cdots \quad (6.3)$$

যখন, $I = 10\,I_0$

তখন $\alpha = 1$ বেল এবং সেক্ষেত্রে $a = 1$

$$\therefore \quad \alpha = \log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ বেল}$$

$$= 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \text{ ডেসিবেল} \qquad \cdots \quad (6.4)$$

এক্ষেত্রে α কে বলা হয় I_0 তীব্রতাযুক্ত শব্দের সাপেক্ষে **I** তীব্রতার শব্দের তীব্রতা-লেভেল (**intensity level**)।

6.3 হলঘরের ধ্বনিবিজ্ঞান (Auditorium acoustics)

হলঘরের শব্দ সমস্যা স্থাপত্য শিল্পের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। 1900 খৃষ্টাব্দের পূর্বে বক্তৃতা, সঙ্গীত বা নৃত্যের জন্য যে সমস্ত হলঘর বা অডিটোরিয়াম তৈয়ারী করা হইত সেইগুলির নকশা তৈয়ারীর সময় শব্দ সমস্যা সম্পর্কে কোন চিন্তা করা হইত না। ফলে নির্মাণের পর কিছু হলঘরে অনুষ্ঠান শ্রুতিমধুর আবার কোথাও বা শ্রুতিকটু হইত। প্রাচীন গির্জা, মন্দির, তাজমহল প্রভৃতি বৃহৎ অট্টালিকাগুলিতে সৃষ্ট প্রচন্ড অনুরণন জনসাধারণের মনে বিস্ময়মিশ্রিত শ্রদ্ধার উদ্রেক করিত। বর্তমানে এই ধারণার পরিবর্তন হইয়াছে এবং এখন সকল বৃহৎ হলঘর নির্মাণ পরিকল্পনায় ধ্বনি-বিজ্ঞানের সাহায্য লওয়া হইতেছে। আমেরিকার বিজ্ঞানী সেবাইন (**Sabine**) সর্বপ্রথম হলঘরের শব্দ সমস্যা সম্পর্কে বিশদ ব্যাখ্যা দেন। তিনি দেখান যে কোন হলঘর বা প্রেক্ষাগৃহে সৃষ্ট শব্দ যদি দীর্ঘক্ষণ অনুরণিত হয় তবে শ্রোতার পক্ষে গান-বাজনা বা বক্তৃতা স্পষ্টভাবে শোনা সম্ভবপর হয় না ; সেক্ষেত্রে অনুরণনকাল হ্রাস করা প্রয়োজন।

6.3.1 অনুরণন ও অনুরণন কাল (Reverberation and time of reverberation)

কোন উৎস হইতে নিঃসৃত শব্দ কক্ষের দেওয়াল, ছাদ বা মেঝে হইতে বারবার প্রতিফলিত হইয়া শব্দের স্থিতিকাল বৃদ্ধি করে। দেখা গিয়াছে, শব্দ তরঙ্গের এই পর্যায়ক্রমিক প্রতিফলনের দরুণ উৎস বন্ধ হওয়ার পরও শব্দ বিদ্যমান থাকে। শব্দের এই দীর্ঘস্থায়ী প্রতিধ্বনিকে অনুরণন বলে এবং যে সময় ধরিয়া শব্দ স্থায়ী হয় তাহাকে অনুরণন কাল বলে।

কোন হলঘরের প্রমাণ অনুরণন কাল বলিতে সেই সময়কে বোঝায় যে সময়ে শব্দ প্রাথমিক তীব্রতার 10^{-6} গুণ হ্রাস পায়। অথবা বিকল্প সংজ্ঞা অনুযায়ী, অনুরণন কাল

বলিতে আমরা সেই সময় বুঝি যে সময়ে শব্দের তীব্রতা 60 ডেসিবেল হ্রাস পাইয়া ন্যূনতম শ্রাব্যতার সীমায় নামিয়া আসে।

মেঘের গুরু গুরু শব্দ হইতেছে অনুরণনের একটি পরিচিত উদাহরণ। মেঘের বিভিন্ন স্তরের ভিতর বারবার প্রতিফলনের ফলে এক্ষেত্রে ধ্বনি দীর্ঘস্থায়ী হয়।

6.4 শব্দের তীব্রতার বৃদ্ধি ও ক্ষয় (Growth and decay of intensity)

মনে করি, E = প্রতি সেকেন্ডে শব্দ উৎসের শক্তি

এবং V = হলঘরের আয়তন

∴ একক আয়তনে শক্তি সরবরাহের হার বা শক্তি ঘনত্ব (energy density) $= \frac{E}{V}$

আবার ধরা যাক, I = গড় শক্তি ঘনত্ব বা তীব্রতা

n = প্রতি সেকেন্ডে শব্দের প্রতিফলনের সংখ্যা

এবং a = গড় শোষণ গুণাংক (mean absorption)

∴ শোষিত শক্তির হার $= \mathrm{I}an$

সুতরাং একক আয়তনে শক্তি বৃদ্ধির হার, $\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \frac{E}{V} - \mathrm{I}an$ ... (6 5)

এক্ষণে, S যদি হলঘরের যে তলে শব্দ আপতিত হইতেছে, তাহার ক্ষেত্রফল এবং c শব্দের বেগ হয় তবে জেগার (Jager) পরিসংখ্যান পদ্ধতি অনুযায়ী প্রতি সেকেন্ডে প্রতিধ্বনির সংখ্যা,

$$n = \frac{cS}{4V} \quad \cdots (6.6)$$

সমীকরণদ্বয় (6.5) ও (6.6) হইতে পাই,

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \frac{E}{V} - \frac{ca\mathrm{SI}}{4V} \quad \cdots (6.7)$$

অথবা, $$\frac{d\mathrm{I}}{\frac{E}{V} - \frac{ca\mathrm{SI}}{4V}} = dt$$

সমাকলন করিয়া,

$$-\frac{4V}{caS} \log_e \left(\frac{E}{V} - \frac{ca\mathrm{SI}}{4V}\right) = t + K \text{ (K = সমাকলন অচর)} \quad \cdots (6.8)$$

যখন $t = 0$, তখন $\mathrm{I} = 0$

$$\therefore \quad K = -\frac{4V}{caS} \log_e \frac{E}{V}$$

সমীকরণ (6.8)-এ K-এর মান বসাইয়া পাই,

$$-\frac{4V}{caS} \log_e \left(\frac{E}{V} - \frac{ca\mathrm{SI}}{4V}\right) = t - \frac{4V}{caS} \log_e \frac{E}{V}$$

অথবা, $\log_e \frac{4E}{4E - caSI} = \frac{caSt}{4V}$

অথবা, $1 - \frac{caSI}{4E} = e^{-caSt/4V}$

অথবা, $I = \frac{4E}{ca\,S}\left(1 - e^{-caSt/4V}\right)$ ... (6.9)

যখন $t = \infty$, তখন

তীব্রতা, $I_o = \frac{4E}{ca\,S}$

$\therefore$ যে কোন সময়ে তীব্রতা, $I = I_o\left(1 - e^{-caSt/4V}\right)$ ... (6.10)

এক্ষণে তীব্রতার ক্ষয় নির্ণয় করিবার জন্য সমীকরণ (6.7)-এ $E = 0$ বসাইলে পাই,

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{ca\,SI}{4V}$$

অথবা, $\frac{dI}{I} = -\frac{ca\,S}{4V}dt$

সমাকলন করিয়া,

$$\log_e I = -\frac{ca\,St}{4V} + K_1 \quad (K_1 = \text{সমাকলন অচর}) \quad \cdots (6.11)$$

যখন $t = 0$, তখন $I = I_o$

$\therefore K_1 = \log_e I_o$

সুতরাং $\log_e I = -\frac{ca\,St}{4V} + \log_e I_o$

অথবা, $\log_e \frac{I}{I_o} = -\frac{ca\,St}{4V}$

অথবা, $\frac{I}{I_o} = e^{-ca\,St/4V}$

$\therefore I = I_o\, e^{-ca\,St/4V}$ ... (6.12)

6 4 1 অনুরণন কাল (Time of reverberation)

উৎস বন্ধ হইবার মুহূর্তে শব্দের তীব্রতার যে সর্বোচ্চ মান থাকে তাহা যে সময়ে দশ লক্ষ ভাগের এক ভাগ ক্ষয় হয় তাহাকে অনুরণন কাল বলে।

অর্থাৎ, $\frac{I}{I_o} = \frac{1}{10^6}$

এক্ষণে, আমরা জানি,

$$I = I_o e^{-ca\,ST/4V}$$

অথবা, $\frac{I}{I_o} = \frac{1}{10^6} = e^{-ca\,ST/4V}$

অথবা, $e^{ca\,ST/4V} = 10^6$

অথবা, $\frac{ca\,ST}{4V} = \log_e 10^6$

অথবা, $T = \frac{4V}{ca\,S} \log_e 10^6$

$$= \frac{4V}{ca\,S} \times 2{\cdot}303 \times 6$$

$$= \frac{4 \times 2{\cdot}303 \times 6}{o} \times \frac{V}{a\,S} \qquad \cdots (6.13)$$

$o = 340$ মিটার/সেকেণ্ড হইলে,

$$T = 0{\cdot}16 \frac{V}{a\,S} \text{ সেকেণ্ড} \qquad \cdots (6.14)$$

সমীকরণ (6.14) হইতে দেখা যাইতেছে যে, অনুরণন কাল T হলঘরের আয়তন V-এর সমানুপাতিক কিন্তু ক্ষেত্রফল S ও শোষণ-গুণাংক a-এর ব্যস্তানুপাতিক। যেহেতু কোন হলঘরের ক্ষেত্রে V এবং S-এর মান ধ্রুবক, সুতরাং a-এর মান বৃদ্ধি করিলে তবেই অনুরণন কাল হ্রাস পাইবে। অবশ্য অনুরণনের এই মান মাত্রাতিরিক্ত হ্রাস করিলে শব্দের প্রাবল্য এত বেশী হ্রাস পাইবে যে কণ্ঠস্বরের মাধুর্য হারাইবে। দেখা গিয়াছে যে বক্তৃতা, সঙ্গীত প্রভৃতি ভিন্ন ভিন্ন অনুষ্ঠানের জন্য অনুরণনের অনুকূলতম সময় পৃথক পৃথক হয় এবং মোটামুটি 1 সেকেণ্ড হইতে 2·5 সেকেণ্ডের মধ্যে থাকে।

6.5 উত্তম হলঘরের পরিকল্পনা (Design of good auditorium)

শব্দ সমস্যার দিক্ হইতে বিবেচনা করিয়া একটি উত্তম হলঘরের নির্মাণ পরিকল্পনায় নিম্নলিখিত বিষয়গুলির প্রতি লক্ষ্য রাখিতে হয় ঃ

(i) বিশেষ ধরণের কক্ষের আকৃতি হইতে হইবে।

(ii) কক্ষ ধ্বনি-রোধী (sound-proof) হইবে।

(iii) অনুরণন কাল অনুকূলতম (optimum) হইবে।

(iv) কক্ষের সর্বত্র পর্যাপ্ত পরিমাণ শব্দ-প্রাবল্য বিরাজ করিবে।

(v) কক্ষের কোথাও প্রতিধ্বনির উৎপত্তি হইবে না।

(vi) কক্ষের কোথাও অনুনাদের উৎপত্তি হইবে না।

(i) **কক্ষের আকৃতি**—কক্ষের মেঝে সমতল এবং ছাদ ও দেওয়াল যদি উত্তল আকৃতির হয় তবে শব্দ তরঙ্গ চারদিকে সমানভাবে বিক্ষিপ্ত হইবে এবং সেক্ষেত্রে কক্ষের মধ্যে বিভিন্ন জায়গায় শব্দ-প্রাবল্যের কোন তারতম্য হইবে না।

(ii) **ধ্বনি-রোধী কক্ষ**—বাহিরের কোন শব্দ যাহাতে ঘরের অভ্যন্তরে প্রবেশ করিতে না পারে সেইজন্য কতকগুলি উপযুক্ত ব্যবস্থা অবলম্বন করা হয়। যথা, (*a*) ঘরের দেওয়াল নিরেট না করিয়া কয়েকটি ভাগে বিভক্ত বৃহদায়তনের ফাঁপা করা হয়। (*b*) দুই বা ততোধিক স্তরের শব্দ-নিরুদ্ধ দরজা-জানলা ব্যবহার করা হয়। (*c*) শব্দ-শোষক বস্তু দ্বারা ঘুলঘুলি আবৃত করিয়া রাখা হয় ইত্যাদি।

(iii) **অনুকূলতম অনুরণন কাল**—যে সময় ব্যাপিয়া অনুরণন স্থায়ী হইলে শব্দ শ্রুতিসুখকর হয় তাহাকে অনুকূলতম অনুরণন কাল (**optimum reverberation**) বলে। যথাযথ ব্যবস্থার সাহায্যে অনুরণন যাহাতে বেশী বা কম না হয় সেদিকে লক্ষ্য রাখিতে হয়। এই উদ্দেশ্যে ঘরের অভ্যন্তরে শব্দের কম্পাঙ্কের উপর নির্ভর করিয়া উপযুক্ত শোষক বস্তু—যথা পর্দা, গদি-আটা বসিবার আসন, কার্পেট ইত্যাদি স্থাপন করা হয়।

(iv) **কক্ষে পর্যাপ্ত পরিমাণ শব্দ-প্রাবল্য**—কক্ষের ভিতর প্রতিফলকের ব্যবহারে শব্দ-প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। যদি কক্ষের সর্বত্র কিছু ছোট অথচ দৃঢ় প্রতিফলককে (**rigid reflector**) বিভিন্নভাবে আনত রাখা হয় অথবা অধিবৃত্ত প্রতিফলকের (**parabolic reflector**) ব্যবহার করা হয় তবে শব্দতরঙ্গ চারদিকে ছড়াইয়া পড়িবে ও প্রাবল্য সমভাবে বণ্টিত হইবে।

(v) **প্রতিধ্বনির অনুপস্থিতি**—যদি মূলশব্দ পৌঁছাইবার $\frac{1}{10}$ সেকেন্ড বা তাহার অধিক সময় পর প্রতিফলিত শব্দ শ্রোতার কানে পৌঁছায় তবে শ্রোতা প্রতিধ্বনি শুনিতে পাইবে। আমরা জানি, শব্দের বেগ 1120 ফুট/সেকেন্ড ধরিলে $\frac{1}{10}$ সেকেন্ড সময়ে শব্দ 112 ফুট দূরত্ব যাইতে পারে। সুতরাং ছাদের উচ্চতা 56 ফুটের কম করিলে প্রতি-ফলনের দ্বারা ছাদ হইতে প্রতিধ্বনির উৎপত্তি হইতে পারিবে না। ইহা ছাড়া কক্ষের সমতল পৃষ্ঠকে ছোট ছোট ভাগে ভাগ করিয়া এবং বিভিন্ন প্রকার শোষক বস্তু ব্যবহার করিয়া উৎপন্ন প্রতিধ্বনি নিবারিত করা হয়।

(vi) **অনুনাদের অনুপস্থিতি**—যদি কোন বিশেষ সুর অনুনাদ সৃষ্টি করে, তবে উহার প্রাবল্য অবাঞ্ছিতভাবে অনেক বৃদ্ধি পায়। সুতরাং স্বরের বিকৃতি পরিহার করিবার জন্য হলঘরকে অনুনাদ মুক্ত করা প্রয়োজন। দেখা গিয়াছে, খুব বড় হলঘরের অনুনাদী কম্পাঙ্ক মোটামুটি ঘরের আয়তনের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. সুরযুক্ত ও সুরবর্জিত স্বরের ভিতর পার্থক্য দেখাও। সুরযুক্ত স্বরের গুণ বা উপস্বন, তীক্ষ্মতা ও প্রাবল্য স্বরের কোন কোন ভৌতিক বৈশিষ্ট্যের দ্বারা নির্ধারিত হয় তাহা ব্যাখ্যা কর।

(Distinguish between a musical note and a noise. Explain the physical characteristics that determine quality, pitch and loudness of a musical note.) (C. U. '70)

2. পার্থক্য নির্ধারণ কর : (*a*) শব্দের তীক্ষ্মতা ও প্রাবল্য, (*b*) সমমেল ও উপসুর, (*c*) অপস্বর ও সুরযুক্ত শব্দ।

শব্দের গুণ বা উপস্বন কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর নির্ভর করে ?

(Distinguish between : (a) pitch and loudness, (b) harmonic and overtone, (c) noise and music.

What factors determine the quality of sound ?) (C. U. '64)

3. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ : সুরযুক্ত স্বরের বৈশিষ্ট্য।

(Write a short note on characteristics of a musical sound.)

(C. U. '68, '73, '78)

4. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ :

(*a*) বেল এবং ডেসিবেল, (*b*) ডেসিবেল ও ফন্।

(Write short notes on :

(*a*) bel and decibel (C. U. '79), (*b*) decibel and phon.)

(C. U. '70)]

5. অনুরণন ও অনুরণন কাল কাহাকে বলে ? ধ্বনিবিজ্ঞানের দিক্ হইতে বড় হলঘরে যে সমস্ত অসুবিধার সম্মুখীন হইতে হয় তাহা ব্যাখ্যা কর।

(Define 'reverberation' and 'time of reverberation'. Explain the various acoustic defects found in a large hall.)

6. একটি উত্তম হলঘরের বৈশিষ্ট্যগুলি আলোচনা কর।

(Discuss the characteristics of a good auditorium.)

7. গাণিতিকভাবে আলোচনা কর :

(*a*) স্বরের তীব্রতার বৃদ্ধি ও ক্ষয়, (*b*) অনুরণন কাল।

(Discuss mathematically : (*a*) growth and decay of intensity, (*b*) time of reverberation.)

পরিশিষ্ট

S. A. 1 র‍্যালে চাকতি পদ্ধতিতে তীব্রতার তুলনা (Comparison of intensity by Rayleigh disc method)

লর্ড র‍্যালে একই তীক্ষ্ণতাবিশিষ্ট দুইটি শব্দের তীব্রতা তুলনা করিবার জন্য এই পদ্ধতির উদ্ভাবন করেন।

বায়ুপ্রবাহের মধ্যে হাল্কা কোন চাকতি ধরিলে উহা প্রবাহের অভিমুখের সহিত লম্বভাবে নিজেকে স্থাপন করিবার চেষ্টা করে। বিজ্ঞানী কনিগ (Konig) চাকতির উপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের ভ্রামক ও বায়ুপ্রবাহের গড় বেগের ভিতর সম্পর্ক স্থাপিত করেন। যদি বায়ুপ্রবাহের বেগ v, বায়ুপ্রবাহের অভিমুখ এবং চাকতির অভিলম্বের ভিতর কোণ θ, বায়ুর ঘনত্ব ρ এবং চাকতির ব্যাসার্ধ a হয় তবে চাকতির উপর ক্রিয়াশীল দ্বন্দ্বের ভ্রামক, $M=\frac{4}{3}\rho a^3 v^2 \sin 2\theta$

চাকতির উপর এই দ্বন্দ্ব ক্রিয়া করার দরুণ যদি ϕ বিক্ষেপ হয় তবে $\phi \propto m$ অথবা $\phi \propto v^2$।

আবার, তীব্রতা গতিশক্তির সমানুপাতিক বলিয়া,

$$I \propto \frac{1}{2} m v^2$$

বা $$I \propto v^2$$

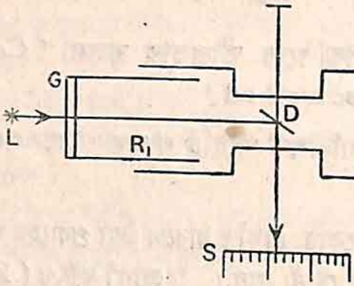
$$\therefore \phi \propto I$$

অথবা, $$\frac{I_1}{I_2}=\frac{\phi_1}{\phi_2} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

অতএব, বিক্ষেপ ϕ_1 ও ϕ_2 নির্ণয় করিয়া দুইটি শব্দের তীব্রতা I_1 ও I_2 সমীকরণ (i)-এর সাহায্যে তুলনা করা যায়।

পরীক্ষার জন্য মাইকা নির্মিত 1 cm ব্যাসের একটি চাকতিকে (D) কোয়ার্টজের তন্তু দ্বারা হেলমোজের দ্বি-অনুনাদক R_1 ও R_2 এর গ্রীবার মধ্যে ঝুলান হয়। $\theta=45^\circ$ হইলে দ্বন্দ্ব M সর্বাধিক হয় বলিয়া, প্রাথমিক অবস্থায় চাকতির তল গ্রীবার অক্ষের সহিত 45° কোণে নত থাকে। D-চাকতির পৃষ্ঠে একটি পাতলা দর্পণ আটকানো আছে। R_1 অনুনাদকের এক প্রান্ত কাচের প্লেট (G) দ্বারা বন্ধ এবং R_2 অনুনাদকের এক প্রান্ত O খোলা (চিত্র S. A. 1.)। শব্দ উৎসের দিকে R_2-এর খোলা প্রান্ত ধরা হয় এবং তখন R_1 ও R_2 এর মধ্যে দূরত্ব নিয়ন্ত্রণ করিয়া অনুনাদ সৃষ্টি করা হয়। এই সময়ে চাকতিকে ঘিরিয়া সৃষ্ট বায়ুপ্রবাহের দরুণ চাকতির বিক্ষেপ হয়। কত বিক্ষেপ হইল তাহা দেখিবার জন্য আলোক উৎস L হইতে আলোক

রশ্মি চাকতির দর্পণে ফেলা হয়। দর্পণ হইতে প্রতিফলিত আলোক রশ্মি স্কেল S-এর উপর পড়ে।



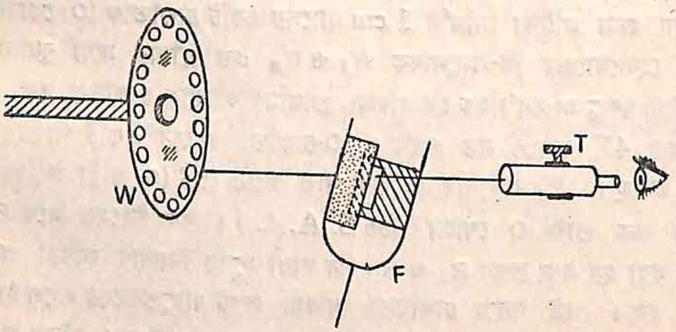
চিত্র S. A. 1

স্কেলের উপর আলোক বিন্দুর বিক্ষেপ হইতে চাকতির বিক্ষেপ ϕ_1 ও অনুরূপে দ্বিতীয় শব্দ উৎসের জন্য বিক্ষেপ ϕ_2 পরিমাপ করা হয়। সমীকরণ (i)-এর সাহায্যে অতঃপর দুইটি উৎসের তীব্রতার তুলনা করা যায়।

S. A. 2 স্ট্রোবোস্কোপ চক্রের দ্বারা শব্দের তীক্ষ্ণতা নির্ণয় (Determination of pitch of sound by stroboscopic wheel)

কোন গোল চাকতির পৃষ্ঠে সমকেন্দ্রিক বৃত্তের পরিধির উপর সমান আকারের ও সমান দূরত্বে কতিপয় গোলাকার ফুটকি চিহ্ন দ্বারা স্ট্রবোস্কোপ চক্র নির্মিত হয়। পৃষ্ঠ সাদা হইলে ফুটকিগুলি কালো এবং পৃষ্ঠ কালো হইলে ফুটকিগুলি সাদা করা হয়। যে সুরশলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে তাহার দুই বাহুতে দুইটি পাতলা অ্যালুমিনিয়াম পাত আটকানো হয় এবং সুরশলাকাকে তড়িৎ প্রবাহের সহায়তায় একটানা কম্পিত করিবার ব্যবস্থা করা হয়।

পরীক্ষা পদ্ধতি : একটি বৈদ্যুতিক মোটরের সাহায্যে স্ট্রবোস্কোপ চক্রকে ঘুরাইবার ব্যবস্থা করা হয় এবং বেগ পরিমাপকের সাহায্যে কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য আবর্তন সংখ্যা দেখা হয়। চিত্র S. A. 2-তে পরীক্ষা ব্যবস্থা দেখানো হইয়াছে।



চিত্র S. A. 2

স্ট্রোবোস্কোপ চক্রের (W) একটি ফুটকির প্রতি দূরবীক্ষণ T-এর সাহায্যে লক্ষ্য রাখিয়া উভয়ের মধ্যস্থলে সুরশলাকা F-কে স্থাপন করা হয়। সুরশলাকার A পাতে একটি আয়তাকার চির (slit) কাটা থাকে এবং B পাতটির দৈর্ঘ্য এমন লওয়া হয় যে সুরশলাকার বাহুদ্বয়ের কোন কম্পন না হইলে B পাত A পাতের চিরকে আটকাইয়া রাখে। পরীক্ষার সময়ে সুরশলাকাকে এমনভাবে স্থাপন করা হয় যাহাতে A পাতের চির খুলিয়া গেলে উহার ভিতর দিয়া ফুটকি দৃষ্টিগোচর হয়।

চক্রকে স্থির রাখিয়া সুরশলাকা কম্পিত করিলে প্রতি সেকেণ্ডে যতবার চির খুলিবে (অর্থাৎ সুরশলাকার যাহা কম্পাঙ্ক) দূরবীক্ষণের মধ্য দিয়া ততবারই ফুটকি দেখা যাইবে, কিন্তু দৃষ্টিনির্বন্ধের জন্য (persistence of vision) ফুটকিকে একটানা দেখা যায়। যদি চক্রটি ধীরে ধীরে ঘুরান হয় তবে মনে হইবে ফুটকি চক্রের উল্টা দিকে ঘুরিতেছে। চক্রের আবর্তন আস্তে আস্তে বৃদ্ধি করিলে এক সময়ে ফুটকিগুলি দূরবীক্ষণের মধ্য দিয়া দেখা যাইবে। স্ট্রোবোস্কোপ চক্রের গতি নিশ্চল অবস্থা হইতে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি করিয়া এমন করা হয় যে, সুরশলাকা কম্পিত হইতে থাকিলেও, দূরবীক্ষণের মধ্য দিয়া কোন বিশেষ ফুটকির সারি অনেকক্ষণ পর্যন্ত দৃষ্টিগোচর থাকে। বেগ-পরিমাপকের সাহায্যে এই অবস্থায় চক্রের আবর্তন গতি পরিমাপ করা হয়।

কম্পাঙ্ক নির্ণয় :

মনে করি, সুরশলাকার অজানা কম্পাঙ্ক $= n$

প্রতি সেকেণ্ডে চক্রের আবর্তন সংখ্যা $= m$

এবং পরীক্ষাধীন ফুটকির সারিতে ফুটকির সংখ্যা $= 1$

সুতরাং চক্রের একবার পূর্ণ আবর্তনের সময় $= \frac{1}{m}$ sec

অর্থাৎ, একটি ফুটকির স্থান পরবর্তী ফুটকি যে সময়ে অধিকার করিবে তাহা

$$= \frac{1}{mp} \text{ sec}$$

$\therefore$ সুরশলাকার দোলনকাল, $T = \frac{1}{mp}$

$$\text{বা,} \quad n = mp \left(\because \quad n = \frac{1}{T} \right)$$

অতএব, নির্ণেয় কম্পাঙ্ক = প্রতি সেকেণ্ড আবর্তন সংখ্যা × সারির ফুটকি সংখ্যা

যেহেতু তীক্ষ্ণতা শব্দের কম্পাঙ্ক দ্বারা প্রকাশিত হয় সেহেতু কম্পাঙ্ক নির্ণয় করিতে পারিলেই শব্দের তীক্ষ্ণতা পরিমাপ করা যাইবে।

S.A.3 সুরশলাকা (Tuning Fork)

শব্দবিজ্ঞানের বিভিন্ন পরীক্ষায় সুরশলাকা অপরিহার্য যন্ত্র। ইহা U-অক্ষরের মত বাঁকানো একটি স্থিতিস্থাপক ইস্পাতের দণ্ড এবং বক্রস্থলে হাতলযুক্ত। U-অক্ষরের এই

বাহুকে সুরশলাকার বাহু (Prong) বলে। নরম রবারের হাতুড়ী দ্বারা সুরশলাকার যে কোন বাহুতে আঘাত করিলে বাহুটি সরল দোলগতিতে কম্পিত হইবে। তখন ইহা হইতে একটিমাত্র কম্পাঙ্কযুক্ত মিষ্ট শব্দ নির্গত হয়। ইহাকে বিশুদ্ধ সুর (pure tone) বলা যায়।

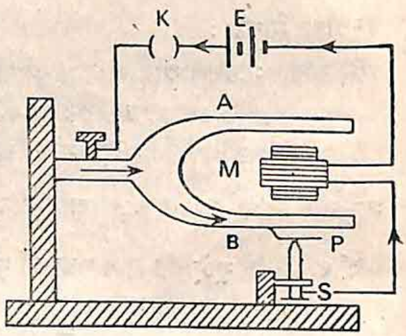
যদি সুরশলাকার বাহুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে l ও b, উপাদানের ঘনত্ব ρ এবং উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক Y হয় তবে সুরশলাকার কম্পাঙ্ক,

$$n=\frac{m^2 b}{4nl^2}\sqrt{\frac{Y}{3\rho}}$$ (m = কম্পনের ধরনের উপর নির্ভরশীল ধ্রুবসংখ্যা)

উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইলে সুরশলাকার কম্পাঙ্ক সামান্য হ্রাস পাইতে দেখা যায়।

তড়িচ্চালিত সুরশলাকা (Electrically maintained tuning fork)

সুরশলাকায় দীর্ঘক্ষণ কম্পন সৃষ্টি করিবার জন্য তড়িৎপ্রবাহের সাহায্য লওয়া হয়। এই জাতীয় সুরশলাকাকে তড়িচ্চালিত সুরশলাকা বলে। S.A.3 চিত্রে ইহা দেখানো হইয়াছে। সুরশলাকার হাতলকে একটি স্তম্ভের সহিত দৃঢ়ভাবে আটকানো থাকে যাহাতে A ও B বাহুদ্বয়ের উল্লম্বতলে কম্পন হইতে পারে। বাহু দুইটির মধ্যস্থলে একটি তড়িৎ-চুম্বক M আছে। ইহার একপ্রান্ত ব্যাটারী E, চাবি K হইয়া স্ক্রু D-এর সহিত যুক্ত। তড়িৎ-চুম্বকের অপর প্রান্ত স্ক্রু S-এর সহিত যুক্ত। একটি প্লাটিনাম তার P-কে সুরশলাকার B বাহুর সহিত ঝালাই করিয়া আটকানো হয় এবং S-এর তীক্ষ্ণপ্রান্ত উহাকে স্পর্শ করে। K-চাবি বন্ধ করিলে তড়িৎপ্রবাহ তীর চিহ্ন দিকে যাইবে এবং ইহাতে তড়িৎ-চুম্বক আকর্ষণী শক্তি লাভ করিয়া সুরশলাকার বাহুদ্বয়কে ভিতরের দিকে টানিবে। ফলে S ও P এর সংযোগ বিচ্ছিন্ন হইয়া প্রবাহ বন্ধ হইয়া যাইবে। এই সময়ে তড়িৎ-চুম্বক আকর্ষণী শক্তি হারাইয়া A ও B বাহুর প্রতি টান ছাড়িয়া দেয়। স্থিতিস্থাপকতা গুণে বাহুদ্বয় তখন পূর্বের জায়গায় ফিরিয়া আসিবে। এইভাবে যতক্ষণ তড়িৎপ্রবাহ চলিবে ততক্ষণ সুরশলাকার বাহুদ্বয়ের কম্পন হইবে।



চিত্র S. A. 3

S.A.4 স্বরগ্রাম (Musical Scale)

সঙ্গীতে দুই বা বেশী সুরের তীক্ষ্ণতার (বা কম্পাঙ্কের) অনুপাত যদি সরল পূর্ণসংখ্যার অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ সুরের সম্মেলনে শ্রুতিমধুর শব্দের সৃষ্টি

হয়। স্বরগ্রাম এই ঘটনাকে অবলম্বন করিয়া নির্মিত। দুইটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে অবকাশ (interval) বলে। সুরদ্বয়ের কম্পাঙ্কের অনুপাত দ্বারা স্বরগ্রামে অবকাশ বোঝা যায়।

a, b, c ইত্যাদি সুরের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1, n_2, n_3 ইত্যাদি হইলে, b ও a সুরের ভিতর অবকাশ $=\dfrac{n_2}{n_1}$

c ও b এর মধ্যে অবকাশ $=\dfrac{n_3}{n_2}$

∴ এই অবস্থায় শেষ ও প্রথম সুরের ভিতর অবকাশ

$$\frac{n_3}{n_1}=\frac{n_3}{n_2}\times\frac{n_2}{n_1}$$

অর্থাৎ, পরপর অবকাশগুলির গুণফল হইতে মোট অবকাশ পাওয়া যায়।

স্বাভাবিক স্বরগ্রাম (Diatonic Scale)

ডায়াটনিক বা স্বাভাবিক স্বরগ্রাম আটটি বিশেষ সুরের সমন্বয়ে গঠিত। এই সুরগুলির কম্পাঙ্ক এরূপ যে প্রথম ও পরবর্তী সুরগুলির অবকাশ সরল পূর্ণসংখ্যার অনুপাতের সমান। অনুপাতগুলি হইল 1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{8}$, 2। অবকাশ যদি 2 : 1 হয় তবে উচ্চ কম্পাঙ্কের সুরটিকে প্রথমটির অষ্টক বলে। স্বাভাবিক স্বরগ্রাম সৃষ্টি করিবার জন্য সর্বনিম্ন সুরের কম্পাঙ্ক ইচ্ছামত ধরা যাইতে পারে, কিন্তু অপর সুরগুলির কম্পাঙ্ক ঐ সর্বনিম্ন সুরের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী স্থির করিতে হইবে।

ভারতীয় সঙ্গীত শাস্ত্রে প্রচলিত স্বরগ্রাম অনুযায়ী সুরগুলিকে সা, রে, গা, মা, পা, ধা, নি বলে। ইহাদের প্রকৃত নাম যথাক্রমে ষড়জ, ঋষভ, গান্ধার্, মধ্যম, পঞ্চম, ধৈবত ও নিষাধ। পাশ্চাত্য দেশের স্বরগুলির নাম যথাক্রমে do, re, mi, fa, sol, la, si। সা হইতে নি পর্যন্ত ক্রমে বৃদ্ধি পাওয়া নিচযুক্ত সাতটি সুরকে সপ্তক (septate) বলা হয়।

সমীকৃত স্বরগ্রাম (Tempered Scale)

স্বাভাবিক স্বরগ্রামের অন্তর্গত সুরগুলিতে $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{16}{15}$ এই তিনটি অবকাশ আছে। এই অবকাশগুলি মাত্রায় অসমান এবং উহাতে মাত্র সাতটি সুর বিদ্যমান। বিভিন্ন কণ্ঠস্বরের উপযোগী ও শ্রুতি মাধুর্যের জন্য আধুনিক কালে সঙ্গীতে এক অষ্টকের মধ্যে আরও অধিক সুর যুক্ত করা হইয়াছে। এই উদ্দেশ্যে আরও পাঁচটি সুরকে স্বরগ্রামের অন্তর্ভুক্ত করিবার জন্য অষ্টকের অবকাশকে বারটি সমান ভাগে বিভক্ত করা হইয়াছে। নতুন এই স্বরগ্রামকে সমীকৃত স্বরগ্রাম বলা হয়।

সমীকৃত স্বরগ্রামে পরপর দুইটি সুরের অবকাশ x ধরিলে লেখা যায়,

$$x^{12}=2$$

$$\text{বা,}\quad x=2^{\frac{1}{12}}=1{\cdot}059 \text{ (প্রায়)}$$

এই স্বরগ্রামের সুরগুলির কম্পাঙ্কের অনুপাত সরল নয়। পিয়ানো বা হারমোনিয়ামে ইহার ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়।

স্বরসমতা এবং স্বরবিষমতা (Consonance and Dissonance)

যদি দুইটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত সরল অনুপাতের হয় তবে উহাদের সম্মেলনে শ্রুতিসুখকর শব্দ সৃষ্ট হয়। এইরূপ সম্মেলনকে স্বরসমতা বলে। অপরপক্ষে, দুইটি সুরের সম্মেলনে সৃষ্ট শব্দ যদি শ্রুতিসুখকর না হয় তবে উহাকে স্বরবিষমতা বলে। স্বরসমতা ও স্বরবিষমতাকে যথাক্রমে সমসংগতি (concord) ও বিষমসংগতি (discord) বলে।

S.A.5 মানুষের কান (**Human Ear**)

গঠনের দিক হইতে কানকে তিন অংশে ভাগ করা হয় : (i) বহিঃকর্ণ (external ear) বা পিন্না (Pinna), (ii) মধ্যকর্ণ (middle ear) বা টিম্পেন্নাম (Tympannum) এবং (iii) অন্তঃকর্ণ (inner ear) বা ল্যাবিরিন্থ (Labyrinth)।

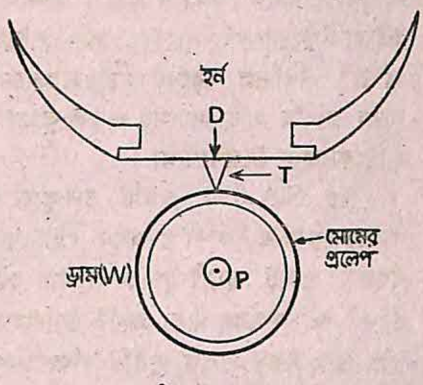
বহিঃকর্ণ কানের পাতা, কানের নালী ও কর্ণপটহ দ্বারা গঠিত। মধ্যকর্ণ একটি গর্ত বিশেষ এবং ইহা হাড় দ্বারা বেষ্টিত। অন্তঃকর্ণে প্রায় দেড় ইঞ্চি লম্বা একটি অস্থিলন শামুকের ন্যায় পাকানো থাকে ; ইহার নাম ককলি। ব্যাসিলার পর্দা নামে একটি পর্দা দ্বারা ইহা দুই অংশে বিভক্ত। ইহাই কানের শ্রবণ-প্রকোষ্ঠ।

শব্দ তরঙ্গকে সংগ্রহ করিয়া কানের পাতা কর্ণপটহে পাঠায়। ফলে উহা আন্দোলিত হয় এবং ককলির তরলে তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। যে তন্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক ঐ তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সহিত সমান হয়, সেই তন্তু অনুনাদী কম্পনে কম্পিত হয়। ইহাতে বৈদ্যুতিক সাড়া (electrical response) সৃষ্ট হইয়া স্নায়ুতন্তুর (auditory nerves) দ্বারা মস্তিষ্কে আসে এবং আমরা শব্দ শুনি।

S.A.6 ফোনোগ্রাফ (**Phonograph**)

টমাস আলভা এডিসন 1878 খ্রীষ্টাব্দে ইহা আবিষ্কার করেন। আবৃত্তি, বক্তৃতা ইত্যাদি রেকর্ড করিয়া শোনার ইহাই প্রথম ব্যবস্থা। চিত্র S.A.4-এ ইহা দেখানো হইয়াছে।

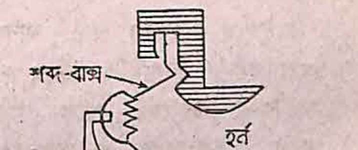
এই যন্ত্রে একটি শঙ্কু আকৃতির হর্ণ থাকে এবং ইহার সরু প্রান্তে D একটি গোলাকার ধাতব পর্দা। T একটি সরু পিন শলাকা। উহার তীক্ষ্ন ভাগ মোমের প্রলেপ দেওয়া ড্রাম W-কে স্পর্শ করিয়া আছে। P বিন্দুর মধ্য দিয়া অতিক্রান্ত অক্ষের চতুর্দিকে ইহা ঘুরিতে পারে। শব্দ রেকর্ড করিবার সময় বক্তা হর্ণের সম্মুখে কথা বলে। হর্ণ এই শব্দ তরঙ্গ D পর্দায় পেঁছাইয়া দেয়। T পিনের অগ্রভাগ ড্রামের উপর মোমের প্রলেপে দাগ কাটে। শব্দের পুনরাবৃত্তির জন্য T পিনকে সরাইয়া পূর্বের জায়গায় রাখা হয়।



চিত্র S. A. 4

S.A.7 গ্রামোফোন (Gramophone)

ইহা ফনোগ্রাফের উন্নত সংস্করণ। ফনোগ্রাফে ড্রামকে হাতে বা বৈদ্যুতিক মোটরের সাহায্যে ঘুরানো হয়। গ্রামোফোনে ইহা করা হয় স্প্রিংয়ের সাহায্যে। গ্রামোফোনে শব্দ তরঙ্গের গতিপথকে ড্রামের পরিবর্তে গোল চাকতির উপর অংকন করা হয় (চিত্র S.A.5)। এই গতিপথ চাকতির প্রায় কেন্দ্রবিন্দু হইতে শুরু এবং পরিধিতে শেষ। ইহাকেই গ্রামোফোন রেকর্ড বলা হয়। অনুভূমিক তলে গ্রামোফোন চাকতি ঘুরাইলে পিন তরঙ্গায়িত গতিপথে অগ্রসর হয়। অসমান প্রস্থের জন্য পিনের যে পার্শ্বগতির সৃষ্টি হয় লিভারের সাহায্যে তাহা বিবর্ধিত করা হয় এবং অবশেষে উহাকে শব্দ-বাক্সের (sound-box) পর্দাতে সংবাহিত করিলে চোঙের ভিতরের বায়ুতে তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। ফলে শব্দের পুনরাবৃত্তি ঘটে। গ্রামোফোনের চোঙ বা হর্ণ শব্দকে জোরালো করিয়া দূরে ছড়াইয়া দেয়।



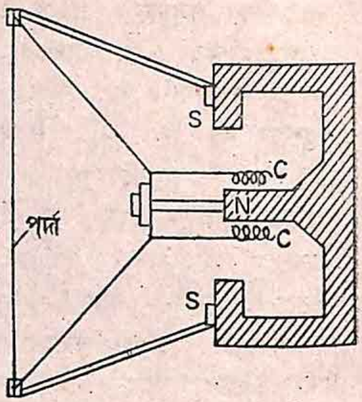
চিত্র S. A. 5

S.A.8 মাইক্রোফোন (Microphone)

ইহার সাহায্যে শব্দ স্পন্দনকে আনুষঙ্গিক শ্রাব্য কম্পাঙ্কযুক্ত তড়িৎ স্পন্দনে রূপান্তরিত করা যায়। মাইক্রোফোনের সহিত একটি ভালভ-বিবর্ধক (valve

amplifier) সংযুক্ত থাকে। ইহা মূল শব্দ স্পন্দনের তরঙ্গাকৃতি অবিকৃত রাখিয়া তড়িৎ স্পন্দনকে বিবর্ধিত করে। শব্দকে অনেক দূর পর্যন্ত ছড়াইয়া দেওয়ার প্রয়োজন হইলে মাইক্রোফোন ব্যবহার করা যাইতে পারে। বিভিন্ন ধরনের মাইক্রোফোনের মধ্যে কার্বন মাইক্রোফোন ও চল-কুণ্ডলী মাইক্রোফোন উল্লেখযোগ্য।

চিত্র S.A.6-এ একটি চল-কুণ্ডলী মাইক্রোফোনের নক্শা দেখানো হইয়াছে। ইহাতে একটি স্থায়ী চুম্বক ব্যবহার করা হয়। এই চুম্বকের মধ্যে একটি উত্তরমেরু (N) এবং উভয় প্রান্তে দুইটি দক্ষিণমেরু S থাকে। এই দুই মেরুর অভ্যন্তরে বলরেখাগুলি ব্যাসার্ধমুখী। গোলকের কুণ্ডলী C মেরুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থান করে।



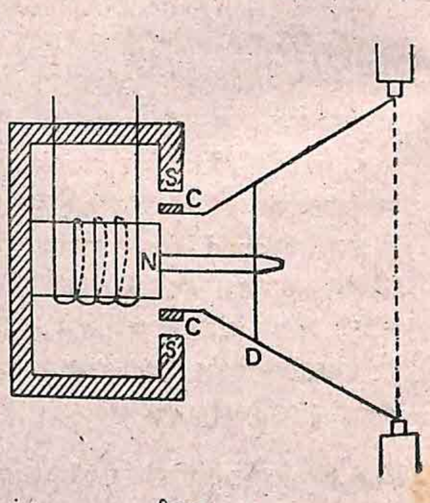
চিত্র S. A. 6

শব্দ তরঙ্গ যখন পর্দাকে আঘাত করে তখন পর্দার বিচলন হয় এবং সংগে সংগে কুণ্ডলী কর্তৃক অতিক্রান্ত বলরেখার সংখ্যার পরিবর্তন হয়। ইহাতে কুণ্ডলীতে তড়িৎ প্রবাহ সৃষ্টি হয় ; ভালভ-বিবর্ধকের সাহায্যে উহাকে বিবর্ধিত করা যায়।

S.A.9 লাউড স্পীকার (Loud Speaker)

ইহার সাহায্যে শ্রাব্য কম্পাঙ্কযুক্ত তড়িৎ স্পন্দনকে শব্দ শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয়। বিবর্ধিত তড়িৎ স্পন্দনকে লাউড স্পীকারে পাঠানো হয় এবং লাউড স্পীকার উহাদের শব্দে পরিণত করে। চল-চুম্বক ও চল-কুণ্ডলী লাউড স্পীকার উল্লেখযোগ্য। ইহাদের মধ্যে আবার চল-কুণ্ডলী লাউড স্পীকারের ব্যবহার অধুনা খুব বেশী। ইহা খুব জোরালো শব্দ উৎপন্ন করে কিন্তু মূল শব্দকে অবিকৃত রাখে। চিত্র S. A. 7-এ ইহার নক্শা দেখানো হইয়াছে।

এই যন্ত্রে N মেরুকে ঘিরিয়া S ও S′ দুইটি মেরু অবস্থিত। CC তার-কুণ্ডলীকে কথন-কুণ্ডলী (speech coil) বলে। শঙ্কু আকারের পর্দা (diaphragm) D-এর সহিত ইহা সংযুক্ত।



চিত্র S. A. 7

মাইক্রোফোনের সামনে কথাবার্তা বলিলে মাইক্রোফোন উহাকে শ্রাব্য কম্পাঙ্কের তড়িৎ স্পন্দনে পরিবর্তিত করে। বিবর্ধকের দ্বারা ঐ তড়িৎ স্পন্দনকে বিবর্ধিত করিয়া লাউড স্পীকারের কথন-কুণ্ডলীতে পাঠানো হয়। ইহাতে কুণ্ডলীটি চৌম্বক-ক্ষেত্রে একই কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হয়। ফলে ইহার সঙ্গে যুক্ত পর্দাও একই কম্পাঙ্কে আন্দোলিত হইতে থাকে। ইহার দরুণ পর্দার সামনের বায়ুতে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাহা শব্দানুভূতির সৃষ্টি করে।

হ্রস্বোত্তর প্রশ্নাবলী

Q. 1. দোলনরত দোলক শব্দ উৎপন্ন করে না কেন ?

Q. 2. সরল দোলগতিসম্পন্ন কোন কণার গুণগতভাবে শক্তির নিত্যতা ব্যাখ্যা কর।

Q. 3. মাধ্যমে শব্দ তরঙ্গের তীব্রতা কোন্ কোন্ রাশির উপর নির্ভরশীল ?

Q. 4. উষ্ণতা বৃদ্ধি করিলে বায়ু মাধ্যমে শব্দের বেগ কিরূপে পরিবর্তিত হয় ?

Q. 5. বায়ুতে শব্দের বেগ ঘনত্ব ও জলীয় বাষ্প দ্বারা কিভাবে প্রভাবিত হয় ?

Q. 6. রেল লাইনের উপর তীব্র শব্দ করা হইলে দূরের শ্রোতা লাইনে কান রাখিয়া দুইটি শব্দ শুনিতে পায় কেন ?

Q. 7. সনোমিটারের একটি তারকে মধ্যবিন্দু ছাড়া অন্য কোন বিন্দুতে টানিয়া ছাড়িয়া দিলে কি ঘটিবে ?

Q. 8. বিতত তারে অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বেগ তির্যক তরঙ্গের বেগ অপেক্ষা বেশী কেন ?

Q. 9. 'উপসুর সমমেল না হইতে পারে কিন্তু সকল সমমেলই উপসুর'—যুক্তি দাও।

Q. 10. সুর ও স্বরের মধ্যে তফাৎ কি ?

Q. 11. 256 ও 260 Hz কম্পাঙ্কের দুইটি সুরশলাকাকে একই সঙ্গে বাজাইলে প্রতি মিনিটে কতগুলি স্বরকম্পের সৃষ্টি হইবে ?

Q. 12. প্রায় একই কম্পাঙ্কের দুইটি সুরশলাকার মধ্যে কোন্‌টি উচ্চতর কম্পাঙ্কের তাহা কিভাবে বুঝিবে ?

Q. 13. দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি বিতত তারে তির্যক মূল কম্পন সৃষ্টি হইলে সুস্পন্দ ও নিঃস্পন্দে বিন্দুর অবস্থান কোথায় হইবে ?

Q. 14. কুন্‌টে নলের পরীক্ষায় লাইকোপোডিয়াম চূর্ণের স্তর বিন্যাস কেন হয় ?

Q. 15. সুরসমৃদ্ধ ও সুরবর্জিত শব্দের মধ্যে তফাৎ কি ?

Q. 16. 'শব্দের প্রাবল্য সর্বদা উহার তীব্রতার আনুপাতিক নয়'—ব্যাখ্যা কর।

তাপ বিজ্ঞান
(HEAT)

প্রথম পরিচ্ছেদ

তাপ ও থার্মোমিতি

(Heat and Thermometry)

1.1 সূচনা (Introduction)

তাপ সম্বন্ধে আমরা সকলেই কিছু-না-কিছু পরিচিত। কোন বস্তু গরম হইয়া উঠিলেই ঐ বস্তুতে আমরা তাপের অস্তিত্ব উপলব্ধি করি। তাপকে এমন এক শক্তি বলিয়া ধরা যাইতে পারে যাহার গ্রহণে বস্তু উত্তপ্ত হইয়া উঠে এবং বর্জনে শীতল হইয়া যায়। কোন বস্তু গরম কি ঠাণ্ডা, এই অনুভূতির মাত্রাকে আমরা উষ্ণতা বা তাপমাত্রা (temperature) বলি।

1.2 তাপ ও উষ্ণতার মধ্যে পার্থক্য (Difference between heat and temperature)

তাপ ও উষ্ণতার মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্যগুলি লক্ষ্য করা যায় :

(i) তাপ একপ্রকার শক্তি অর্থাৎ ইহার কার্য করিবার ক্ষমতা আছে কিন্তু উষ্ণতা বলিতে বস্তুর এক তাপীয় অবস্থা বুঝায়।

(ii) অবস্থার পরিবর্তন না ঘটাইয়া কোন বস্তুতে তাপ প্রয়োগ করিতে থাকিলে বস্তুর উষ্ণতা বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। সুতরাং বলা যাইতে পারে, তাপ উষ্ণতার সমানুপাতিক।

(iii) দুইটি বস্তুর তাপের পরিমাণ এক হইলেও উহাদের উষ্ণতা পৃথক হইতে পারে।

(iv) তাপ কোন্ দিকে প্রবাহিত হইবে তাহা উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল, তাপের পরিমাণের উপর নহে।

1.3 তাপের ক্রিয়া (Effects of heat)

কোন বস্তুতে তাপ প্রয়োগ করিলে বস্তুর অভ্যন্তরে নিম্নলিখিত এক বা একাধিক পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায় :

(i) উষ্ণতার পরিবর্তন, (ii) অবস্থার পরিবর্তন, (iii) আয়তনের পরিবর্তন, (iv) ভৌত ও রাসায়নিক পরিবর্তন, (v) তাড়িতিক গুণাগুণের পরিবর্তন ও তাড়িতিক শক্তির সৃষ্টি, (vi) দহন ও প্রাণনাশ এবং (vii) আলোক শক্তির বিকাশ।

1.4 উষ্ণতামাপক যন্ত্র বা উষ্মামাপী (Temperature-measuring instrument or Therometer)

কোন বস্তু গরম কি ঠাণ্ডা তাহা আমরা স্পর্শ দ্বারা বুঝিতে পারি। কিন্তু স্পর্শানুভূতির বিচার সর্বদা সঠিক হয় না। যে যন্ত্রের দ্বারা কোন বস্তুর উষ্ণতা সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করা যায় তাহাকে উষ্ণতামাপক যন্ত্র বা থার্মোমিটার বলে।

কঠিন, তরল ও গ্যাসীয় পদার্থের বিভিন্ন ধর্মের উপর নির্ভর করিয়া নানা প্রকারের থার্মোমিটার তৈয়ারী হইয়াছে। যথা :

(i) **তরল থার্মোমিটার** (Liquid thermometers) : উষ্ণতার পরিবর্তনের সহিত তরলের আয়তনের যে পরিবর্তন হয় তাহা অবলম্বন করিয়া তরল থার্মোমিটার নির্মিত হইয়াছে। অ্যালকোহল থার্মোমিটার, পারদ থার্মোমিটার ইত্যাদি এই শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত।

(ii) **গ্যাস থার্মোমিটার** (Gas thermometers) : গ্যাসের চাপ অপরিবর্তিত রাখিলে উহার আয়তন উষ্ণতার সহিত পরিবর্তিত হয় ; আবার আয়তন অপরিবর্তিত রাখিলে চাপ উষ্ণতার সহিত পরিবর্তিত হয়। গ্যাসের এই ধর্মের উপর নির্ভর করিয়া বিভিন্ন ধরনের গ্যাস থার্মোমিটার তৈয়ারী হইয়াছে।

(iii) **তাপ-বৈদ্যুত থার্মোমিটার** (Thermo-electric thermometers) : যদি দুইটি পৃথক ধাতুর দুই প্রান্ত যোগ করিয়া প্রান্ত দুইটিতে বিভিন্ন উষ্ণতা সৃষ্টি করা হয় তবে তারের মধ্য দিয়া তড়িৎ প্রবাহিত হইবে। ইহাকে তাপ-বৈদ্যুত যুগ্ম (thermocouple) বলা হয়। ইহার দ্বারা উষ্ণতার পরিমাপ করা যাইতে পারে।

(iv) **বৈদ্যুতিক রোধ থার্মোমিটার** (Electrical resistance thermometers) : কোন তড়িৎ-পরিবাহীর রোধ উষ্ণতায় উপর নির্ভর করে ; উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইলে রোধ বৃদ্ধি পায় এবং উষ্ণতা হ্রাস পাইলে রোধ হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। দেখা গিয়াছে, প্লাটিনাম মৌলের এই ধর্ম খুবই নিয়মানুগ। প্লাটিনামের এই ধর্মকে কাজে লাগাইয়া প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার নামক এক ধরনের বৈদ্যুতিক থার্মোমিটার তৈয়ারী করা সম্ভব হইয়াছে।

1.5 উষ্ণতার বিভিন্ন স্কেল (Different scales of temperature)

উষ্ণতা নির্ণয়ের স্কেল তৈয়ারী করিবার জন্য প্রথমে দুইটি স্থিরাংক নির্দিষ্ট করিয়া লওয়া হয়। যে উষ্ণতায় জল জমিয়া বরফ হয় অথবা বিশুদ্ধ বরফ গলে তাহাকে হিমাংক (freezing point or ice point) অথবা নিম্নস্থিরাংক (lower fixed point) বলে। অপরপক্ষে, প্রমাণ বায়ুমণ্ডলীয় চাপে ফুটন্ত জল হইতে উদ্গত উষ্ণতাকে বলা হয় স্ফুটনাংক (boiling point or steam point) বা ঊর্ধ্বস্থিরাংক (upper fixed point)। হিমাংক ও স্ফুটনাংকের মধ্যবর্তী উষ্ণতার ব্যবধানকে মূল অন্তর (fundamental interval) বলে। এই ব্যবধানকে

বিভিন্নভাবে বিভক্ত করিয়া বিভিন্ন ধরনের থার্মোমিটার স্কেল প্রস্তুত করা হয়। চিত্র 1.1-এ এই তিন স্কেলের তুলনামূলক চিত্র দেখানো হইয়াছে।

(i) **সেলসিয়াস বা সেণ্টিগ্রেড স্কেল** (Celsius or Centigrade scale): সুইডেনের জ্যোতির্বিজ্ঞানী সেলসিয়াস এই স্কেলের উদ্ভাবক। এই স্কেল অনুযায়ী নিম্নস্থিরাংককে 0 ডিগ্রী এবং ঊর্ধ্বস্থিরাংককে 100 ডিগ্রী ধরা হয় এবং মূল অন্তরকে 100 সমান ভাগে ভাগ করা হয়। প্রত্যেক ভাগ 1°C উষ্ণতার ব্যবধান বুঝায়।

(ii) **ফারেনহাইট স্কেল** (Fahrenheit scale): এই স্কেল অনুযায়ী নিম্নস্থিরাংককে 32 ডিগ্রী এবং ঊর্ধ্বস্থিরাংককে 212 ডিগ্রী ধরা হয় এবং মূল অন্তরকে 180 সমান ভাগে ভাগ করা হয়। এই স্কেলের উদ্ভাবক বৃটিশ বিজ্ঞানী ফারেনহাইটের নামানুযায়ী ইহার নামকরণ হইয়াছে।

(iii) **রোমার্ স্কেল** (Re'aumur scale): এই স্কেল অনুযায়ী নিম্নস্থিরাংককে 0 ডিগ্রী এবং ঊর্ধ্বস্থিরাংককে 80 ডিগ্রী ধরা হয় এবং মূল অন্তরকে 80 সমান ভাগে ভাগ করা হয়।

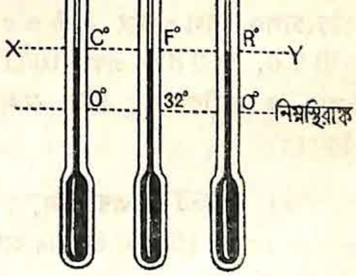
1.5.1 স্কেলগুলির ভিতর পারস্পরিক সম্পর্ক (Relation between the scales)

যে-কোন স্কেলের উষ্ণতার পাঠ-কে সহজেই অন্য স্কেলে রূপান্তরিত করা যাইতে পারে।

মনে করি, কোন একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতাকে XY অনুভূমিক রেখা দ্বারা প্রকাশ করা হইল (চিত্র 1.1)। সেলসিয়াস স্কেলে এই রেখা ও নিম্নস্থিরাংকের অন্তর্বর্তী ব্যবধান হইল C°, ফারেনহাইট স্কেলে ইহা (F − 32°) এবং রোমার্ স্কেলে R°। কিন্তু আমরা জানি, সেলসিয়াস স্কেল মূল অন্তর 100, ফারেনহাইটে 180 এবং রোমার্ স্কেলে 80 সমান ভাগে ভাগ করা হয়।

$$\therefore \quad \frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} = \frac{R}{80}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{R}{4} \quad \cdots (1.1)$$



চিত্র 1.1

সমীকরণ (1.1) স্কেল তিনটির ভিতর পারস্পরিক সম্পর্ক নির্দেশ করে।

1.6 উষ্ণতার আন্তর্জাতিক স্কেল (International scale of temperature)

ওজন ও পরিমাপের আন্তর্জাতিক সমিতি (International Committee of Weights and Measures) 1927 খ্রীষ্টাব্দে উষ্ণতার চরম থার্মোডায়নামিক স্কেল বাস্তব ক্ষেত্রে প্রয়োগের উদ্দেশ্যে কতকগুলি স্থিরাংক নির্দেশ করেন। এই স্থিরাংকগুলির অন্তর্বর্তী স্থানে উষ্ণতা মাপিবার জন্য চারটি প্রমাণ থার্মোমিটার ব্যবহারের প্রস্তাব দেওয়া হয়। এই স্কেল 'আন্তর্জাতিক উষ্ণতা স্কেল' নামে পরিচিত। তত্ত্বের দিক্ হইতে এবং পরীক্ষালব্ধ ফলাফল বিবেচনা করিয়া এই স্কেলের সহিত তাপজাতীয় স্কেলের যতটা মিল রাখা সম্ভব তাহা রাখা হইয়াছে।

উপরি-উক্ত চারটি প্রমাণ থার্মোমিটারের নাম এবং ঐগুলি উষ্ণতার মানের যে বিভিন্ন অঞ্চলে ব্যবহার করা প্রয়োজন তাহা নিম্নে আলোচিত হইল।

(i) **0°C হইতে 660°C পর্যন্ত** : প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার এবং ব্যবহৃত সূত্র $R_t = R_0\{1+\alpha t+\beta t^2\}$; যেখানে R_t ও R_0 যথাক্রমে প্ল্যাটিনাম থার্মোমিটারের রোধ t°C ও 0°C উষ্ণতায় এবং α ও β ধ্রুবক সংখ্যা। R_0, α ও β-র মান যথাক্রমে 0°C, 100°C ও 444·6°C উষ্ণতায় থার্মোমিটারকে অংশাঙ্কিত করিয়া নির্ণয় করা হয়। ব্যবহৃত প্ল্যাটিনাম খুব বিশুদ্ধ হওয়া প্রয়োজন যাহাতে R_t/R_0 এর মান 1·39 এর চেয়ে অধিক হয়।

(ii) **−190°C হইতে 0°C পর্যন্ত** : প্ল্যাটিনাম রোধ থার্মোমিটার এবং ব্যবহৃত সূত্র $R_t = R_0\{1+\alpha t+\beta t^2+\gamma(t-100)t^3\}$; যেখানে γ একটি ধ্রুবক সংখ্যা। γ এর মান নির্ণয় করিবার জন্যে এই থার্মোমিটারকে −182·97°C উষ্ণতায় অংশাঙ্কিত করা হয়। অন্য ধ্রুবক সংখ্যাগুলি R_0, α ও β এর মান পূর্বের ন্যায় নির্ণয় করা হইয়া থাকে।

(iii) **660°C থেকে 1063°C পর্যন্ত** : প্ল্যাটিনাম ও প্ল্যাটিনাম-রেডিয়াম ধাতুর থার্মোকাপ্‌ল্ এবং ব্যবহৃত সূত্র $E = a+bt+ct^2$; যেখানে E = তাপীয় তড়িৎচালক বল এবং a, b ও c তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা, যেগুলি থার্মোমিটারকে 630·5°C, 960·8°C এবং 1063°C উষ্ণতায় অংশাঙ্কিত করিয়া নির্ণয় করা হয়। উপরি-উক্ত সমীকরণে t হইল সেলসিয়াস স্কেলে থার্মোকাপ্‌লের উত্তপ্ত ধাতুসন্ধির উষ্ণতা।

(iv) **1063°C এর ঊর্ধ্বে** : আলোকীয় পাইরোমিটার (Optical pyrometer) যাহা 1063°C উষ্ণতায় অংশাঙ্কিত করা হয়।

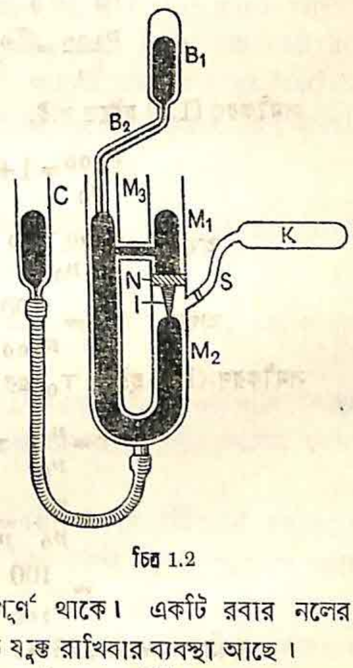
1948 খ্রীষ্টাব্দে ওজন ও পরিমাপের আন্তর্জাতিক কমিটি 'আন্তর্জাতিক উষ্ণতা স্কেলের' জন্য স্থির বিন্দুগুলি নির্দিষ্ট করিয়া দেন। নিম্নে ইহার একটি তালিকা দেওয়া হইল।

(*a*) অক্সিজেন বিন্দু (অর্থাৎ তরল অক্সিজেনের স্ফুটনাঙ্ক) $-182{\cdot}97^\circ C$
(*b*) বরফ বিন্দু $0^\circ C$
(*c*) স্টীম বিন্দু $100^\circ C$
(*d*) গন্ধক বিন্দু (অর্থাৎ তরল গন্ধকের স্ফুটনাঙ্ক) $444{\cdot}6^\circ C$
(*e*) অ্যাণ্টিমনি বিন্দু (অর্থাৎ তরল অ্যাণ্টিমনির কঠিনাঙ্ক) $630{\cdot}5^\circ C$
(*f*) রৌপ্য বিন্দু (অর্থাৎ তরল রূপার কঠিনাঙ্ক) $960{\cdot}8^\circ C$
(*g*) স্বর্ণ বিন্দু (অর্থাৎ তরল সোনার কঠিনাঙ্ক) $1063^\circ C$

1.7 স্থির আয়তন হাইড্রোজেন থার্মোমিটার (Constant volume hydrogen therometer)

চিত্র 1.2 এ স্থির আয়তন হাইড্রোজেন থার্মোমিটারের নকশা দেখানো হইয়াছে। 1887 খ্রীষ্টাব্দে প্যারিস নগরীতে এক আন্তর্জাতিক কংগ্রেসে এই থার্মোমিটারের নির্মাণ পদ্ধতি সম্পর্কে বিশদ আলোচনা হয়।

চিত্রে K হইল একটি প্ল্যাটিনাম-ইরিডিয়াম সংকর ধাতুর তৈয়ারী চোঙাকৃতি থার্মোমিটারের কুণ্ড ; যাহার দৈর্ঘ্য 1 মিটার, ব্যাস 3·6 সেণ্টিমিটার এবং আয়তন 1 লিটারের সমান। ইহার অভ্যন্তরে $0^\circ C$ উষ্ণতায় ও 100 সেণ্টিমিটার পারদের চাপে শুষ্ক ও বিশুদ্ধ হাইড্রোজেন রাখা হয়। একটি দীর্ঘ প্ল্যাটিনাম নল S, কুণ্ডটিকে M_1M_2 ম্যানোমিটারের M_2 এর সহিত যুক্ত করে। ম্যানোমিটারের M_1M_2 বাহুটিকে একটি ইস্পাতের পাত N এর সাহায্যে দুইটি অংশে বিভক্ত করা হয়। ম্যানোমিটারের M_1 ও M_2 উভয় অংশেই পারদপূর্ণ করা হয় এবং সূচক I এর সরু অংশটি M_2 অংশে প্রবেশ করানো থাকে।



চিত্র 1.2

ম্যানোমিটারের অন্য বাহু M_3-ও পারদ দ্বারা পূর্ণ থাকে। একটি রবার নলের সাহায্যে ম্যানোমিটারকে পারদ আধার C এর সহিত যুক্ত রাখিবার ব্যবস্থা আছে।

চিত্রে B_1 ও B_2 হইল যথাক্রমে বেলনাকার ও সরু বাঁকানো দুইটি নল। B_2 নলকে এমনভাবে বাঁকানো হয় যে B_1 নলের অনুদৈর্ঘ্য ম্যানোমিটারের M_1M_2 বাহুর অনুদৈর্ঘ্য অক্ষ একই উল্লম্ব সরলরেখায় অবস্থান করে। ব্যারোমিটার B_1B_2 পারদপূর্ণ করা হয় এবং B_1 নলে পারদতলের উপরে টরিচেল্লীয় শূন্য (স্থান) (Torricellian Vacuum) থাকে।

কোন পাত্রের উষ্ণতা পরিমাপের জন্য K কুণ্ডটিকে সেই পাত্রের অভ্যন্তরে এমনভাবে রাখা হয় যাহাতে কুণ্ডের ভিতরের হাইড্রোজেন গ্যাস পাত্রের উষ্ণতা লাভ

করিতে পারে। পারদ আধার C কে উপরে উঠাইয়া বা নিচে নামাইয়া M_2 নলের পারদ তলকে সূচক I এর সূক্ষ্ম প্রান্তে স্পর্শ করানো হয়। এইবার একটি ক্যাথিটোমিটার-এর সাহায্যে B_1 ও M_2 পারদতলের উচ্চতার পার্থক্য পরিমাপ করা হয়। এই পার্থক্য h cm, পারদের ঘনত্ব ρ gram/c.c. এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের মান gram/cm/s^2 হইলে পাত্রের উষ্ণতায় হাইড্রোজেন গ্যাসের চাপ $= h\rho g$ dyne।

এখন মনে করি, যখন হাইড্রোজেন গ্যাস পাত্রের উষ্ণতা t°C (বা T°K)-এ থাকে তখন হাইড্রোজেন গ্যাসের চাপ p_t এবং যখন বরফের উষ্ণতা অর্থাৎ 0°C (বা T_0° K)-এ থাকে তখন গ্যাসের চাপ p_0। আবার, যখন স্টীমের উষ্ণতা অর্থাৎ 100°C বা $(T_0+100)=373$°K পায় তখন এই গ্যাসের চাপ ধরা যাক p_{100}।

এখন চার্লসের স্থির আয়তন সূত্র প্রয়োগ করিয়া আমরা পাই,

$$\frac{p_t}{p_0}=\frac{T}{T_0} \qquad \cdots(1.2)$$

এবং $$\frac{p_{100}}{p_0}=\frac{T_0+100}{T_0} \qquad \cdots(1.3)$$

সমীকরণ (1.3) হইতে পাই,

$$\frac{p_{100}}{p_0}=1+\frac{100}{T_0}$$

অথবা, $$\frac{p_{100}-p_0}{p_0}=\frac{100}{T_0}$$

অথবা, $$T_0=\frac{100\,p_0}{p_{100}-p_0} \qquad \cdots(1.4)$$

সমীকরণ (1.4) হইতে T_0-এর মান সমীকরণ (1.2) তে বসাইয়া পাই,

$$T=\frac{p_t}{p_0}\cdot T_0$$

$$=\frac{p_t}{p_0}\cdot\frac{100\,p_0}{p_{100}-p_0}$$

$$=\frac{100\,p_t}{p_{100}-p_0} \qquad \cdots(1.5)$$

এখন, $T=t+273=t+T_0$

$$\therefore\ t+T_0=\frac{p_t}{p_0}T_0$$

অথবা, $$t=\frac{p_t-p_0}{p_0}T_0$$

$$\therefore\ t=\frac{p_t-p_0}{p_{100}-p_0}\cdot 100 \qquad \cdots(1.6)$$

সমীকরণ (1.6) এর সাহায্যে পরীক্ষাধীন পাত্রের উষ্ণতার মান নির্ণয় করা যায়।

এই থার্মোমিটারের সাহায্যে মোটামুটি $-200^\circ C$ হইতে $500^\circ C$-এর মধ্যবর্তী যে-কোন উষ্ণতা নির্ণয় করা যায়। $-200^\circ C$-এর নিম্নের কোন উষ্ণতা পরিমাপের জন্য সাধারণত হাইড্রোজেনের পরিবর্তে হিলিয়াম গ্যাস ব্যবহৃত হয়।

এই থার্মোমিটার ব্যবহারের সময় নিম্নলিখিত **ত্রুটিগুলি** সংশোধন করা প্রয়োজন :

(i) কুণ্ডকে যে সরু নল S দ্বারা U-আকৃতির ম্যানোমিটারের সহিত যুক্ত করা হয়, সেই S-এর অভ্যন্তরের গ্যাস K-এর ভিতরের উষ্ণতা পায় না। ফলে সংশোধনের প্রয়োজন হয়।

(ii) উষ্ণতা পরিবর্তনের সহিত পারদের ঘনত্বের অথবা আয়তনের পরিবর্তন হয়। ইহার জন্যে সংশোধন দরকার।

(iii) সাধারণ উষ্ণতা ও চাপে যে-কোন প্রকৃত গ্যাস (real gas) আদর্শ গ্যাসের ব্যবহার হইতে কিছুটা পৃথক হয়। এই কারণে গ্যাস থার্মোমিটারের সাহায্যে উষ্ণতার পরিমাপ করিতে গেলে আদর্শ গ্যাসের ব্যবহার হইতে বিচ্যুতির জন্য সংশোধন প্রয়োগ করা হয়। সাধারণ উষ্ণতায় এই সংশোধনের মান অবশ্য খুব বেশী নয়।

1.7.1 গ্যাস থার্মোমিটারের সুবিধা ও অসুবিধা (Advantages and disadvantages of a gas thermometer)

তরল থার্মোমিটারের সহিত তুলনামূলক বিচারে গ্যাস থার্মোমিটারের নিম্নলিখিত সুবিধাগুলি লক্ষ্য করা যায়।

(i) গ্যাসের প্রসারণ গুণাঙ্ক তরল অপেক্ষা অনেক বেশী বলিয়া এই থার্মোমিটার অনেক বেশী সুবেদী এবং উষ্ণতা পাঠে আধারের প্রসারণের ফলে বিশেষ কোন ত্রুটি ঘটায় না।

(ii) উষ্ণতার অনেক দূর পর্যন্ত গ্যাসের অবস্থার কোন পরিবর্তন হয় না। ফলে গ্যাস থার্মোমিটারের সাহায্যে উচ্চ এবং নিম্ন উষ্ণতা দুই-ই পরিমাপ করা যাইতে পারে।

(iii) সমস্ত স্থায়ী গ্যাসের স্থির চাপে আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক ও স্থির আয়তনে চাপ প্রসারণ গুণাঙ্ক অভিন্ন। ফলে স্থির-চাপ ও স্থির-আয়তন থার্মোমিটারের উষ্ণতা পার্থক্য সমান হইবে।

(iv) গ্যাসের আপেক্ষিক গুরুত্ব কম ; ইহা ছাড়া বিশুদ্ধ গ্যাস সংগ্রহ করা খুব কঠিন নয়।

(v) গ্যাসের প্রসারণ খুব নিয়মানুগ এবং ইহা উষ্ণতার দূর-পাল্লা অবধি হইয়া থাকে।

(vi) গ্যাসের তাপগ্রাহিতা অনেক কম বলিয়া তাপ গ্রহণ বা বর্জনে গ্যাস অনেক সুবেদী।

এই থার্মোমিটারের একমাত্র অসুবিধা এই যে ইহা আকৃতিতে অনেক বড় ও কার্যপদ্ধতি কিছুটা অসুবিধাজনক। এই কারণে সাধারণভাবে উষ্ণতা পরিমাপে গ্যাস থার্মোমিটারের ব্যবহার নাই বলিলেই চলে।

উদাহরণ (Example)

1. একটি স্থির-আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারে 0°C এবং 100°C উষ্ণতায় যথাক্রমে 125 cm এবং 175 cm পারদ স্তম্ভের চাপ পাওয়া গেল। একটি গাহে ঐ থার্মোমিটার 160 cm পারদ স্তম্ভের চাপ দেখাইলে, ঐ গাহের উষ্ণতা নির্ণয় কর।

(In a constant volume gas thermometer, the pressures are 125 cm and 175 cm of Hg at 0°C and 100°C respectively. Calculate the temperature of a bath when this thermometer shows pressure of 160 cm of Hg in it.) (C. U. '63)

মনে করি, গাহের উষ্ণতা $= t°C$

এখন, স্থির-আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারের ক্ষেত্রে,

$$t = \frac{p_t - p_0}{p_{100} - p_0} \times 100$$

এখানে,

$p_0 = 125$ cm

$p_t = 160$ cm

এবং $p_{100} = 175$ cm

$$\therefore \quad t = \frac{160 - 125}{175 - 125} \times 100$$

$$= \frac{35}{50} \times 100$$

$$= 70°C$$

সুতরাং নির্ণেয় গাহের উষ্ণতা $= 70°C$.

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. উষ্ণতার আন্তর্জাতিক স্কেল কাহাকে বলে? ইহার প্রয়োজনীয়তা কি? কিভাবে ইহার সংজ্ঞা স্থির করা হইয়াছে?

(What is the international scale of temperature? What is its utility and how is it used to measure temperature?) (C. U. '53)

2. একটি স্থির-আয়তন হাইড্রোজেন থার্মোমিটার সংক্ষেপে বর্ণনা কর এবং ইহার সাহায্যে উষ্ণতা নির্ণয়ের কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যা কর। এই ধরণের থার্মোমিটারের সুবিধা এবং অসুবিধা কি কি?

(Briefly describe a constant volume hydrogen thermometer and explain the principle of measurement of temperature with it. What are the advantages and disadvantages of such a thermometer ?) (C. U. '51, '55, '58, '60, '63, '66, '68, '70, '72, '75)

3. একটি স্থায়ী গ্যাসকে উষ্ণতামাপক পদার্থ হিসাবে ব্যবহারের গুণাগুণ আলোচনা কর।

(Discuss the merits of using a permanent gas as thermometric substance.) (C. U. '70, '75)

4. টীকা লিখ :

(a) থার্মোমিতি

(b) তাপমাত্রার আন্তর্জাতিক স্কেল।

(Write notes on :

(a) Thermometry

(b) International scale of temperature.)

5. একটি স্থির আয়তন হাইড্রোজেন থার্মোমিটার কোন নির্দিষ্ট স্কেলে 23·5 cm, 75 cm এবং 102·4 cm চাপ নির্দেশ করিল যখন কুণ্ডটিকে যথাক্রমে তরল বায়ুতে, বরফে এবং স্টীমে ডোবানো হইল। ঐ স্থির-আয়তন হাইড্রোজেন থার্মোমিটার স্কেলে তরল বায়ুর উষ্ণতা নির্ণয় কর।

(The pressure indicated by a constant volume hydrogen thermometer are 23·5 cm, 75 cm and 102·4 cm when the bulb is immersed in liquid air, ice and steam respectively. What is the temperature of liquid air on the constant volume hydrogen scale ?) (C. U. '50) [*Ans.* $-187·95^\circ$c]

6. একটি স্থির-আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারে 0°c এবং 100°c উষ্ণতায় বায়ুর চাপ যথাক্রমে 80 cm এবং 110 cm পারদস্তম্ভ। যখন কুণ্ডকে উষ্ণ জলে ডুবানো হইল, তখন বায়ুর চাপ হইল 100 cm। উষ্ণ জলের উষ্ণতা সেলসিয়াস ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

(The pressures of air in a constant volume gas thermometer are 80 cm and 110 cm of mercury at 0°c and 100°c respectively. When the bulb is placed in some hot water, the pressure is 100 cm of mercury. Calculate the temperature of hot water in degree celsius.) (C. U. '66) [*Ans.* $66·6^\circ$c]

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

অবস্থার সমীকরণ
(Equation of State)

2.1 সূচনা (Introduction)

কোন গ্যাসের আচরণ উহার চাপ (P), উষ্ণতা (T) এবং আয়তনের (V) উপর নির্ভরশীল। নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের চাপ, উষ্ণতা এবং আয়তনের ভিতর সম্পর্কযুক্ত সমীকরণকে অবস্থার সমীকরণ (Equation of State) বলে। বয়েল ও চার্লসের সূত্রানুযায়ী কোন আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ হইল $PV=RT$। এখন কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতায় PV এবং Pকে অক্ষ ধরিয়া লেখচিত্র আঁকিলে উহা একটি সরলরেখা হইবে। যে-কোন গ্যাস বয়েলের সূত্র মানিয়া চলিলে নির্দিষ্ট উষ্ণতায় ঐ গ্যাসের (PV – P) লেখ একটি সরলরেখা হইবে এবং উহা চাপ নির্দেশকারী অক্ষের সমান্তরাল হইবে।

প্রকৃতপক্ষে $PV=RT$ সমীকরণ, খুব অল্প চাপ এবং উষ্ণতার সীমায় কার্যকারী হইয়া থাকে। বাস্তব গ্যাসের (real gas) ক্ষেত্রে উপযুক্ত সমীকরণ হইল

$$PV=A+BP+CP^2+DP^3+ \cdots \quad (2.1)$$

A, B, C, D,… প্রভৃতি ধ্রুবক গ্যাসের প্রকৃতি ও উষ্ণতার উপর নির্ভর করে। B, C, D, … ইত্যাদি ধ্রুবকের মান দ্রুত কমিয়া যায়। সুতরাং দ্বিতীয় পদটি ছাড়া অন্যান্য পদ উপেক্ষা করা যায়। নিম্ন উষ্ণতায় B-র মান ঋণাত্মক এবং উষ্ণতা বাড়িলে উহার মান অবশেষে ধনাত্মক হইয়া যায়।

2.2 বয়েলের সূত্র হইতে বিচ্যুতি (Deviations from Boyle's law)

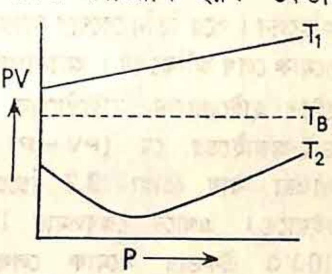
আমরা জানি কোন গ্যাস বয়েলের সূত্র মানিয়া চলিলে নির্দিষ্ট উষ্ণতায় নির্দিষ্ট ভরের সেই গ্যাসের আয়তন উহার চাপের সহিত ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়—অর্থাৎ চাপ কমিলে আয়তন বাড়ে এবং চাপ বাড়িলে আয়তন কমে। এই সূত্র কেবলমাত্র আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

রেগো (Regnault), অ্যামাগাট (Amagat), অ্যানড্রুস (Andrews) প্রমুখ বিজ্ঞানী বিভিন্ন পরীক্ষা পর্যালোচনার পর এই সিদ্ধান্তে আসেন যে কেবলমাত্র নিম্ন চাপে এবং উচ্চ উষ্ণতায় বাস্তব গ্যাস (real gas) বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে। কিন্তু সাধারণ অবস্থায় স্থায়ী গ্যাসগুলি (permanent gases)—অর্থাৎ হাইড্রোজেন, অক্সিজেন, নাইট্রোজেন প্রভৃতি গ্যাস বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে না। ঐ গ্যাসগুলির (PV – P) লেখ P-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয় না। অ্যামোনিয়া, সালফার ডাই-অক্সাইড, কার্বন ডাই-অক্সাইড ইত্যাদি গ্যাসের ক্ষেত্রে এই বিচ্যুতি আরও বেশী।

কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতায় বাস্তব গ্যাস (2.1) সমীকরণ মানিয়া চলে। কে. ওন্‌স (K. Onnes) সর্বপ্রথম (2.1) ভিরিয়াল (Virial) সমীকরণ বাহির করেন। A, B, C, D, ··· প্রভৃতি ধ্রুবককে ভিরিয়াল ধ্রুবক বলে। উহাদের মান উষ্ণতার পরিবর্তনের সহিত পরিবর্তিত হয়। নিম্নচাপে (2.1) সমীকরণ হইতে আমরা পাই,

$$PV = A = \text{ধ্রুবক} \quad \cdots \quad (2.2)$$

রেণো, অ্যামাগাট প্রমুখ বিজ্ঞানী দেখান যে (PV − P) সমোষ্ণ (isothermal) লেখগুলি কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় P অক্ষের সমান্তরাল হয়। উষ্ণতা ঐ নির্দিষ্ট উষ্ণতা অপেক্ষা কম বা বেশী হইলে (PV − P) লেখ বয়েলের সূত্রানুযায়ী হয় না। যে উষ্ণতায় (PV − P) লেখ P অক্ষের সমান্তরাল হয় তাহাকে বয়েল উষ্ণতা (Boyle Temperature) বলে। বয়েল উষ্ণতা T_B বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে বিভিন্ন। 2.1 চিত্রে বিভিন্ন উষ্ণতায় ($T_1 > T_B > T_2$) সমোষ্ণ লেখ দেখানো হইয়াছে। বয়েলের উষ্ণতা অপেক্ষা নিম্ন উষ্ণতা T_2-তে PV-র মান P বৃদ্ধি পাইলে প্রথমে হ্রাস পায় পরে বৃদ্ধি পাইতে থাকে। বয়েল উষ্ণতা অপেক্ষা উচ্চ উষ্ণতায় (T_2) PV-র মান P-এর সহিত বৃদ্ধি পায়।



চিত্র 2.1

∴ বয়েল উষ্ণতায় PV = A = ধ্রুবক

$$\frac{d}{dP}(PV) = 0 \text{ হইবে}$$

অথবা, $$\frac{d}{dP}(A + BP + CP^2 + DP^3 + \cdot) = 0$$

অর্থাৎ $$B + 2CP + 3DP^2 + \cdots = 0 \text{ হইবে}$$

নিম্ন উষ্ণতায় $P \to 0$

∴ $B = 0$

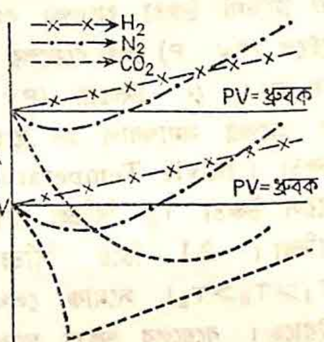
অতএব বয়েল উষ্ণতায় $B = 0$ হইবে।

2.3 রেণো এবং অ্যামাগাটের পরীক্ষার ফলাফল (Results of Regnaults' and Amagat s' experiments)

রেণো এবং অ্যামাগাট বিভিন্ন গ্যাস লইয়া বিস্তারিতভাবে পরীক্ষাকার্য সম্পন্ন করেন। এই পরীক্ষায় প্রথমে নির্দিষ্ট উষ্ণতায় নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন বিভিন্ন চাপে নির্ধারণ করা হয়। রেণোর পরীক্ষার প্রধান লক্ষ্য ছিল কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের উপর চাপ দ্বিগুণ করিলে উহার আয়তন অর্ধেক হয় কি না তাহা দেখা।

তিনি দেখিলেন যে অধিকাংশ গ্যাস ইহা মানিয়া চলে না। তিনি তাঁহার পরীক্ষা হইতে এই সিদ্ধান্তে আসিলেন যে, (PV – P) সমোষ্ণ লেখ হইতে দেখা যাইবে যে PV-র মান P বৃদ্ধি পাইলে প্রথমে হ্রাস পাইতেছে, কিন্তু পরে চাপ বৃদ্ধির সহিত বৃদ্ধি পাইতেছে। ব্যতিক্রম শুধুমাত্র হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে দেখা যায়। এক্ষেত্রে, PV-র মান P-এর সহিত বৃদ্ধি পাইবে।

অ্যামাগাটও বিভিন্ন গ্যাসের উপর চাপ প্রয়োগ করিয়া অনুরূপ পরীক্ষা করিলেন। তিনি একটি আবদ্ধ পাত্রের মধ্যে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাস লইয়া একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় কয়েক শত বায়ুমণ্ডলীয় (atmospheric) চাপ পর্যন্ত চাপ পরিবর্তন করিলেন। পরে তিনি রেণোর ন্যায় (PV – P) সমোষ্ণ লেখ আঁকিলেন। অ্যামাগাটের পরীক্ষা হইতে হাইড্রোজেন, নাইট্রোজেন ও কার্বন ডাই-অক্সাইডের যে (PV – P) লেখগুলি পাওয়া যায় তাহা 2.2 চিত্রে দেখানো হইয়াছে। এখানে কেবলমাত্র 17°C এবং 100°C উষ্ণতায় সমোষ্ণ লেখগুলি এবং উহার সহিত PV = ধ্রুবক রেখা অঙ্কন করা হইয়াছে। হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে চাপ বৃদ্ধি পাইলে PV ক্রমাগত বৃদ্ধি পায়। কিন্তু বয়েলের সূত্রানুযায়ী যে সংনম্যতা (compressibility) আশা করা যায় তাহা অপেক্ষা হাইড্রোজেনের সংনম্যতা কম। নাইট্রোজেন, কার্বন ডাই-অক্সাইড প্রভৃতির ক্ষেত্রে চাপ বৃদ্ধির সহিত PV প্রথমে কমিতে থাকে এবং এইরূপে ন্যূনতম মানে (minimum) পৌঁছায় তারপর চাপ বৃদ্ধির সহিত বাড়িতে থাকে।



চিত্র 2.2

অ্যামাগাটের পরীক্ষা হইতে প্রাপ্ত সিদ্ধান্ত :

(ক) বয়েল উষ্ণতায় প্রত্যেক গ্যাসের বয়েল সূত্র হইতে বিচ্যুতি প্রায় সমান। বয়েল উষ্ণতা গ্যাসের উপর নির্ভরশীল। এই উষ্ণতা বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে বিভিন্ন।

(খ) বাস্তব গ্যাস (real gas) উচ্চ চাপে বয়েল সূত্র মানিয়া চলে না।

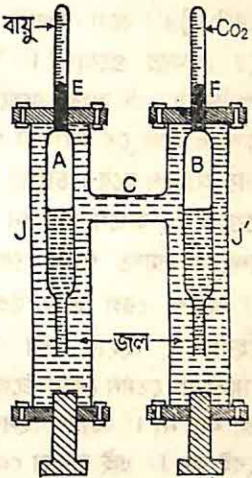
(গ) স্থায়ী গ্যাসের (permanent gases) ক্ষেত্রে বিচ্যুতি অল্প।

(ঘ) O_2, CO_2, N_2 ইত্যাদি গ্যাসের ক্ষেত্রে বয়েল সূত্র হইতে বিচ্যুতির মাত্রা বেশী।

2.4 অ্যানড্রুসের পরীক্ষা (Andrews' experiment)

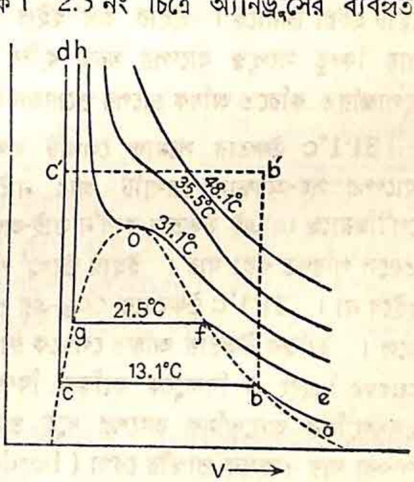
রেণো এবং অ্যামাগাটের পরীক্ষা পর্যালোচনা করিয়া দেখা গিয়াছে যে সমস্ত গ্যাস সহজে তরল করা যায়, তাহাদের ক্ষেত্রে বয়েল সূত্র হইতে বিচ্যুতির মাত্রা অনেক বেশী। ইহা হইতে এই সিদ্ধান্তে উপস্থিত হওয়া যায় যে গ্যাসের তরলীভবন এবং

বয়েল সূত্র হইতে উহার বিচ্যুতি, ইহাদের ভিতর একটি সম্পর্ক বিদ্যমান। ইহার জন্য অ্যানড্রুস কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসকে বিভিন্ন উষ্ণতায় রাখিয়া চাপের সহিত উহার আয়তন পরিবর্তন লক্ষ্য করিলেন এবং বিভিন্ন উষ্ণতায় CO_2-এর সমোষ্ণ লেখ অঙ্কিত করিলেন।



চিত্র 2.3

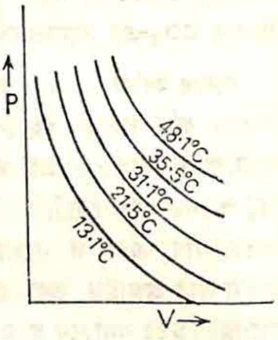
যন্ত্রের বর্ণনা : A ও B দুইটি পুরু দেওয়াল-বিশিষ্ট কাঁচ নল। ইহাদের একপ্রান্ত বন্ধ এবং অপর প্রান্ত খোলা। এই নলের উপরের অংশ খুব সরু ও নিম্ন অংশ মোটা। A নলের সরু অংশের ভিতর বায়ু এবং B নলের সরু অংশের ভিতর কার্বন ডাই-অক্সাইড ভরা হয়। দুই নলের সরু অংশের ভিতর যথাক্রমে E ও F পারদ সূচক থাকে। J এবং J' দুইটি ইস্পাতের জ্যাকেট নল যাহা জলপূর্ণ থাকে। এই নল দুইটি C নল দ্বারা যুক্ত। P ও P' স্ক্রু-পিস্টনের সাহায্যে জলে চাপ প্রয়োগ করা হয়। A নলের সরু অংশ স্থির উষ্ণতা জলগাহ (water-bath) দ্বারা এবং B নলের সরু অংশ অপর আরেকটি জলগাহ (যাহার তাপমাত্রা 0°C হইতে 100°C পর্যন্ত পরিবর্তিত করা যায়) দ্বারা বেষ্টিত থাকে। 2.3 নং চিত্রে অ্যানড্রুসের ব্যবহৃত যন্ত্রটি দেখানো হইয়াছে।



চিত্র 2.4(a)

কার্যপ্রণালী : প্রথমে P এবং P' স্ক্রু-পিস্টন ঘুরাইয়া নলের মধ্যস্থিত গ্যাসের চাপ বৃদ্ধি করা হয়। যেহেতু বায়ু বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে, অতএব $P=\frac{RT}{V}$ সমীকরণ হইতে বায়ুর চাপ নির্ণয় করা যাইবে। কার্বন ডাই-অক্সাইডের চাপ বায়ুর চাপের সমান হইবে। এইভাবে বায়ুর চাপ হইতে কার্বন ডাই-অক্সাইডের উপর প্রযুক্ত চাপ পাওয়া যাইবে। অতঃপর কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসকে বিভিন্ন উষ্ণতায় রাখিয়া উপরি-উক্ত পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করা হয়। এইরূপে প্রাপ্ত বিভিন্ন উষ্ণতায় কার্বন ডাই-অক্সাইডের চাপ ও আয়তনের মানগুলি লইয়া (P − V) সমোষ্ণ লেখ আঁকা হয়। 2.4(a) চিত্রে কার্বন ডাই-অক্সাইডের সমোষ্ণ লেখ এবং 2.4(b) চিত্রে বায়ুর সমোষ্ণ লেখ দেখানো হইয়াছে।

লেখচিত্রের আলোচনা : 48·1°C নির্দিষ্ট উষ্ণতায় সমোষ্ণ লেখ একটি পরাবৃত্ত (hyperbola) হইবে। বায়ুর ক্ষেত্রেও অনুরূপ লেখ পাওয়া যায় [চিত্র 2.4(b)]। অন্য কথাও বলা যায় যে বয়েল সূত্র এক্ষেত্রে প্রযোজ্য। কিন্তু 13·1°C সমোষ্ণ লেখচিত্রের *ab* অংশ বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে। কিন্তু *b* বিন্দুতে আসিয়া গ্যাসটি সংপৃক্ত বাষ্পের ন্যায় আচরণ করে। চাপের কোন পরিবর্তন না হওয়া সত্ত্বেও *bc* অংশে আয়তন দ্রুত কমিয়া যায়। *c* বিন্দুতে সমস্ত গ্যাস তরলে রূপান্তরিত হইবে। *bc* অংশে তরল এবং উহার বাষ্প সহ-অবস্থানে রহিয়াছে। ইহার পর চাপ বৃদ্ধি করিলেও আয়তনের তেমন কোন উল্লেখযোগ্য পরিবর্তন লক্ষ্য করা যায় না। কারণ হিসাবে বলা যায় যে তরলের সংনম্যতা (compressibility) খুবই কম। এই অবস্থা *cd* অংশ হইতে পাওয়া যায়। লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে বায়ুর ক্ষেত্রে 13·1°C-এর সমোষ্ণ লেখ তখনও পরাবৃত্ত।



চিত্র 2.1(b)

পুনরায় 21·5°C সমোষ্ণ লেখটি যদি লক্ষ্য করা যায় তবে দেখা যাইবে উহা *abcd* লেখেরই অনুরূপ। শুধু বাষ্প এবং তরলের সহ-অবস্থান রেখা *fg* পূর্বের তুলনায় ছোট হইয়া গিয়াছে। ইহার অর্থ হইল উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইলে তরলের ঘনত্ব হ্রাস পায় কিন্তু সংপৃক্ত বাষ্পের ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। উচ্চ উষ্ণতার কোন গ্যাসকে তরলে রূপান্তরিত করিতে অধিক চাপের প্রয়োজন হয়।

31·1°C উষ্ণতার সমোষ্ণ লেখটি লক্ষ্য করিলে বোঝা যায় যে, এখানে তরল বাষ্পের সহ-অবস্থান রেখাটি আর নাই। উহা একটি বিন্দু o-তে আসিয়া পৌঁছিয়াছে। এই উষ্ণতায় কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসকে শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগ করিয়া তরলে পরিণত করা যায়। ইহার ঊর্ধ্বে শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগ করিলে ঐ গ্যাস তরল হইবে না। 31·1°C উষ্ণতাকে CO_2-এর ক্রান্তিক উষ্ণতা (critical temperature) বলে। ক্রান্তিক উষ্ণতায় অঙ্কিত লেখকে ক্রান্তিক সমোষ্ণ লেখ (critical isothermal curve) এবং o বিন্দুকে ক্রান্তিক বিন্দু (critical point) বলা হয়। সমোষ্ণ লেখগুলির অনুভূমিক অংশের দুই প্রান্ত সংযোগ করিলে যে রেখা (*bfogc*) পাওয়া যায় তাহাকে প্রান্তীয় রেখা (border curve) বলা হয়।

2.5 সঙ্কট ধ্রুবক বা ক্রান্তিক স্থিরাংক (Critical Constant)

প্রত্যেক পদার্থেরই তিনটি ধ্রুবক থাকে। উহাদের সঙ্কট ধ্রুবক বলে। যথা,

(ক) **ক্রান্তিক উষ্ণতা (T_c) :** কোন পদার্থের ইহা এমন একটি বিশেষ উষ্ণতা যে গ্যাসীয় অবস্থায় ঐ উষ্ণতায় বা উহার নিচে কেবলমাত্র চাপ প্রয়োগ করিয়াই

গ্যাসকে তরলে পরিণত করা যায়। কিন্তু উষ্ণতা ক্রান্তিক উষ্ণতা অপেক্ষা বেশী হইলে যে-কোন পরিমাণ চাপ প্রয়োগ করিলেও উহা তরলে রূপান্তরিত হইবে না।

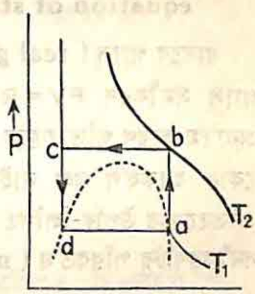
(খ) ক্রান্তিক চাপ (P_c) : ক্রান্তিক উষ্ণতায় কোন গ্যাসকে তরলীভূত করিতে যে ন্যূনতম চাপ প্রয়োগ করিতে হয় তাহাকে ক্রান্তিক চাপ বলে।

(গ) ক্রান্তিক আয়তন (V_c) : ক্রান্তিক উষ্ণতা এবং ক্রান্তিক চাপে এক গ্রাম পদার্থের আয়তনকে বলা হয় ক্রান্তিক আয়তন।

2.6 অবস্থার অনবচ্ছেদ (Continuity of state)

অ্যানড্রুসের পরীক্ষা হইতে আমরা দেখিয়াছি যে কোন বাষ্প যখন তরলীভূত হয় তখন উহাকে বাষ্প-তরল সহ-অবস্থান অঞ্চল (bc) অতিক্রম করিতে হয়। কিন্তু কোন বাষ্প যদি সরাসরি তরলে পরিণত হয় তখন তাহাকে অবস্থার অনবচ্ছেদ বলে। অর্থাৎ, পদার্থের অবস্থার পরিবর্তনের কোন স্তরেই অবচ্ছেদ (discontinuity) হইবে না।

2.5 চিত্রে দুইটি সমোষ্ণ লেখ T_1 এবং T_2 দেখানো হইয়াছে। T_1 সমোষ্ণ লেখতে ad অংশ হইল তরল-বাষ্পের সহ-অবস্থান অঞ্চল। এখন মনে করি পদার্থটি a বিন্দুতে আছে। উহার আয়তন স্থির রাখিয়া উষ্ণতা T_1 হইতে T_2-তে বৃদ্ধি করা হইল। ইহার ফলে চাপ বর্ধিত হইয়া b বিন্দুতে পেঁছাইল। T_2 উষ্ণতা ক্রান্তিক উষ্ণতা অপেক্ষা বেশী হওয়ায় b বিন্দু পদার্থের গ্যাসীয় অবস্থা বুঝাইতেছে। এখন চাপ স্থির রাখিয়া উষ্ণতা T_2 হইতে T_1-এ হ্রাস করিলে আয়তন সংকুচিত হইয়া c বিন্দুতে পেঁছাইবে। c বিন্দু T_1 সমোষ্ণ লেখ-র উপর অবস্থিত বলিয়া উহা পদার্থের তরল অবস্থা বুঝাইতেছে। c বিন্দুতে আসার পর উষ্ণতা স্থির রাখিয়া চাপ এমনভাবে হ্রাস করা হইল যাহাতে উহা d বিন্দুতে পেঁছায়। সুতরাং a হইতে d বিন্দুতে যাইতে যদি আমরা $abcd$ পথ অবলম্বন করি তবে তরল-বাষ্পের সহ-অবস্থান অঞ্চল ad-কে এড়ানো যাইবে।



চিত্র 2.5

2.7 ক্রান্তিক বিন্দুতে কোন পদার্থের আচরণ (Behaviour of a substance near its critical point)

ক্রান্তিক বিন্দুর নিকট পদার্থের নিম্নলিখিত ধর্মগুলি পরিলক্ষিত হয় :

(ক) ক্রান্তিক বিন্দুতে কোন তরলের এবং উহার বাষ্পের সকল ধর্ম বর্তমান।

(খ) ঐ বিন্দুতে তরল-বাষ্পের বিভেদ তল অদৃশ্য হয়। ইহার কারণ হিসাবে বলা যায় ঐ বিন্দুতে পৃষ্ঠ-টান অবলুপ্তি পায়।

(গ) ক্রান্তিক উষ্ণতায় তরল ও বাষ্পের ঘনত্ব সমান হয়।

(ঘ) এই উষ্ণতায় জলের বাষ্পায়নের লীন তাপ শূন্য হয়।

2.8 গ্যাস ও বাষ্পের ভিতর পার্থক্য (Difference between Gas and Vapour)

(1) কোন পদার্থের উষ্ণতা উহার ক্রান্তিক উষ্ণতার ঊর্ধ্বে থাকিলে সেই পদার্থকে গ্যাস বলা হয় এবং ক্রান্তিক উষ্ণতার নিম্নে উহাকে বাষ্প বলা হয়। আমরা অ্যানড্রুসের পরীক্ষা হইতে দেখিয়াছি যে CO_2-এর ক্রান্তিক উষ্ণতা হইল 31·1°C। কাজেই CO_2-এর উষ্ণতা 31·1°C অপেক্ষা কম হইলে উহাকে কার্বন ডাই-অক্সাইড বাষ্প এবং বেশী হইলে উহাকে কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাস বলিব।

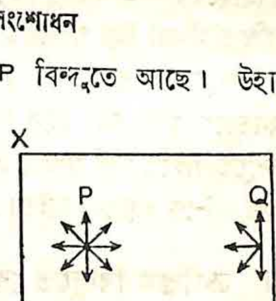
(2) বাষ্পকে শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগ করিলে উহা তরলে পরিণত হয়। কিন্তু গ্যাসকে তরলে পরিণত করিতে হইলে উহার উষ্ণতা ক্রান্তিক উষ্ণতার নিচে আনিতে হইবে। তারপর চাপ প্রয়োগে উহা তরলে পরিণত হইবে।

2.9 ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌স-এর অবস্থার সমীকরণ (Van der Waals' equation of state)

বাস্তব গ্যাস (real gas) সম্পূর্ণভাবে বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে না। আদর্শ গ্যাস সমীকরণ PV=RT বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়। এই বিচ্যুতির অন্যতম কারণ গতিতত্ত্বের মূল অঙ্গীকার দুইটি : (i) গ্যাস অণুগুলির পারস্পরিক কোন আকর্ষণ বল নাই এবং (ii) অণুগুলি বিন্দুভর। ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌স গতিতত্ত্বের উপরি-লিখিত মূল অঙ্গীকারদ্বয়কে সংশোধন করেন এবং আদর্শ গ্যাস সমীকরণটির পরিবর্তন (modification) করেন।

(i) গ্যাস অণুগুলির পারস্পরিক আকর্ষণের জন্য সংশোধন

মনে করি, একটি অণু XY পাত্রের মধ্যবর্তী অঞ্চল P বিন্দুতে আছে। উহার পার্শ্ববর্তী অণুসমূহের দ্বারা চতুর্দিক হইতে উহা সমভাবে আকর্ষিত হয়। সুতরাং ঐ অণুর উপর লব্ধি বল শূন্য হইবে। কিন্তু Q বিন্দুতে যে অণুটি দেওয়ালে আঘাত করিতেছে তাহা শুধু পশ্চাদ্‌বর্তী অণুসমূহের (চিত্র 2.6(a)) দ্বারা আকর্ষিত হইতেছে। সুতরাং আন্তরাণবিক আকর্ষণ না থাকিলে উহা যে ভরবেগ লইয়া পাত্রের দেওয়ালে আঘাত করিত এক্ষেত্রে তাহা অপেক্ষা ভরবেগ কম হইবে। অর্থাৎ, প্রাপ্ত চাপ প্রকৃত চাপ অপেক্ষা কম হইবে।



চিত্র 2.6(a)

প্রকৃত চাপ = প্রাপ্ত চাপ (P) + চাপ হ্রাস (p)

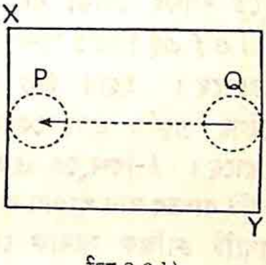
এখন চাপ হ্রাস $p \propto \frac{1}{V^2}$ যেখানে V = পাত্রের আয়তন

$\therefore$ $p = \frac{a}{V^2}$; a হইল একটি ধ্রুবক

$\therefore$ প্রকৃত চাপ, $P' = P + \frac{a}{V^2}$ ।

(ii) অণুগুলির পরিমেয় আয়তনের জন্য সংশোধন

গ্যাস অণুগুলির নির্দিষ্ট আয়তন আছে। অতএব কোন গ্যাসকে পাত্রের মধ্যে রাখিলে উহা কিছুটা আয়তন অধিকার করিয়া থাকিবে। চিত্র 2.6(b) হইতে আমরা সহজেই বুঝিতে পারি যে অণুগুলির কার্যকরী আয়তন (effective volume) পাত্রের মোট আয়তন অপেক্ষা কম।



চিত্র 2.6 b)

$\therefore$ কার্যকরী আয়তন $V' = V - b$ যেখানে b হইতেছে অণুগুলির আয়তন সম্পর্কিত ধ্রুবক।

শোধিত গ্যাস সমীকরণ (Corrected gas equation)

উপরি-উক্ত শোধন করিলে প্রকৃত গ্যাসের সমীকরণ হইবে

$$P'V' = RT$$

অর্থাৎ $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

এই সমীকরণটি ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ নামে পরিচিত। a এবং b-কে ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের ধ্রুবক বলা হয়।

2.10 ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌স সমীকরণের লৈখিক ব্যাখ্যা (Graphical interpretation of Van der Waals' equation)

ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ হইল

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

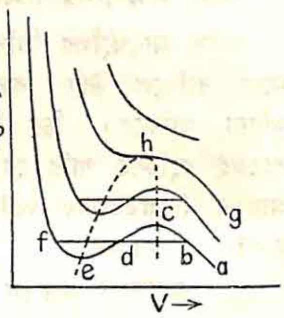
অথবা, $PV + \frac{a}{V} - bP - \frac{ab}{V^2} = RT$

অথবা, $PV^3 + aV - bPV^2 - ab = RTV^2$

অথবা, $PV^3 - (bP + RT)V^2 + aV - ab = 0$

অথবা, $V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0$

ইহা V-এর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। সুতরাং P-এর একটি মানের জন্য V-এর তিনটি মান পাওয়া যাইবে। কোন গ্যাসের a এবং b-র মান জানা থাকিলে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় V-এর মান নির্ণয় করা যায়। ঐ মানগুলি হইতে (P – V) সমোষ্ণ লেখ পাওয়া যাইবে। ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত ঐ সব লেখ-কে ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের লেখ বলা হয়। CO_2-এর ক্ষেত্রে ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমোষ্ণ লেখ 2.7 চিত্রে দেখানো হইয়াছে। অ্যানড্রুসের পরীক্ষালব্ধ সমোষ্ণ রেখার সহিত ইহার যথেষ্ট সাদৃশ্য আছে। কেবলমাত্র $b\ c\ d\ e\ f$ রেখাটি অনুভূমিক নয়। 2.7 চিত্র হইতে স্পষ্টই বোঝা যায় যে একটি চাপের জন্য b, d ও f এই তিনটি বিন্দু তিনটি আয়তন নির্দেশ করিতেছে। ইহার উচ্চ উষ্ণতায় সমোষ্ণ রেখাগুলির প্রকৃতি এবং কেবলমাত্র $b\ f$ দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্র হইয়াছে। h-বিন্দুতে একটি চাপের জন্য V-এর একটি বাস্তব মান পাওয়া যায়। অতএব $g\ h$ সমোষ্ণ রেখাটি ক্রান্তিক সমোষ্ণ লেখ নির্দেশ করিতেছে। ইহার ঊর্ধ্ব উষ্ণতার সমোষ্ণ রেখাগুলি পরীক্ষালব্ধ লেখচিত্রের অনুরূপ। 2.7 চিত্রে $b\ c$ অংশ অতিসংপৃক্ত বাষ্প (super-saturated vapour), $f\ e$ অংশ অতি তপ্ত তরল (super-heated liquid) এবং $e\ d\ c$ অংশ চাপ বৃদ্ধির সহিত আয়তন বৃদ্ধি অর্থাৎ উত্তোলন (bumping) নির্দেশ করিতেছে। সুতরাং বাস্তব গ্যাসের আচরণ মোটামুটি ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।



চিত্র 2.7

2.11 ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের ধ্রুবকের সাপেক্ষে ক্রান্তিক স্থিরাংকের মান নির্ণয় (Calculation of critical constants in terms of the constants of Van der Waals)

(a) প্রথম পদ্ধতি (First method) :

ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ হইল

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \qquad \cdots \qquad (2.1)$$

এই সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়

$$V^3-\left(b+\frac{RT}{P}\right)V^2+\frac{a}{P}V-\frac{ab}{P}=0 \qquad \cdots \qquad (2.2)$$

একই উষ্ণতা ও চাপে (2.2) সমীকরণ V-এর একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। অর্থাৎ P এবং T-এর কোন একটি নির্দিষ্ট মানে V-এর তিনটি মান বা মূল (roots) পাওয়া যাইবে। আমরা জানি ক্রান্তিক বিন্দুতে তিনটি মানই সমান। মনে করি, V_c, P_c এবং T_c যথাক্রমে ক্রান্তিক আয়তন, ক্রান্তিক চাপ এবং ক্রান্তিক উষ্ণতা।

ক্রান্তিক বিন্দুতে $V = V_c$

অথবা, $V - V_c = 0$

অথবা, $(V - V_c)^3 = 0$

অথবা, $V^3 - 3V^2 V_c + 3V V_c^2 - V_c^3 = 0$ ... (2.3)

সমীকরণ (2.2) এবং (2.3) হইতে V^3, V^2, V এবং ক্রান্তিক রাশিগুলি তুলনা করিলে পাই

$$3V_c = b + \frac{RT_c}{P_c} \quad \cdots \quad (2.4)$$

$$3V_c^2 = \frac{a}{P_c} \quad \cdots \quad (2.5)$$

$$V_c^3 = \frac{ab}{P_c} \quad \cdots \quad (2.6)$$

(2.5) এবং (2.6) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই,

$$\frac{V_c^3}{3V_c^2} = \frac{ab}{P_c} \times \frac{P_c}{a}$$

$$\therefore \quad V_c = 3b \quad \cdots \quad (2.7)$$

(2.5) সমীকরণে V_c-এর মান বসাইয়া পাই,

$$3\,(3b)^2 = \frac{a}{P_c}$$

$$\therefore \quad P_c = \frac{a}{27b^2} \quad \cdots \quad (2.8)$$

এখন (2.4) সমীকরণে V_c ও P_c-এর মান বসাইয়া পাই,

$$3 \times 3b = b + \frac{RT_c}{a} \times 27b^2 = b + \frac{27b^2R}{a}\,T_c$$

অথবা, $\frac{27b^2R}{a}\,T_c = 8b$

$$\therefore \quad T_c = \frac{8a}{27bR} \quad \cdots \quad (2.9)$$

(b) দ্বিতীয় পদ্ধতি (Second method)

ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ হইল

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

অথবা, $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ ... (2.10)

এখন, 2.7 চিত্রের চরম ও অবমের সঞ্চারপথ (locus of maxima and minima) অর্থাৎ $c\,h\,e$ রেখাটির সমীকরণ পাইতে হইলে $\frac{dP}{dV} = 0$ হইবে। আবার ক্রান্তিক বিন্দু h-এ $\frac{d^2P}{dV^2} = 0$ হইবে।

(2.10) সমীকরণকে V-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$\frac{dP}{dV}=-\frac{RT}{(V-b)^2}+\frac{2a}{V^3} \quad \cdots \quad (2.11)$$

অথবা, $$\frac{d^2P}{dV^2}=\frac{2RT}{(V-b)^3}-\frac{6a}{V^4} \quad \cdots \quad (2.12)$$

∴ যখন $V=V_c$, $P=P_c$ এবং $T=T_c$ হইবে, তখন $\frac{dP}{dV}=0$

এবং $\frac{d^2P}{dV^2}=0$ হইবে

অতএব সমীকরণ (2.10), (2.11) এবং (2.12) হইতে পাই

$$P_c=\frac{RT_c}{V_c-b}-\frac{a}{V_c^2} \quad \cdots \quad (2.13)$$

$$0=-\frac{RT_c}{(V_c-b)^2}+\frac{2a}{V_c^3} \quad \cdots \quad (2.14)$$

$$0=\frac{2RT_c}{(V_c-b)^3}-\frac{6a}{V_c^4} \quad \cdots \quad (2.15)$$

সমীকরণ (2.4) লেখা যায়

$$\frac{RT_c}{(V_c-b)^2}=\frac{2a}{V_c^3} \quad \cdots \quad (2.16)$$

এবং সমীকরণ (2.15) লেখা যায়

$$\frac{2RT_c}{(V_c-b)^3}=\frac{6a}{V_c^4} \quad \cdots \quad (2.17)$$

সমীকরণ (2.16) কে সমীকরণ (2.17) দ্বারা ভাগ করিলে আমরা পাই

$$\frac{V_c-b}{2}=\frac{V_c}{3}$$

অথবা, $$3V_c-3b=2V_c$$

$$\therefore \quad V_c=3b$$

আবার (2.16) সমীকরণে $V_c=3b$ বসাইয়া পাই

$$\frac{RT_c}{(2b)^2}=\frac{2a}{(3b)^3}$$

অথবা, $$\frac{RT_c}{4b^2}=\frac{2a}{27b^3}$$

$$\therefore \quad T_c=\frac{2a}{27b^3}\times\frac{4b^2}{R}=\frac{8a}{27bR}$$

পুনরায় (2.13) সমীকরণে V_c এবং T_c এর মান বসাইয়া পাই

$$P_c = \frac{R\frac{8a}{27bR}}{3b-b} - \frac{a}{(3b)^2}$$

$$= \frac{8a}{27b \times 2b} - \frac{a}{9b^2}$$

$$= \frac{a}{27b^2}$$

2.12 ক্রান্তিক স্থিরাংকের সাপেক্ষে ভ্যান্ ডার ওয়াল্স ধ্রুবকের মান নির্ণয় (Calculation of Van der Waals' constants in terms of critical cor stants)

আমরা জানি,

$$V_c = 3b$$

$$P_c = \frac{a}{27b^2}$$

$$T_c = \frac{8a}{27bR}$$

সুতরাং $\frac{T_c^2}{P_c} = \frac{64a^2}{(27)^2R^2b^2} \times \frac{27b^2}{a} = \frac{64a}{27R^2}$

$$\therefore \quad a = \frac{27}{64}\frac{R^2T_c^2}{P_c}$$

আবার, $\frac{T_c}{P_c} = \frac{8a}{27bR} \times \frac{27b^2}{a} = \frac{8b}{R}$

$$\therefore \quad b = \frac{RT_c}{8P_c}$$

2 13 ক্রান্তিক গুণাঙ্ক (Critical coefficient)

যে কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে $\frac{RT_c}{P_cV_c}$ একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবককে ক্রান্তিক গুণাংক বলে।

আমরা জানি, $V_c = 3b$

$$P_c = \frac{a}{27b^2}$$

$$T_c = \frac{8a}{27bR}$$

$$\therefore \quad \frac{RT_c}{P_cV_c} = \frac{R \times 8a}{27bR} \times \frac{27b^2}{3ab} = \tfrac{8}{3} = 2{\cdot}67 \cdots$$

বিভিন্ন গ্যাসের ক্ষেত্রে ক্রান্তিক গুণাঙ্কের যে মান পাওয়া যায় তাহা 3 হইতে 5 এর মধ্যে থাকে।

2.14 ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ হইতে বয়েল উষ্ণতা (Boyle temperature from Van der Waals' equation)

ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ হইতে আমরা জানি,

$$P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

অথবা, $$PV=\frac{RTV}{V-b}-\frac{a}{V}$$

বয়েল উষ্ণতায় $T=T_B$

$$\therefore\quad RT_B=\frac{RT_BV}{V-b}-\frac{a}{V} \qquad [\because\ PV=RT_B]$$

অথবা, $$RT_B\left(1-\frac{V}{V-b}\right)=-\frac{a}{v}$$

অথবা, $$RT_B=\frac{(V-b)a}{Vb}$$

$$=\frac{a}{b} \quad [\because\ b \text{ ক্ষুদ্র, } V-b\approx V]$$

$$\therefore\quad T_B=\frac{a}{bR}$$

আবার আমরা জানি, $T_c=\dfrac{8a}{27bR}$

$$T_c=\frac{8}{27}T_B$$

অথবা, $$T_B=\frac{27}{8}T_c$$

2.15 অবস্থার সমানীত সমীকরণ (Reduced equation of state)

মনে করি, $P=\pi P_c$, $T=\theta T_c$ এবং $V=\phi V_c$

এখন ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ হইল

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

উপরি-উক্ত সমীকরণে P, V এবং T এর মান বসাইয়া পাই

$$\left(\pi P_c+\frac{a}{\phi^2V_c^2}\right)(\phi V_c-b)=R\theta T_c$$

কিন্তু $V_c = 3b$, $P_c = \frac{a}{27b^2}$ এবং $T_c = \frac{8a}{27bR}$

$$\therefore \left(\pi \frac{a}{27b^2} + \frac{a}{\phi^2 9b^2}\right)(\phi.3b \times b) = R\theta.\frac{8a}{27bR}$$

অথবা, $\frac{a}{27b^2}\left(\pi + \frac{3}{\phi^2}\right) 3b\left(\phi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8a\theta}{27b}$

অথবা, $\left(\pi + \frac{3}{\phi^2}\right)\left(\phi - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\theta$

এই সমীকরণকে অবস্থার সমানীত সমীকরণ বলা হয়। উপরি-উক্ত সমীকরণে ধ্রুবক a, b ও R অনুপস্থিত থাকায় আমরা বলিতে পারি, এই সমীকরণ গ্যাসের বিশেষ কোন ধর্মের উপর নির্ভরশীল নয়। সেইজন্য ইহা সকল গ্যাসের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। π, θ এবং ϕ কে যথাক্রমে সমানীত চাপ (reduced pressure), সমানীত উষ্ণতা (reduced temperature) এবং সমানীত আয়তন (reduced volume) বলা হয়।

2.16 অনুরূপ অবস্থার সূত্র (Law of corresponding state)

দুইটি গ্যাসের সমানীত চাপ (π) ও আয়তন (ϕ) যদি সমান হয় তবে উহাদের সমানীত উষ্ণতার (θ) মানও সমান হইবে। ইহাই অনুরূপ অবস্থার সূত্র।

2.17 ভ্যান্ ডার ওয়াল্স সমীকরণের ত্রুটি (Defects of Van der Waals' equation)

(a) ক্রান্তিক বিন্দুর নিচে ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমোষ্ণ লেখগুলির সহিত অ্যানড্রুসের পরীক্ষালব্ধ লেখগুলির যথেষ্ট পার্থক্য পরিলক্ষিত হয়।

(b) ভ্যান্ ডার ওয়াল্স ধ্রুবক a এবং b-এর মান বিভিন্ন পদার্থের ক্ষেত্রে বিভিন্ন। উহাদের মান আবার উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল।

(c) ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ অনুযায়ী b-এর মান $\frac{V_c}{3}$ কিন্তু পরীক্ষালব্ধ মান হইল $\frac{V_c}{2}$।

(d) ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ অনুযায়ী b-এর মান অণুগুলির মোট আয়তনের 4 গুণ কিন্তু বাস্তবে ইহা 5-6 গুণ (প্রায়) হইবে।

(e) এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত বয়েল তাপমাত্রা $T_B = \frac{27}{8} T_c = 3{\cdot}375\ T_c$ কিন্তু হিলিয়ামের ক্ষেত্রে $T_B = 3{\cdot}65\ T_c$ এবং অন্যান্য গ্যাসের ক্ষেত্রে উহার মান $3{\cdot}3\ T_c$ এর নিচে।

(f) ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত ক্রান্তিক গুণাঙ্কের মান 2·67 হওয়া উচিত। কিন্তু বিভিন্ন গ্যাসের বেলায় উহার মান 3 হইতে 5 এর মধ্যে থাকে।

উদাহরণ (Example)

1. প্রমাণ উষ্ণতায় চাপ ও আয়তনের একক যথাক্রমে 1 বায়ুচাপ ও 1 c.c. হইলে কার্বন ডাই-অক্সাইডের ক্রান্তিক উষ্ণতা কত হইবে ? দেওয়া আছে, $a = 0{\cdot}00717$ বায়ুচাপ এবং $b = 0{\cdot}00191$ c.c. ।

(If the units of pressure and volume are 1 atmosphere and 1 c.c. respectively, calculate the critical temperature of CO_2 gas. Given $a = 0{\cdot}00717$ atm and $b = 0{\cdot}00191$ c.c.)

আমরা জানি ভ্যান্ ডার ওয়াল্‌সের সমীকরণ হইল,

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{0{\cdot}00717}{1^2}\right)(1 - 0{\cdot}00191) = R \times 273$$

$$\therefore \quad R = \frac{1{\cdot}00717 \times 0{\cdot}99909}{273}$$

এখন $T_c = \dfrac{8a}{27bR}$

$$= \frac{8}{27} \times \frac{0{\cdot}00717}{0{\cdot}00191} \times \frac{273}{1{\cdot}00717 \times 0{\cdot}99909}$$

$= 30{\cdot}2^\circ C$ ।

প্রশ্নমালা (Questions)

1. বাস্তব গ্যাস বয়েল সূত্র মানিয়া চলে না কেন ?

(Why do real gases not obey Boyle's law ?) (C. U. '48)

2. উচ্চ চাপে কার্বন ডাই-অক্সাইড, নাইট্রোজেন ও হাইড্রোজেন গ্যাসের আচরণ ব্যাখ্যা কর। উচ্চ চাপে বয়েল সূত্র কতটা প্রযোজ্য তাহা আলোচনা কর।

(Explain the behaviour of carbon di-oxide, nitrogen and hydrogen under high pressures. Discuss the validity of Boyle's law for high pressures.) (C. U.' 53)

3. উচ্চ চাপে বয়েল সূত্রের উপর রেণো এবং অ্যামাগাটের পরীক্ষার বিবরণ দাও। ঐ পরীক্ষার সিদ্ধান্তগুলি উল্লেখ কর।

(Give an account of Regnault's and Amagat's experiments on Boyle's law at high pressure. Mention the conclusions drawn from the experiments.) (C. U. '59)

4. ভ্যান্ ডার ওয়াল্সের সমীকরণ লিখ এবং উহা ব্যাখ্যা কর। এই সমীকরণের ধ্রুবকগুলির সঙ্গে ক্রান্তিক স্থিরাংকগুলির সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(State and explain Van der Waals' equation. Calculate the critical constants in terms of the constants of the equation.)

(C. U. '69)

5. বাস্তব গ্যাসের আচরণ আলোচনা কর। ভ্যান্ ডার ওয়াল্স কিরূপে এইরূপ আচরণের ব্যাখ্যা করিয়া বাস্তব গ্যাসের অবস্থার একটি সমীকরণ বাহির করিয়াছিলেন ? তাহার প্রচেষ্টা কতদূর সাফল্যমণ্ডিত হইয়াছিল ?

(Discuss the behaviour of real gases. How did Van der Waals' account for the behaviour and deduce an equation of state for the real gases ? How far he was successful in his attempt ?)

(C. U. '79)

6. কার্বন ডাই-অক্সাইডের সমোষ্ণ লেখ সম্পর্কিত অ্যানড্রুসের পরীক্ষার সংক্ষিপ্ত বিবরণ দাও। এই পরীক্ষা হইতে যে সকল সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায়, তাহা উল্লেখ কর।

গ্যাসের ক্রান্তিক স্থিরাংকগুলির সংজ্ঞা লিখ এবং উহাদের গুরুত্ব ব্যাখ্যা কর।

(Give a brief account of Andrews' experiment on the isothermals of carbon di-oxide. Mention the conclusion drawn from the experiment.

Define the critical constants of a gas and explain their importance.) (C. U. '80)

7. প্রমাণ উষ্ণতায় চাপ ও আয়তনের একক যথাক্রমে 1 অ্যাটমস্ফিয়ার ও 1 c. c. হইলে CO_2 গ্যাসের ক্রান্তিক উষ্ণতা কত হইবে ? দেওয়া আছে, $a=0{\cdot}00874$ atm এবং $b=0{\cdot}0023$ c.c.।

(If the units of pressure and volume are 1 atm and 1 c. c. respectively, then what will be the critical temperature of CO_2 gas ? Given $a=0{\cdot}00874$ atm and $b=0{\cdot}0033$ c.c.) [Ans. 32·5°C]

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

গ্যাসের গতিতত্ত্ব

(Kinetic Theory of Gases)

3.1 সূচনা (Introduction)

ডেভী, জুল, রামফোর্ড প্রমুখ বিজ্ঞানী বিভিন্ন পরীক্ষার দ্বারা প্রমাণ করিয়াছেন যে তাপ একপ্রকার শক্তি এবং পদার্থ কণিকার গতির জন্যই তাপের উদ্ভব হয়। বস্তুর এই গতির প্রকৃতি এবং তাপের সহিত উহার সম্পর্ক পদার্থের গতিতত্ত্ব (Kinetic Theory of Matter) হইতে পাওয়া যায়।

পদার্থের গতিতত্ত্ব অনুসারে যে কোন বস্তুই অসংখ্য অণুর সমষ্টি। এই অণুগুলি অবিরাম গতিশীল অবস্থায় থাকে। উষ্ণতা বৃদ্ধি হইলে উহাদের গতিশক্তি বাড়ে। কঠিন পদার্থের অণুগুলি খুবই ঘন সন্নিবিষ্ট থাকায় সংসক্তি বল প্রভূত হয়। ইহার ফলে কঠিন পদার্থের নির্দিষ্ট আকার এবং আয়তন থাকে। তরল পদার্থের অণুগুলির পারস্পরিক সংসক্তি বল অপেক্ষাকৃত কম হওয়ায় ইহাদের নির্দিষ্ট আকার থাকে না কিন্তু আয়তন থাকে। গ্যাসের অণুগুলি স্বাধীনভাবে চলাচল করিতে পারে কারণ ইহাদের অণুগুলির মধ্যে সংসক্তি বল একেবারে নাই বলিলেই চলে। তাই, গ্যাসীয় পদার্থের নির্দিষ্ট কোন আকার বা আয়তন নাই।

1730 খৃষ্টাব্দে বার্ণোলী সর্বপ্রথম গ্যাসের গতীয় তত্ত্ব দ্বারা গ্যাসের সূত্রাবলী ব্যাখ্যা করেন। পরে ক্লসিয়াস্, ম্যাক্সওয়েল, বোলজ্‌ম্যান প্রমুখ বিজ্ঞানী গ্যাসের গতীয় তত্ত্বের প্রভূত উন্নতি সাধন করেন। এই অধ্যায়ে আমরা গ্যাসের গতিতত্ত্ব সম্পর্কে কিছু আলোচনা করিব।

3.2 আদর্শ গ্যাসের গতিতত্ত্বের মূল অঙ্গীকার (Fundamental assumptions in kinetic theory of perfect gases)

আদর্শ গ্যাসের মূল অঙ্গীকারগুলি ক্লসিয়াস্ সর্বপ্রথমে লিপিবদ্ধ করেন :

(i) সকল গ্যাসই অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণা অর্থাৎ অণু দ্বারা গঠিত। কোন একটি গ্যাসের অণুগুলি সদৃশ। কিন্তু বিভিন্ন গ্যাসের অণুগুলি ভিন্ন ভিন্ন।

(ii) আদর্শ গ্যাসের সকল অণুই বিন্দুভর (point mass) এবং উহাদের আকার (size) আবদ্ধ পাত্রের তুলনায় নগণ্য।

(iii) অণুগুলির পরস্পরের মধ্যে কোন আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল নাই কিংবা আবদ্ধ পাত্রের দেওয়ালের উপর কোন বল প্রয়োগ করে না ; অর্থাৎ অণুগুলি দৃঢ় (rigid) এবং পূর্ণ স্থিতিস্থাপক গোলক (perfectly elastic sphere)।

(iv) অণুগুলি সতত সঞ্চরণশীল। উহাদের গতিবেগ শূন্য (zero) হইতে অসীম (infinity) পর্যন্ত বিস্তৃত হইতে পারে।

(v) গ্যাসের অণুগুলি পাত্রের দেওয়ালের সহিত এবং পরস্পরের সহিত সংঘাত খায়। দুইটি সংঘাতের (collision) মধ্যে অণুগুলি সর্বদা সরলরেখায় চলে। দুইটি পর পর সংঘাতের ভিতরকার দূরত্বকে মুক্তপথ (free path) বলে। পর পর সংঘাতগুলির ভিতর অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে তাহাকে গড় মুক্তপথ (mean free path) বলা হয়।

(vi) যে সময় ধরিয়া একটি সংঘাত সংঘটিত হয় তাহা মুক্তপথ অতিক্রম করিবার সময়ের তুলনায় নগণ্য অর্থাৎ সংঘাতগুলি সবই তাৎক্ষণিক (instantaneous)।

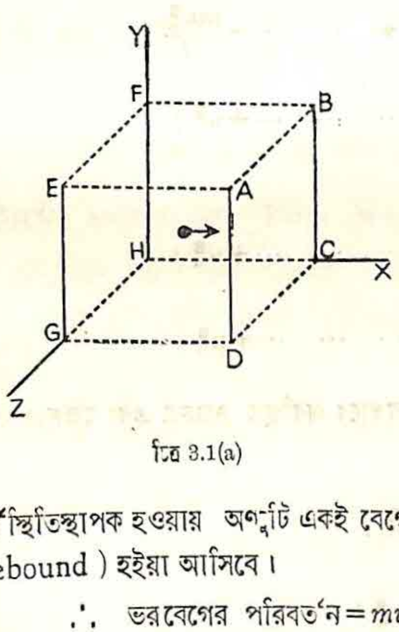
(vii) স্থিতাবস্থায় গ্যাসের প্রতি একক আয়তনে অণুর সংখ্যার কোন পরিবর্তন হয় না।

3.3 গ্যাসের চাপ (Pressure of a gas)

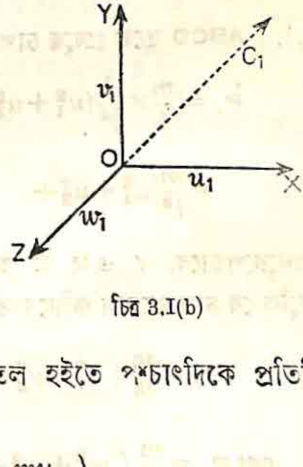
মনে করি, একটি ছয়তল বিশিষ্ট ঘনাকৃতির পাত্র আছে যাহার দেওয়ালগুলি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক এবং প্রত্যেক তলের দৈর্ঘ্য 'l'। উহার মধ্যে অণুর মোট সংখ্যা হইল 'n' ; ঐ অণুগুলির মধ্যে যে কোন একটি অণুর যে কোন দিকে বেগ, মনে করি, c_1। বেগ c_1-কে OX, OY এবং OZ অক্ষ বরাবর যথাক্রমে u_1, v_1 ও w_1 উপাংশে বিভাজন করা হইল। অতএব আমরা লিখিতে পারি

$$c_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$$

আবার মনে করি, অণুটি OX অক্ষ বরাবর গিয়া ABCD তলকে আঘাত করিল (চিত্র 3.1(a))। অণুর ভর m হইলে উহার ভরবেগ হইবে mu_1 দেওয়ালটি



চিত্র 3.1(a)



চিত্র 3.I(b)

পূর্ণস্থিতিস্থাপক হওয়ায় অণুটি একই বেগে উক্ত তল হইতে পশ্চাৎদিকে প্রতিক্ষিপ্ত (rebound) হইয়া আসিবে।

$$\therefore \text{ ভরবেগের পরিবর্তন} = mu_1 - (-mu_1)$$
$$= 2mu_1$$

অণুটি EFHG তল অভিমুখে যাইবে এবং উক্ত তলটিকে আঘাত করিবার পরে উহা পুনরায় প্রতিক্ষিপ্ত (reflected) হইয়া ABCD তলকে সংঘাত করিবে।

সুতরাং একই তলে পর পর দুইবার আঘাত করিলে অণুটি $2l$ দূরত্ব অতিক্রম করিবে এবং ঐ দূরত্ব অতিক্রম করিতে অণুটির $\frac{2l}{u_1}$ সেকেণ্ড সময় লাগিবে। অতএব প্রতি সেকেণ্ডে অণুটি উক্ত তলকে $\frac{u_1}{2l}$ বার আঘাত করিবে এবং অণুটির ভরবেগের পরিবর্তন $=2mu_1 \times \frac{u_1}{2l} = \frac{mu_1^2}{l}$।

এখন, নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, আমরা জানি, ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। অতএব ABCD তলে প্রযুক্ত বল $F_1 = \frac{mu_1^2}{l}$ হইবে।

অনুরূপে অপর আরেকটি অণু যাহার গতি c_2 এবং উপাংশ বেগগুলি যথাক্রমে u_2, v_2 এবং w_2, সেই অণুটি ABCD তলে যদি F_2 বল প্রয়োগ করে তাহা হইলে আমরা লিখিতে পারি $F_2 = \frac{mu_2^2}{l}$।

এইরূপে n সংখ্যক অণুর কথা বিবেচনা করিলে আমরা লিখিতে পারি,
ABCD তলে মোট প্রযুক্ত বল

$$F = \frac{mu_1^2}{l} + \frac{mu_2^2}{l} + \frac{mu_3^2}{l} + \quad \cdots \quad \cdots + \frac{mu_n^2}{l}$$

$$= \frac{m}{l}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + u_n^2)$$

$\therefore$ ABCD তলে প্রযুক্ত চাপ

$$P_x = \frac{m}{l} \times \frac{1}{l^2}(u_1^2 + u_2^2 + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + u_n^2)$$

$$= \frac{m}{l^3}(u_1^2 + u_2^2 + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + u_n^2)$$

অনুরূপভাবে, Y এবং Z অক্ষের লম্বভাবে অবস্থিত ABFE এবং CBFH তলে অণুগুলি যে চাপ প্রয়োগ করিবে তাহা

$$P_y = \frac{m}{l^3}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

এবং $P_z = \frac{m}{l^3}(w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2)$

আমরা জানি, গ্যাস চতুর্দিকে সমান চাপ প্রয়োগ করে। অতএব গ্যাসের গড় চাপ

$$P=\frac{P_x+P_y+P_z}{3}$$

$$=\frac{m}{3l^3}[(u_1^2+v_1^2+w_1^2)+(u_2^2+v_2^2+w_2^2)+\cdots$$

$$\cdots+(u_n^2+v_n^2+w_n^2)]$$

$$=\frac{m}{3l^3}[c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2]$$

$$=\frac{m}{3l^3}n.\overline{c^2} \qquad \cdots \quad (3.1)$$

যেখানে $\overline{c^2}=\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2+\ldots+c_n^2}{n}$

$$\therefore \quad P=\frac{mn}{3V}\overline{c^2} \qquad \cdots \quad (3.2)$$

যেখানে V = ঘনকের আয়তন $=l^3$

(3.2) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি,

$$PV=\tfrac{1}{3}mn\,\overline{c^2}$$

গ্যাসের মোট ভর M হইলে $M=mn$ হইবে এবং

গ্যাসের ঘনত্ব ρ হইলে $\rho=\frac{M}{V}=\frac{mn}{V}$ হইবে।

$$\therefore \quad P=\tfrac{1}{3}\rho\overline{c^2} \qquad \cdots \quad (3.2)$$

$\overline{c^2}$ কে গড় বর্গিত বেগ (mean square velocity) বলা হয়।

3.4 বেগের বর্গমাধ্য মূল (Root mean square velocity)

3.3 অনুচ্ছেদে উল্লেখ করা হইয়াছে যে $\overline{c^2}$-কে অণুর গড় বর্গিত বেগ বলা হয়। এখন, $\overline{c^2}$-এর বর্গমূল লইলে আমরা c-কে বেগের বর্গমাধ্য মূল বলা হয়।

আমরা জানি, $P=\frac{1}{3}\rho\,\overline{c^2}$

$$\therefore \quad \text{বেগের বর্গমাধ্য মূল } c=\sqrt{\overline{c^2}}=\sqrt{\frac{3P}{\rho}} \qquad \cdots \quad (3.4)$$

যেখানে, P গ্যাসের চাপ এবং ρ হইলে গ্যাসের ঘনত্ব। N. T. P. তে বায়ুর ঘনত্ব 0·00129 gram/c. c. হইলে বায়ুর অণুগুলির গড় বর্গিত বেগের বর্গমূল হইবে

$$c=\sqrt{\overline{c^2}}=\sqrt{\frac{3\times76\times13{\cdot}6\times980}{0{\cdot}00129}}=4{\cdot}86\times10^4 \text{ cm/second.}$$

3.5 (ক) চাপ ও গতিশক্তির সম্পর্ক (Relation between pressure and kinetic energy)

(3.3) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$P=\frac{1}{3}\rho\overline{C^2}$$

$$=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\rho\overline{C^2}$$

$\frac{1}{2}\rho\overline{C^2}$ প্রতি একক আয়তনে গ্যাসের গড় গতিশক্তি বুঝাইতেছে

$$\therefore\quad P=\frac{2}{3}E_k \qquad \dots \quad (3.5)$$

যেখানে E_k হইল গ্যাসের গড় গতিশক্তি।

অতএব আমরা বলিতে পারি গ্যাসের চাপ সংখ্যাগতভাবে (numerically) গ্যাসের গড় গতিশক্তির দুই-তৃতীয়াংশের সমান।

(খ) প্রতি গ্রাম-অণু গ্যাসের গতিশক্তি (Kinetic energy per gram-molecule of a gas)

(3.2) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি,

$$P=\frac{1}{3}\frac{mn}{V}\overline{C^2}$$

অথবা, $PV=\frac{1}{3}mn\overline{C^2}$

এখন, আদর্শ গ্যাসের বেলায় আমরা জানি $PV=RT$ ... (3.6)

যেখানে V এবং R হইতেছে যথাক্রমে এক গ্রাম-অণু গ্যাসের আয়তন এবং সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক।

এক গ্রাম-অণু গ্যাসের আয়তন বিবেচনা করিলে আমরা অনায়াসেই বলিতে পারি $mn=M$, যেখানে M হইল এক গ্রাম-অণু গ্যাসের ভর।

$$PV=\frac{1}{3}M\overline{C^2} \qquad \dots \quad (3.7)$$

(3.6) এবং (3.7) সমীকরণদ্বয় তুলনা করিলে লেখা যায়,

$$\frac{1}{3}M\overline{C^2}=RT$$

অথবা, $\overline{C^2}=\frac{3RT}{M}$

$$\therefore\quad C=\sqrt{\overline{C^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad \dots \quad (3.8)$$

অথবা, $\frac{1}{2}M\overline{C^2}=\frac{3}{2}RT$ ... (3.9)

অতএব আমরা বলিতে পারি, T° পরম উষ্ণতায় এক গ্রাম-অণু গ্যাসের গতিশক্তি $\frac{3}{2}RT$ হইবে।

(গ) গতিতত্ত্ব অনুযায়ী উষ্ণতার ব্যাখ্যা (Explanation about temperature from kinetic theory)

(3.8) সমীকরণ হইতে পাই

$$C=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

অথবা, $C^2=\frac{3RT}{M}$

সুতরাং, আমরা বলিতে পারি $C \propto \sqrt{T}$ ... (3.10)

অর্থাৎ বেগের গড়মাধ্য মূল পরম উষ্ণতার বর্গমূলের সমানুপাতিক

$\therefore$ $T=0$ হইলে $\overline{C^2}=0$ অথবা $C=0$ হইবে।

পরমশূন্য উষ্ণতায় গ্যাস অণুগুলির রৈখিক বেগ শূন্য হইবে।

আদর্শ গ্যাসের অণুগুলির ভিতর পারস্পরিক কোন আকর্ষণ থাকে না। ইহার ফলে ইহাদের স্থিতিশক্তি শূন্য হইবে। কিন্তু উহাদের মধ্যে গতিশক্তি থাকিবে। উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইলে গতিশক্তি বৃদ্ধি পাইবে। অতএব পরম শূন্যউষ্ণতায় গ্যাস অণুগুলির কোন গতিশক্তি থাকে না। গতিতত্ত্ব অনুযায়ী যে উষ্ণতায় গ্যাসের অণুগুলির গতি স্তব্ধ হয়, তাহাই পরমশূন্য উষ্ণতা।

আবার, $\frac{1}{2}M\overline{C^2}=\frac{3}{2}RT$ [(3.9) সমীকরণ হইতে]

অথবা, $\frac{1}{2}\frac{M}{N}\overline{C^2}=\frac{3}{2}\frac{R}{N}T$

অথবা, $\frac{1}{2}m\overline{C^2}=\frac{3}{2}KT$ ... (3.11)

যেখানে N হইতেছে আভোগাদ্রো সংখ্যা (Avogadro number) এবং K হইল বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক (Boltzmann Constant)

অর্থাৎ, একটি অণুর গতিশক্তি $=\frac{3}{2}\times$ বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক $\times$ পরম উষ্ণতা।

উপরি-উক্ত সমীকরণ হইতে গ্যাস-অণুর গতিশক্তির মান সংখ্যাগতভাবে পাওয়া যায়। ইহা হইতে আমরা বলিতে পারি পরমশূন্য উষ্ণতায় গ্যাস-অণুগুলির কোন গতিশক্তি থাকিবে না। ইহাই গতিতত্ত্ব অনুযায়ী উষ্ণতার ব্যাখ্যা।

3.6 গ্যাসের গতিতত্ত্ব হইতে গ্যাসের সূত্রাবলী (Gas laws from kinetic theory of gases)

(ক) বয়েলের সূত্র (Boyle's law)

(3.7) সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$PV=\frac{1}{3}M\overline{C^2}$$

এখন, আমরা জানি $\overline{C^2} \propto T$ অর্থাৎ উষ্ণতা স্থির থাকিলে $\overline{C^2}$ স্থির থাকিবে।

$\therefore$ $PV=$ ধ্রুবক

ইহাই বয়েল সূত্র।

(খ) চার্লস সূত্র (Charles' law)

(3.7) সমীকরণ হইতে আমরা জানি,

$$PV = \frac{1}{3} M\overline{C^2}$$

এখন, এক গ্রাম-অণু সংখ্যা বিবেচনা করিলে আমরা লিখিতে পারি,

$$M = Nm$$

যেখানে, N = এক গ্র্যাম-অণু গ্যাসে অণুর সংখ্যা

এবং m = একটি অণুর ভর

$$\therefore \quad PV = \frac{1}{3} Nm\overline{C^2} \qquad \ldots \quad (3.12)$$

কিন্তু আমরা জানি, PV = RT

অতএব, $\frac{1}{3} Nm\overline{C^2} = RT$

অথবা, $Nm\overline{C^2} = 3RT$

অথবা, $m\overline{C^2} = 3\frac{R}{N}T$

$= 3KT$ [K = বোলজ্‌সমান ধ্রুবক]

(3.12) সমীকরণে $m\overline{C^2}$-এর মান বসাইয়া পাই

$$PV = \frac{1}{3} N.\ 3KT = NKT \qquad \ldots \quad (3.13)$$

অতএব চাপ P যদি স্থির থাকে, তবে আমরা বলিতে পারি $V \propto T$, কারণ N এবং K হইল যথাক্রমে আভোগাদ্রো সংখ্যা এবং বোলজ্‌ম্যান ধ্রুবক।

ইহাই চার্লস সূত্র।

(গ) চাপের সূত্র (Law of pressure)

(3.13) সমীকরণ হইতে পাই

$$PV = NKT$$

অতএব, $P \propto T$ হইবে যদি V স্থির থাকে অর্থাৎ আয়তন স্থির থাকিলে নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ পরম উষ্ণতার সমানুপাতিক।

ইহাই চাপের সূত্র।

(ঘ) আদর্শ গ্যাস সমীকরণ (Perfect gas equation)

(3.7) সমীকরণ হইতে আমরা জানি

$$PV = \frac{1}{3} M C^2 \qquad \ldots \quad (3.14)$$

কিন্তু আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি যে কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুর গড় গতিশক্তি পরম উষ্ণতার সমানুপাতিক।

কাজেই $\frac{1}{2} M\overline{C^2} \propto T \qquad \ldots \quad (3.15)$

(3.14) এবং (3.15) সমীকরণদ্বয় হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$PV \propto T$$

অথবা $PV = R_m T \qquad \ldots \quad (3.16)$

R_m হইল একটি ধ্রুবক।

এক গ্রাম অণু-গ্যাসের আয়তন V হইলে (3.16) সমীকরণটি হইবে $PV=RT$ যেখানে R হইল সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক।

(ঙ) আভোগাদ্রোর সূত্র (Avogadro's law)

আভোগাদ্রোর সূত্রানুসারে আমরা জানি একই উষ্ণতা এবং চাপে সম-আয়তন সকল গ্যাসের সমসংখ্যক অণু বর্তমান।

আমরা মনে করি একই উষ্ণতা T এবং একই চাপ P তে V আয়তনের দুইটি পৃথক গ্যাস লইলাম। উহাদের অণুর সংখ্যা যথাক্রমে n_1 এবং n_2। প্রথম গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রত্যেক অণুর ভর m_1 এবং গড় বর্গিত বেগ $\overline{C_1^2}$ এবং দ্বিতীয় গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রতি অণুর ভর m_2 ও গড় বর্গ $\overline{C_2^2}$ হইলে

$$P=\tfrac{1}{3}m_1\frac{n_1}{V}\overline{C_1^2}=\tfrac{1}{3}m_2\frac{n_2}{V}\overline{C_2^2}$$

অথবা $PV=\tfrac{1}{3}m_1n_1\overline{C_1^2}=\tfrac{1}{3}m_2n_2\overline{C_2^2}$ ... (3.17)

একই উষ্ণতায় অণুগুলির গড় গতিশক্তি সমান

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}m_1\overline{C_1^2}=\tfrac{1}{2}m_2\overline{C_2^2} \qquad \cdots (3.18)$$

সমীকরণ (3.17) এবং (3.18) হইতে পাওয়া যায়

$$n_1=n_2$$

ইহাই আভোগাদ্রোর সূত্র।

(চ) গ্রাহামের ব্যাপন সূত্র (Graham's law of diffusion)

মনে করি, দুইটি গ্যাসের মধ্যে ব্যাপন প্রক্রিয়া সংঘটিত হইল। স্থায়ী অবস্থায় (steady state) উহাদের চাপ সমান হইবে।

$$\therefore\ P=\tfrac{1}{3}\rho_1\overline{C_1^2}=\tfrac{1}{3}\rho_2\overline{C_2^2}$$

যেখানে ρ_1 ও ρ_2 হইল গ্যাস দুইটির ঘনত্ব এবং $\overline{C_1^2}$ ও $\overline{C_2^2}$ হইল উহাদের গড় বর্গিত বেগ

$$\therefore\ \frac{\sqrt{\overline{C_1^2}}}{\sqrt{\overline{C_2^2}}}=\frac{C_1}{C_2}=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

অথবা $$C\propto\sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

অর্থাৎ ব্যাপন হার ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

(ছ) ডালটনের আংশিক চাপের সূত্র (Dalton's law of partial pressures)

মনে করি, একই আয়তনে এবং উষ্ণতায় কতকগুলি গ্যাসের মিশ্রণ তৈয়ারী করা হইল। উহাদের ঘনত্ব যথাক্রমে $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots$ এবং অণুগুলির গড় বর্গিত বেগ যথাক্রমে $\overline{C_1^2}, \overline{C_2^2}, \overline{C_3^2}, \cdots$। মনে করি, মিশ্রিত গ্যাসের চাপ হইল P।

$$\therefore\ P=\tfrac{1}{3}\rho_1\overline{C_1^2}+\tfrac{1}{3}\rho_2\overline{C_2^2}+\tfrac{1}{3}\rho_3\overline{C_3^2}+\cdots\cdots$$

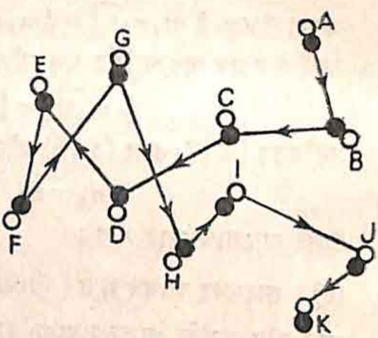
গ্যাসগুলির পৃথক চাপ p_1, p_2, p_3, হইলে $p_1=\frac{1}{3}\rho_1\overline{C_1^2}$, $p_2=\frac{1}{3}\rho_2\overline{C_2^2}$, $p_3=\frac{1}{3}\rho_3\overline{C_3^2}$,··· হইবে।

$$\therefore\quad P=p_1+p_2+p_3+p_4+\cdots$$

অর্থাৎ রাসায়নিক বিক্রিয়া করে না এমন কতকগুলি গ্যাসের সংমিশ্রণের চাপ গ্যাসগুলির আংশিক চাপের সমষ্টির সমান।

3.7 গড় মুক্ত পথ (Mean free path)

গ্যাসের গতিতত্ত্ব হইতে আমরা জানিয়াছি যে গ্যাসের অণুগুলি সবসময় অসম্বন্ধ গতিতে (random motion) চারিদিকে ছুটিয়া বেড়াইতেছে এবং ইহারা অনবরত পরস্পরের সহিত এবং পাত্রের দেওয়ালের সহিত ধাক্কা খাইতেছে। অণুগুলির মধ্যে পারস্পরিক কোন আকর্ষণ বল না থাকায় উহাদের বেগ অপরিবর্তিত থাকে। পর পর দুইটি ধাক্কার ভিতর অণুগুলি সরল রেখায় গমন করে, এই পথটুকুকে মুক্তপথ (free path) বলা হয়। 3.2 চিত্রে একটি অণু A, অপর একটি অণু B কে ধাক্কা দিয়া BC পথে চলিয়া গেল এবং C স্থানে গিয়া অপর একটি অণুর সহিত ধাক্কা খাইল। সুতরাং BC হইল একটি মুক্ত পথ। এই মুক্ত পথের দৈর্ঘ্য সবসময় সমান হয় না। সেইজন্য গড় মুক্ত পথ লওয়া হয়। পর পর দুইটি ধাক্কার ভিতর একটি অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে তাহাকে গড় মুক্ত পথ বলা হয়।



চিত্র 3.2

মনে করি, A হইতে B এর দূরত্ব S_1, B হইতে C এর দূরত্ব S_2, ··· এখন N সংখ্যক ধাক্কা সংঘটিত হইয়া থাকিলে ঐ গ্যাস অণুর গড় মুক্ত পথ

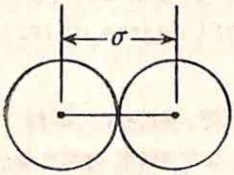
$$\lambda=\frac{S_1+S_2+\cdots+S}{N}=\frac{S}{N}$$

যেখানে $S=S_1+S_2+\cdots+S_n$ = গ্যাস অণুর ঐ সময়ে মোট অতিক্রান্ত পথ।

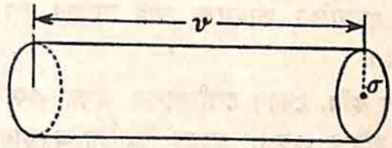
ক্লসিয়াস্ (Clausius) গড় মুক্ত পথের গাণিতিক রাশিমালা নির্ণয় করেন। তবে তিনি ধরিয়া লইয়াছিলেন যে শুধুমাত্র একটি অণু ছুটিতেছে এবং বাকী অণুগুলি স্থিরাবস্থায় আছে।

মনে করি, প্রতি একক আয়তনে n সংখ্যক অণু আছে এবং প্রতিটি অণুর ব্যাস σ। এখন ধরা যাক, একটি অণু v বেগে ছুটিতেছে। অতএব উহা সেই

সকল অণুর সহিত ধাক্কা খাইবে যাহাদের কেন্দ্র σ ব্যাসার্ধ ও ν দৈর্ঘ্যসম্পন্ন একটি চোঙের ভিতর অবস্থান করিবে (চিত্র 3.3(a) এবং 3.3(b))।



চিত্র 3.3(a)



চিত্র 3.3(b)

কাজেই চোঙটির ভিতর অণুসংখ্যা $= \pi\sigma^2 \nu n$

$\therefore$ পর পর দুইবার ধাক্কার ভিতর অতিবাহিত গড় সময়

$$t = \frac{1}{\pi\sigma^2 \nu n} \text{ সেকেন্ড}$$

অতএব পর পর দুইটি ধাক্কার ভিতর গড় দূরত্ব

$$= \frac{\nu}{\pi\sigma^2 \nu n} = \frac{1}{\pi\sigma^2 n}$$

$\therefore$ গড় মুক্ত পথ $= \dfrac{1}{\pi\sigma^2 n}$

গড় মুক্ত পথের উপরের গণনা (calculation) ত্রুটিমুক্ত নহে। কারণ আমরা আলোচ্য অণু ছাড়া অপর অণুগুলিকে স্থির ধরিয়া লইয়াছি। কিন্তু অণুগুলি সতত সঞ্চরণশীল।

বোলজম্যান (Boltzmann) ধরিয়া লইলেন যে সকল অণুই একই গতিবেগে ছুটিতেছে। এইভাবে তিনি গড় মুক্ত পথের যে সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করেন তাহা হইল

$$\lambda = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi\sigma^2 n}$$

ম্যাক্সওয়েল (Maxwell) আরও নির্ভুলভাবে যে সম্পর্ক বাহির করেন তাহা হইল

$$\lambda = \frac{1}{\nu^2 \pi\sigma^2 n}$$

উপরের তিনটি সমীকরণ হইতে আমরা পাই, গড় মুক্ত পথ গ্যাস অণুর বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

এখন একটি অণুর ভর m হইলে

গ্যাসের ঘনত্ব $\rho = mn$ হইবে

$$\therefore \quad \lambda = \frac{m}{\pi\sigma^2 mn} = \frac{m}{\pi\sigma^2 \rho}$$

অর্থাৎ গড় মুক্ত পথ গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক।

3.8 স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা (Degree of freedom)

কোন গতিশীল সংস্থার (system) অবস্থান বুঝাইতে মোট যে সংখ্যক স্বাধীন রাশির প্রয়োজন তাহাকে সেই সংস্থার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা (degree of freedom) বলা হয়।

মনে করি, কোন পেন্সিলের উপর একটি কালো চিহ্ন আছে। উহার স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হইবে এক। কারণ চিহ্নটির অবস্থান একটিমাত্র অক্ষ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কিন্তু কালো চিহ্নটি একটি খাতার উপর অবস্থিত হইলে উহার মাত্রা হইবে দুই। আবার উড়ন্ত একটি মশার কথা বিবেচনা করিলে দেখিব যে উহার অবস্থান নির্ণয়ে তিনটি অক্ষের প্রয়োজন অর্থাৎ এক্ষেত্রে মাত্রা হইবে তিন। আবার দৃঢ় বস্তুর (rigid body) সরল বা ঋজু গতি (translational motion) এবং আবর্ত গতি (rotational motion) এই দুই প্রকারের গতি আছে। কাজেই উহার একই সঙ্গে ঋজু গতির জন্য তিনটি এবং আবর্ত গতির জন্য তিনটি মাত্রা থাকিতে পারে। এক্ষেত্রে মোট স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা হইবে ছয়।

অতএব আমরা বলিতে পারি, কোন গতিশীল সংস্থার অবস্থান সম্পূর্ণভাবে প্রকাশ করিতে যতগুলি স্থানাঙ্কের প্রয়োজন তাহার সংখ্যাই হইতেছে স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা।

3.9 গতিশক্তির সমবণ্টন বা সমবিভাজন সূত্র (Law of equipartition of kinetic energy)

কোন গতীয় সংস্থার মোট শক্তি তাপীয় সাম্যাবস্থায় (thermal equilibrium) বিভিন্ন স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার ভিতর সমভাবে বণ্টিত হয়। প্রত্যেক স্বাতন্ত্র্যতার মাত্রাপিছু শক্তির পরিমাণ হয় $\frac{1}{2}$KT। ইহাই গতিশক্তির সমবণ্টন সূত্র।

তাপীয় সাম্যাবস্থায় কোন গ্যাস অণুর বেগ C এর উপাংশগুলির গড় বর্গমান পরস্পর সমান। অর্থাৎ,

$$\overline{u^2}=\overline{v^2}=\overline{w^2}$$

$$\therefore\quad \overline{C^2}=\overline{u^2}+\overline{v^2}+\overline{w^2}$$

$$=\frac{1}{3}\,\overline{u^2}=\frac{1}{3}\,\overline{v^2}=\frac{1}{3}\,\overline{w^2}$$

আমরা জানি $\frac{1}{2}m\overline{C^2}=\frac{3}{2}KT$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}m\,\overline{u^2}=\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}=\frac{1}{2}m\,\overline{w^2}=\frac{1}{3}.\,\frac{3}{2}KT=\frac{1}{2}KT$$

অতএব আমরা বলিতে পারি যে প্রত্যেক অণুর ঋজু গতির স্বাতন্ত্র্য সংখ্যার প্রতি গড় গতিশক্তি হইল $\frac{1}{2}$KT।

3.10 ডুলং ও পেটিটের সূত্র (Dulong and Petit's law)

নির্দিষ্ট আয়তনের কোন কঠিন মৌলের আপেক্ষিক তাপ এবং পারমাণবিক ওজনের গুণফলকে পারমাণবিক তাপ (atomic heat) বলা হয়। এই পারমাণবিক তাপের মান অধিকাংশ মৌলিক বস্তুর ক্ষেত্রে সমান হয় এবং উহার মান 6·4 ক্যালরি।

অর্থাৎ পারমাণবিক তাপ = আপেক্ষিক তাপ × পারমাণবিক ভর

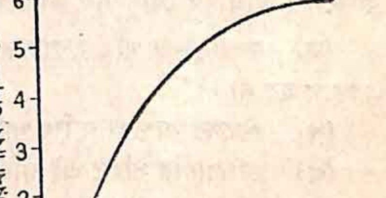
= 6·4 ক্যালরি।

ইহাই ডুলং এবং পেটিটের সূত্র নামে পরিচিত।

সাধারণ এবং উচ্চ উষ্ণতায় নির্দিষ্ট আয়তনে পারমাণবিক তাপের মান ডুলং এবং পেটিটের সূত্র মানিয়া চলে। কিন্তু কার্বন, বোরণ ও সিলিকন এই নিয়ম মানিয়া চলে না। সাধারণ উষ্ণতায় পারমাণবিক তাপের মান 6·4 অপেক্ষা অনেক কম হয়। কিন্তু উচ্চতর উষ্ণতায় উহার মান 6·4 এর কাছাকাছি হয়।

সকল কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ উষ্ণতার সহিত বৃদ্ধি পায়। উচ্চ উষ্ণতায় উহার মান নির্দিষ্ট হয়। কোন কোন মৌলিক পদার্থ, যথা : সীসা, টিন প্রভৃতির ক্ষেত্রে উষ্ণতার সহিত আপেক্ষিক তাপের পরিবর্তনের হার অল্প। কিন্তু কার্বন, বোরণ, সিলিকন প্রভৃতি কয়েকটি কঠিন মৌলিক পদার্থের ক্ষেত্রে এই পরিবর্তনের হার অনেক বেশী।

উষ্ণতার সহিত পারমাণবিক তাপের লেখচিত্র আঁকিলে (3.4) চিত্রের ন্যায় একটি লেখ (graph) পাওয়া যাইবে। ইহা হইতে সহজেই বোঝা যাইতেছে যে উচ্চ উষ্ণতায় পারমাণবিক তাপের মান প্রায় 6 হইতেছে কিন্তু নিম্ন উষ্ণতায় উহার মান দ্রুত কমিয়া যায় এবং পরমশূন্য উষ্ণতায় উহার মান শূন্য হইয়াছে।



চিত্র 3.4

ডুলং এবং পেটিটের সূত্র হইতে 3.4 লেখচিত্র ব্যাখ্যা করা যায় না। ইহার কারণ কঠিন পদার্থের আপেক্ষিক তাপ উষ্ণতার সহিত পরিবর্তিত হয়। পরবর্তী কালে আইনস্টাইন কোয়াণ্টাম তত্ত্বের (quantum theory) সাহায্যে এই ঘটনাকে যথাযথ ভাবে ব্যাখ্যা করেন। কোয়াণ্টাম তত্ত্ব অনুসারে প্রতি স্বাতন্ত্র্য সংখ্যা (degree of freedom) মাত্রাপিছু শক্তির পরিমাণ হইল

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}$$

যেখানে h = প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক (Planck's constant)

ν = পরমাণুর কম্পাঙ্ক

K = বোলজ্ম্যান ধ্রুবক

কিন্তু বিভিন্ন পরীক্ষা হইতে জানা যায় যে, উন উষ্ণতায় কিছু কিছু মৌলিক পদার্থের পারমাণবিক তাপ উষ্ণতা হ্রাসের সহিত অতি দ্রুত হ্রাস পায়। ইহা আইনস্টাইন ব্যাখ্যা করিতে পারেন নাই। এই অসংগতি দূর করিবার জন্য ডিবাই (Debye) পারমাণবিক তাপকে নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করেন :

$$A = f\left(\frac{\theta}{T}\right)$$

যেখানে A হইল T° পরম উষ্ণতায় পদার্থের পারমাণবিক তাপ এবং θ হইল ডিবাই-এর উষ্ণতা। নির্দিষ্ট পদার্থের ক্ষেত্রে θ ধ্রুবক কিন্তু বিভিন্ন পদার্থের বেলাতে ইহার মান ভিন্ন হইবে। উন উষ্ণতায় পদার্থের আপেক্ষিক তাপ উষ্ণতার ঘন (cube)-এর সহিত সমানুপাতিক—অর্থাৎ $C_v \propto T^3$। ইহাই ডিবাই-এর T^3 সূত্র।

3.11. ব্রাউনীয় গতি (Brownian motion)

রবার্ট ব্রাউন প্রথম আবিষ্কার করেন যে কোন তরলে বিলম্বিত (suspended) অবস্থায় আছে এইরূপ ক্ষুদ্র কণিকাই অনিয়মিত গতিতে (random motion) চতুর্দিকে ছুটিয়া বেড়ায়। এই গতিকে ব্রাউনীয় গতি বলে। ব্রাউনীয় গতি পর্যবেক্ষণ করিলে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলি দেখা যায় :

(ক) কণাগুলির গতি সম্পূর্ণরূপে অনিয়মিত। কোন দুইটি কণার গতি কখনও একরূপ হয় না।

(খ) তরলের সান্দ্রতা বৃদ্ধি পাইলে গতি মন্দীভূত হয়।

(গ) তাপমাত্রার সহিত এই গতি বৃদ্ধি পায়।

(ঘ) কণাগুলি আকারে যত ক্ষুদ্র হইবে উহাদের গতি তত বেশী অনিয়মিত হইবে।

গতিতত্ত্বের সাহায্যে এই গতি ব্যাখ্যা করা যাইতে পারে।

কোন কঠিন বস্তুকে তরলে বিলম্বিত করিলে তরলের অণুগুলি চতুর্দিক হইতে ঐ বস্তুকে আঘাত করে। বস্তুটি আকারে বড় হইলে তরল কণিকাগুলির আঘাত বস্তুর উপর সর্বদিক হইতে প্রায় সমানভাবে পড়ে। এক্ষেত্রে বস্তুর উপর লব্ধ বল (resultant force) শূন্য হওয়ায় বস্তুটি স্থিরাবস্থায় থাকে। কিন্তু বস্তু কণার আকার ক্ষুদ্র হইলে তরলের অণুগুলির আঘাত চতুর্দিক হইতে সমভাবে পড়ে না ; ফলে বস্তু কণার উপর একটি লব্ধ বল ক্রিয়া করে। বস্তু কণিকা লব্ধ বলের অভিমুখে সরিয়া যায়। তরল কণিকাগুলি সর্বদা অনিয়মিত গতিতে ছুটিয়া বেড়ায় বলিয়া বস্তু-কণিকার উপরে ক্রিয়াশীল লব্ধ বলের পরিমাণ ও অভিমুখ সর্বদাই পরিবর্তিত হইতেছে। ফলে কণিকাগুলি এদিক-সেদিক ছুটিয়া বেড়ায়।

উদাহরণ (Examples)

1. সাধারণ উষ্ণতা এবং চাপে হাইড্রোজেনের ঘনত্ব 9×10^{-5} gram/c.c. হইলে গ্যাস অণুগুলির বেগের গড়মাধ্য মূল নির্ণয় কর।

(If the density of hydrogen at normal temperature and pressure is 9×10^{-5} gram/c.c., find the root mean square velocity of the gas molecule.) [C.U. '67]

আমরা জানি, বেগের গড়মাধ্য মূল $C=\sqrt{\dfrac{3P}{\rho}}$

এক্ষেত্রে $P=76\times13{\cdot}6\times981$ dyne/cm^2

$\rho=9\times10^{-5}$ gram/c.c.

$$\therefore\quad C=\sqrt{\frac{3\times76\times13{\cdot}6\times981}{9\times10^{-5}}}$$

$=1{\cdot}84\times10^5$ cm/second.

2. 0°C তাপমাত্রায় এবং 50°C উষ্ণতায় এক গ্রাম হাইড্রোজেনের আণবিক শক্তি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে হাইড্রোজেনের আণবিক ওজন 2 এবং গ্যাস ধ্রুবক $R=8{\cdot}3\times10^7$ erg/°C/gram-mole।

(Calculate the molecular energy of 1 gram of hydrogen at 0°C and 50°C. Given that the molecular weight of hydrogen is 2 and the gas constant $=8{\cdot}3\times10^7$ ergs/°C/gram-mole.) (C.U. '51)

আমরা জানি, গতিশক্তি $=\frac{3}{2}RT$

$\therefore$ প্রতি গ্রাম-অণু হাইড্রোজেনের 0°C-এ গতিশক্তি

$=\frac{3}{2}\times8{\cdot}3\times10^7\times273$

$=3{\cdot}4\times10^{10}$ erg

হাইড্রোজেনের আণবিক ওজন = 2

$\therefore$ 0°C উষ্ণতায় 1 গ্রাম হাইড্রোজেনের গতিশক্তি

$=\frac{1}{2}\times3{\cdot}4\times10^{10}$ erg

$=1{\cdot}7\times10^{10}$ erg

$\therefore$ 50°C উষ্ণতায় 1 গ্রাম হাইড্রোজেনের গতিশক্তি

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times8{\cdot}3\times10^7\times312$

$=2\times10^{10}$ erg..

3. 27°C উষ্ণতায় একটি হিলিয়াম অণুর গড় গতিশক্তি $6{\cdot}17\times10^{-14}$ erg. আণবিক গ্যাস ধ্রুবক $R=8{\cdot}3\times10^7$ ergs হইলে আভোগাড্রোর সংখ্যা (N) নির্ণয় কর।

(The average KE of a molecule of Helium at 27°C is

6.17×10^{-14} erg. Calculate Avogadro's number, given molar gas constant $R=8.3\times10^7$ erg.) (C.U. '80)

আমরা জানি, $N=\dfrac{3RT}{m\overline{c^2}}$

এক্ষেত্রে $R=8.3\times10^7$ erg

$T=(273+27)=300°A$

$\frac{1}{2}m\overline{c^2}=6.17\times10^{-14}$ erg

$\therefore\ N=\dfrac{3\times8.3\times10^7\times300}{2\times6.17\times10^{-14}}$

$=6.05\times10^{23}$.

4. এক ঘন সেণ্টিমিটার গ্যাসে অণুর সংখ্যা 2.79×10^{19} এবং অণুর ব্যাস 7.2×10^{-8} cm হইলে ঐ গ্যাসের গড় মুক্ত পথ কত হইবে ?

(What will be the mean free path of a gas molecule if the number of molecule per c.c. is 2.79×10^{19} and the diameter of the molecule is 7.2×10^{-8} cm.)

আমরা জানি, $\lambda=\dfrac{1}{\pi\sigma^2 n}$

এক্ষেত্রে $n=2.79\times10^{19}$ mol /c.c.

$\sigma=7.2\times10^{-8}$ cm

$\therefore\ \lambda=\dfrac{1}{3.14\times(7.2\times10^{-8})^2\times2.79\times10^{19}}$

$=2.2\times10^{-6}$ cm।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. গ্যাস-অণুর বেগের গড়মাধ্য মূল বলিতে কি বোঝায় ব্যাখ্যা কর। গ্যাসের বেগের গড়মাধ্য মূল, চাপ ও ঘনত্বের ভিতর সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

(Explain what is meant by root mean square velocity of molecules of a gas. Deduce the relation between the r.m s. velocity, pressure and density of a gas.) (C.U. '65)

2. দেখাও যে, কোন আদর্শ গ্যাস যে চাপ প্রয়োগ করে তাহা একক আয়তনে গ্যাস অণুর গতিশক্তির দুই-তৃতীয়াংশের সমান।

(Show that the pressure exerted by a perfect gas is two-thirds of the k.e. of the gas molecules in a unit volume.)

(C.U. '66)

3. গতিতত্ত্ব হইতে চার্লসের সূত্র এবং গ্রাহামের ব্যাপন সূত্র প্রমাণ কর।

(Prove Charles' law and Graham's law of diffusion from the kinetic theory.) (C.U. '72)

4. গতিতত্ত্ব অনুযায়ী গ্যাসের ঘনত্ব ও অণুর গড় বর্গিত বেগের সহিত চাপের সম্পর্কিত রাশিমালা নির্ণয় কর।

শক্তির সমবিভাজন সূত্রটি ব্যাখ্যাসহ বিবৃত কর।

(Obtain an expression for the pressure of a gas in terms of its density and mean square velocity of molecules from the standpoint of the kinetic theory.

State and explain the law of equipartition of energy.)

(C.U. '80)

5. গ্যাস অণুর গড় মুক্ত পথ বলিতে কি বোঝায়?

প্রমাণ কর যে,

$$\lambda = \frac{1}{\pi \sigma^2 n}.$$

(What is the meaning of mean free path of the molecules of a gas. Show that

$$\lambda = \frac{1}{\pi \sigma^2 n}.$$

6. ডুলং ও পেটিটের সূত্রটি উল্লেখ কর এবং এই সূত্রের সীমাবদ্ধতা আলোচনা কর।

(State Dulong and Petit's law and discuss its limitations.)

7. গতিতত্ত্ব অনুযায়ী উষ্ণতা এবং চাপের ব্যাখ্যা কি?

(What is the interpretation of temperature and pressure on the basis of kinetic theory.)

8. সাধারণ উষ্ণতা ও চাপে বায়ুর ঘনত্ব 0·00129 gram/c.c. হইলে বায়ুর বেগের গড়মাধ্য মূল নির্ণয় কর। $g = 981$ cm/s^2।

(Find the r.m.s. velocity of air at NTP the density of air being 0·00129 gram/c.c. at NTP and g = 981 cm/s^2.) (C.U. '64)

[Ans. 48000 cm/s]

9. সাধারণ উষ্ণতা ও চাপে হাইড্রোজেন অণুর মূল গড় বর্গিত বেগ 2×10^3 metre/second হইলে হাইড্রোজেন গ্যাসের ঘনত্ব কত হইবে নির্ণয় কর। পারদের ঘনত্ব = 13·6 gram/c.c.।

(If the root mean square velocity of the molecules of the

hydrozen gas at NΓP be 2×10^3 metre/second, find the density of the gas. Density of mercury = 13·6 gram/c.c.) (C.U. '78)

[Ans. 0·000076 gram/c.c]

10. চাপ স্থির থাকিলে কত তাপমাত্রায় নাইট্রোজেন অণুর মূল গড় বর্গিত বেগ সাধারণ তাপমাত্রায় এবং চাপে বেগের গড়মাধ্য মূলের দ্বিগুণ হইবে ?

(At what temperature will r.m.s. velocity of Nitrogen molecule be double its value at NTP., pressure remaining constant ?) (C.U. '70) [Ans. 819°c]

11. কোন গ্যাস অণুর ব্যাস 2×10^{-8} cm এবং এক ঘন সেণ্টিমিটার গ্যাসে অণুর সংখ্যা $=3\times10^{19}$ হইলে ঐ গ্যাস-অণুর মুক্তপথ নির্ণয় কর।

(Calculate the mean free path of a gas molecule, if the diameter of a molecule is 2×10^{-8} cm and the number of molecules per c.c. is 3×10^{19}.)

[Ans. $1·93\times10^4$ cm/s]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

তাপের পরিবহন
(Conduction of Heat)

4.1 সূচনা (Introduction)

যে স্থানের উষ্ণতা বেশী সেই স্থান থেকে তাপ কম উষ্ণতা-বিশিষ্ট স্থানে প্রবাহিত হয়। এই প্রবাহ তিনটি পৃথক পদ্ধতিতে হইয়া থাকে ; ইহারা হইল পরিবহণ (conduction), পরিচলন (convection) ও বিকিরণ (radiation)।

যে প্রণালীতে তাপ পদার্থের মধ্য দিয়া কোন বস্তুর উষ্ণতর অংশ হইতে শীতলতর অংশে গমন করে, কিন্তু পদার্থের অণুগুলির দৃশ্যত কোন স্থান পরিবর্তন হয় না তাহাকে পরিবহণ বলা হয়। কঠিন পদার্থের মধ্য দিয়া তাপের পরিবহণ খুব বেশী এবং গ্যাসে খুব কম হইয়া থাকে। শূন্য মাধ্যমে পরিবহণ একেবারেই হয় না। সব পদার্থের মধ্য দিয়া তাপ সমভাবে পরিবাহিত হইতে পারে না। শীতকালে পশমের বস্ত্রে শীত করে না ; ইহার কারণ পশমের মধ্য দিয়া শরীরের তাপ দ্রুত পরিবাহিত হইয়া বাহিরের শীতল বায়ুতে আসিতে পারে না। উলের ভিতর অসংখ্য বায়ু ছিদ্রের জন্যই এইরূপ হইয়া থাকে।

4.2 তাপ-পরিবাহিতা (Thermal conductivity)

মনে করি, AB কোন পদার্থের একটি আয়তাকার ব্লক যাহার দুইটি বিপরীতমুখী তলের উষ্ণতা θ_2 এবং θ_1 ($\theta_2 > \theta_1$)। স্থির অবস্থায় t সময়ে যদি Q পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হয় তবে উহা

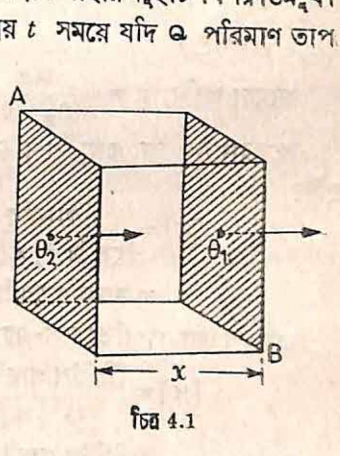
(i) তলের ক্ষেত্রফল A-এর সহিত সমানুপাতিক

$$\therefore \quad Q \propto A$$

(ii) দুই তলের উষ্ণতার পার্থক্য $(\theta_2 - \theta_1)$-এর সহিত সমানুপাতে পরিবর্তিত হয়।

$$\therefore \quad Q \propto (\theta_2 - \theta_1)$$

(iii) তাপ প্রবাহের সময় t-এর সহিত সমানুপাতিক।



চিত্র 4.1

$$\therefore \quad Q \propto t$$

এবং (iv) দুই তলের দূরত্ব d-এর সহিত ব্যস্তানুপাতিক।

$$\therefore \quad Q \propto \frac{1}{d}$$

অতএব $$Q = K\,\frac{A(\theta_2 - \theta_1)\,t}{d} \qquad \cdots \quad (4.1)$$

যেখানে K একটি ধ্রুবক যাহার মান পদার্থের প্রকৃতির উপর নির্ভরশীল। এই ধ্রুবককে তাপ-পরিবাহিতা (thermal conductivity) বা তাপ পরিবাহিতাঙ্ক (coefficient of thermal conductivity) বলা হয়।

$$\therefore \text{ তাপ পরিবাহিতাঙ্ক, } K = \frac{Q.d}{A(\theta_2 - \theta_1)t}$$

যদি $A = 1$ বর্গ সে.মি., $\theta_2 - \theta_1 = 1°C$, $t = 1$ সেকেণ্ড এবং $d = 1$ সে.মি. হয় তবে $K = Q$ হইবে —অর্থাৎ একক ক্ষেত্রফল এবং একক বেধ যুক্ত পদার্থখণ্ডের বিপরীত তলের উষ্ণতার পার্থক্য একক হইলে প্রতি সেকেণ্ডে এক তল হইতে বিপরীত তলে লম্বভাবে যে পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হইবে তাহাকে ঐ পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা বা তাপ পরিবাহিতাঙ্ক বলা হয়।

এখন $\frac{\theta_2 - \theta_1}{d}$ রাশিটিকে উষ্ণতার অবক্রম (temperature gradient) বলে। দুই বিপরীতমুখী তলের দূরত্ব অল্প হইলে ঐ রাশিকে $\frac{d\theta}{dx}$ দ্বারা বোঝান হয়।

অর্থাৎ, $\frac{\theta_2 - \theta_1}{d} = -\frac{d\theta}{dx}$ এখানে বিযুক্ত চিহ্নটি নির্দেশ করিতেছে যে θ-র মান x বৃদ্ধির সহিত হ্রাস পাইবে। সুতরাং স্থায়ী অবস্থায় (steady state) তাপ প্রবাহের হার

$$\frac{Q}{t} = -K\frac{d\theta}{dx} \qquad \cdots \qquad (4.2)$$

4.3 তাপ-পরিবাহিতার মাত্রা (Dimension of thermal conductivity)

আমরা জানি, $K = \frac{Qd}{A(\theta_2 - \theta_1)t}$

সুতরাং সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে K-এর তাপীয় মাত্রা (Thermal dimension) হইল

$$[K] = \frac{[\text{ক্যালরি}] \times [\text{সে.মি.}]}{[\text{সে.মি.}^2] \times [°C] \times [\text{সেকেণ্ড}]}$$
$$= \text{ক্যালরি/সে.মি./°C/সেকেণ্ড}$$

এফ.পি.এস. পদ্ধতিতে K-এর তাপীয় মাত্রা হইবে

$$[K] = \frac{[\text{ব্রিটিশ থার্মাল একক}] \times [\text{ফুট}]}{[\text{ফুট}^2] \times [°F] \times [\text{সেকেণ্ড}]}$$
$$= \text{ব্রিটিশ থার্মাল একক/ফুট/°F/সেকেণ্ড}$$

K-এর গতীয় মাত্রা (dynamical dimension) হইল,

$$K = \frac{[ML^2T^{-2}].L}{[L^2][\theta][T]}$$
$$= MLT^{-3}\theta^{-1}$$

4.4 পরিবর্তনশীল অবস্থা এবং স্থায়ী অবস্থা (Variable state and steady state)

মনে করি, একটি ধাতব দণ্ডের (metal rod) একপ্রান্ত বার্ণারের সাহায্যে উত্তপ্ত করা হইতেছে। কিছুক্ষণ পরে লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে দণ্ডটি ক্রমশ উত্তপ্ত হইয়া উঠিতেছে। সমগ্র দণ্ডটি কয়েকটি স্তরে বিভক্ত আছে কল্পনা করি। প্রথম স্তর বার্ণারের সংস্পর্শে থাকায় উহা প্রথমে উত্তপ্ত হইবে, এবং উহার পরবর্তী স্তর এই তাপের কিছু অংশ শোষণ করিবে, কিছু অংশ বিকিরণ করিবে এবং অবশিষ্ট অংশ পরবর্তী স্তরে পরিবাহিত হইবে। এইভাবে এক স্তর হইতে অপর স্তরে তাপ পরিবাহিত হয় এবং ঐ স্তরগুলির উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইতে থাকে। এই অবস্থাকে পরিবর্তনশীল অবস্থা বলা হয়। এই অবস্থা কিছুক্ষণ থাকার পর প্রত্যেকটি স্তরের উষ্ণতা একটি চরম বা সর্বোচ্চ (maximum) মানে পৌঁছায় এবং তারপর উহাদের উষ্ণতা ধ্রুবক হয়, যতক্ষণ উত্তপ্ত প্রান্তের উষ্ণতা স্থির থাকে। এই অবস্থাকে স্থায়ী অবস্থা বলা হয়। এই অবস্থায় কোন স্তরই আর তাপ শোষণ করে না, সমগ্র তাপই পরবর্তী স্তরে পরিবাহিত হয়।

4.5 তাপমাত্রিক পরিবাহিতা বা তাপ ব্যাপনতা (Thermometric conductivity or thermal diffusivity)

কোন ধাতব দণ্ডের উত্তপ্ত প্রান্ত হইতে নির্দিষ্ট দূরে উষ্ণতা কত তাড়াতাড়ি বাড়িবে তাহা তাপমাত্রিক পরিবাহিতার উপর নির্ভর করে।

দুইটি একই প্রস্থচ্ছেদ (cross-section) এবং একই দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি বিসমাথ এবং একটি লোহ দণ্ডের এক প্রান্ত একই উষ্ণতায় রাখিলে দেখা যাইবে যে বিসমাথ দণ্ডের শীতল প্রান্তের উষ্ণতা, লোহ দণ্ডের শীতল প্রান্ত অপেক্ষা অনেক দ্রুত বৃদ্ধি পাইতেছে। কিন্তু স্থায়ী অবস্থায় লোহের শীতল প্রান্তের উষ্ণতা অধিক হইবে। অর্থাৎ, পরিবর্তনশীল অবস্থায় পদার্থের উষ্ণতার বৃদ্ধির হার কেবলমাত্র তাপ-পরিবাহিতার উপর নির্ভর করে না, তাপ-গ্রাহীতার উপরও নির্ভর করে।

কোন পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা এবং প্রতি একক আয়তনে তাপগ্রাহীতার অনুপাতকে তাপমাত্রিক পরিবাহিতা বলে।

$$\text{তাপমাত্রিক পরিবাহিতা} = \frac{\text{তাপ-পরিবাহিতা}}{\text{প্রতি একক আয়তনের তাপগ্রাহীতা}} = \frac{K}{\rho C}$$

যেখানে ρ = উপাদানের ঘনত্ব

C = উপাদানের আপেক্ষিক তাপ

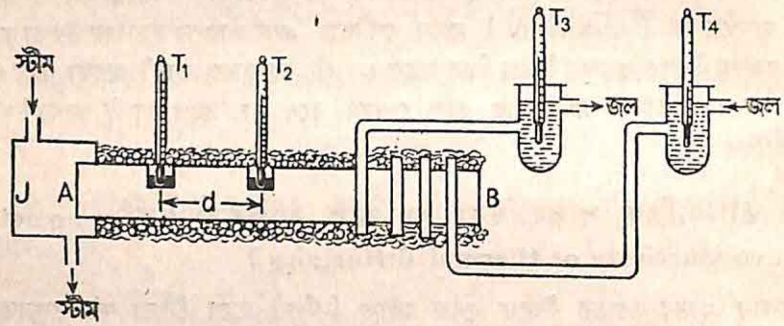
উষ্ণতার স্থির অবস্থায় পদার্থের পরিবহণ ক্ষমতার উপর তাপ-পরিবাহিতা নির্ভর করে। কিন্তু পরিবর্তনশীল অবস্থায় উষ্ণতা পরিবর্তনের হার পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা এবং তাপগ্রাহীতার উপর নির্ভর করে। কোন পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা কম কিন্তু তাপমাত্রিক পরিবাহিতা বেশী হইতে পারে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে

বিসমাথ এবং লোহের মধ্যে লোহের তাপ-পরিবাহিতা বেশী কিন্তু তাপমাত্রিক পরিবাহিতা কম। সেইজন্য প্রথমে বিসমাথের শীতল প্রান্তের উষ্ণতা পরিবর্তনের হার বেশী।

4 6 সার্লের পদ্ধতিতে তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় (Determination of thermal conductivity by Searle's method)

পরীক্ষাগারে রূপা, তামা, পিতল প্রভৃতির মত সুপরিবাহী পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা সার্লের পদ্ধতিতে করা হয়।

4.2 চিত্রে সার্লের যন্ত্রটি দেখানো হইয়াছে। এই চিত্রে AB একটি ধাতব দণ্ড যাহার উপাদানের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় করিতে হইবে। দণ্ডটি কুপরিবাহী পদার্থ দ্বারা আবৃত থাকে যাহাতে উহার উপরিতল হইতে বিকিরণের দরুণ তাপ নষ্ট খুব কম



চিত্র 4.2

হয়। দণ্ডের A প্রান্ত একটি স্টীম জ্যাকেট J-এর ভিতরে প্রবেশ করানো থাকে অপর প্রান্তের নিকট একটি তামার নল কুণ্ডলী আকারে জড়ানো থাকে। ঐ নল দ্বারা জল প্রবাহ পাঠানো হয়। T_3 এবং T_4 থার্মোমিটার দ্বারা যথাক্রমে নলে প্রবেশকারী জলের উষ্ণতা এবং নল পরিত্যাগকারী জলের উষ্ণতা মাপা হয়। আবার দণ্ডের গায়ে d দূরত্বে দুইটি গর্ত করা থাকে এবং ঐ গর্ত দুইটি পারদপূর্ণ করিয়া T_1 এবং T_2 থার্মোমিটার দুইটি প্রবেশ করানো থাকে।

স্থায়ী অবস্থা আসিবার পর—অর্থাৎ যখন T_1 ও T_2 থার্মোমিটারদ্বয়ের তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হইবে না তখন একটি নির্দিষ্ট সময়ে নল দিয়া প্রবাহিত জল সংগ্রহ করা হয় এবং ঐ জলের ওজন নির্ণয় করা হয়। অতঃপর T_3 ও T_4 থার্মোমিটারের পাঠ লওয়া হয়।

মনে করি θ_1, θ_2, θ_3 এবং θ_4 হইল যথাক্রমে T_1, T_2, T_3 এবং T_4 থার্মোমিটারের পাঠ।

$\therefore$ তাপ প্রবাহের হার $\dfrac{dQ}{dt} = K \dfrac{\pi r^2(\theta_1 - \theta_2)}{d}$

যেখানে K = তাপ-পরিবাহিতাঙ্ক

r = দণ্ডের ব্যাসার্ধ

যদি t সময়ে m ভরের জল সংগৃহীত হয় তবে প্রতি সেকেণ্ডে জল কর্তৃক শোষিত তাপ

$$= \frac{m(\theta_4 - \theta_3)}{t}$$

সুতরাং $K \frac{\pi r^2(\theta_1 - \theta_2)}{d} = \frac{m(\theta_4 - \theta_3)}{t}$

$$\therefore \quad K = \frac{md}{\pi r^2 t} \cdot \frac{\theta_4 - \theta_3}{\theta_1 - \theta_2} \quad \cdots \quad (4.3)$$

এখানে K ছাড়া অন্য রাশিগুলির মান আমাদের জানা আছে ; সুতরাং K-এর মান নির্ণয় করা যাইবে।

4.7 ফোরবীস্ পদ্ধতিতে তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় (Determination of thermal conductivity by Forbes' method)

লোহ জাতীয় সুপরিবাহী পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা এই পদ্ধতিতে করা হইয়া থাকে। এই পরীক্ষা দুই পর্যায়ে করা হয়। প্রথম পর্যায়কে স্থিতীয় পরীক্ষা (statical experiment) এবং দ্বিতীয় পর্যায়কে গতীয় পরীক্ষা (dynamical experiment) বলা হয়।

স্থিরাবস্থায় কোন দণ্ডের যে-কোন ছেদ দিয়া নির্দিষ্ট সময়ে যে তাপ পরিবাহিত হইবে তাহা দণ্ডের বাকী অংশ কর্তৃক তাপ বিকিরণের সমান হইবে।

এখন স্থির অবস্থায় প্রতি সেকেণ্ডে যে তাপ পরিবাহিত হইবে তাহা

$$\frac{dQ}{dt} = -KA\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$$

দণ্ডের বাকী অংশের দৈর্ঘ্য l হইলে বিকিরণের জন্য তাপক্ষয়

$$= \int_a^b \rho A s\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cdot dx$$

যেখানে ρ = উপাদানের ঘনত্ব

s = উপাদানের আপেক্ষিক তাপ

$l = b - a$

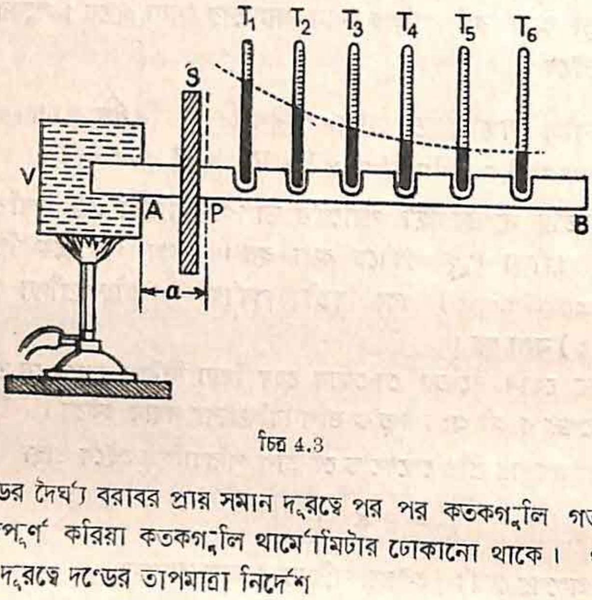
$$\therefore \quad KA\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \int_a^b \rho A s\left(\frac{d\theta}{dt}\right) . dx$$

$$\therefore \quad K = \frac{\rho s \int_a^b \left(\frac{d\theta}{dt}\right) dx}{\left(\frac{d\theta}{dx}\right)}$$

এখানে $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$ এর মান স্থিতীয় পরীক্ষা দ্বারা এবং $\int_a^b \left(\frac{d\theta}{dt}\right) dx$ এর মান গতীয় পরীক্ষা দ্বারা নির্ণয় করা হয়।

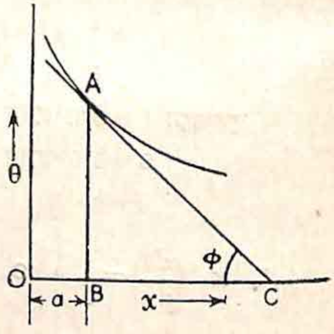
স্থিতীয় পরীক্ষা (Statical experiment)

যে পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় করিতে হইবে তাহার একটি আয়তক্ষেত্রিক দণ্ড AB লওয়া হয় (চিত্র 4.3)। A প্রান্ত V পাত্রে রাখা গলিত সীসার মধ্যে নিমজ্জিত



চিত্র 4.3

থাকে। দণ্ডের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রায় সমান দূরত্বে পর পর কতকগুলি গর্ত কাটা হয় যাহাতে পারদপূর্ণ করিয়া কতকগুলি থার্মোমিটার ঢোকানো থাকে। থার্মোমিটার-গুলি বিভিন্ন দূরত্বে দণ্ডের তাপমাত্রা নির্দেশ করে। স্থায়ী অবস্থায় থার্মোমিটারগুলির পাঠ লওয়া হয়। অতঃপর উত্তপ্ত প্রান্ত হইতে বিভিন্ন বিন্দুর দূরত্বকে (x) X-অক্ষ বরাবর এবং পারিপার্শ্বিক উষ্ণতা হইতে সেই বিন্দুগুলির অতিরিক্ত উষ্ণতাকে (θ) Y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করিয়া 4.4 নং লেখচিত্র আঁকা হয়।



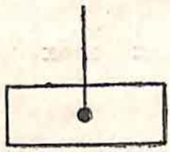
চিত্র 4.4

এইবার অংকিত লেখটির উপর P-এর অবস্থান বিন্দুর ($x=a$) আনুষঙ্গিক বিন্দুতে (A) একটি স্পর্শক টানা হইল।

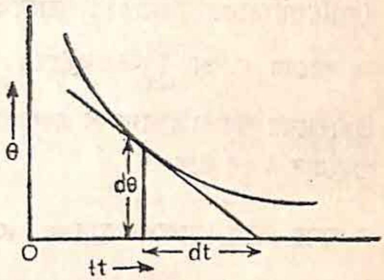
$$\therefore \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=a} = \tan\phi = \frac{AB}{BC}$$

গতীয় পরীক্ষা (Dynamical experiment)

এই পরীক্ষায় পরীক্ষিত দণ্ডটির একটি খণ্ডিত অংশ লইলাম (চিত্র 4.5)। উহার মধ্যে একটি গর্ত আছে যাহার মধ্যে একটি থার্মোমিটার প্রবেশ করানো আছে। ঐ অংশটিকে স্থিতীয় পরীক্ষার উত্তপ্ত প্রান্তের উষ্ণতায় উত্তপ্ত করা হয়। নির্দিষ্ট সময় অন্তর ঐ থার্মোমিটারের



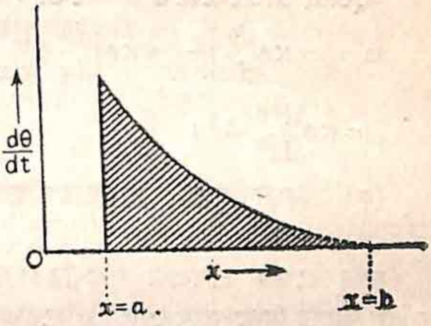
চিত্র 4.5



চিত্র 4.6

পাঠ লওয়া হয়। তারপর একটি লেখচিত্র (চিত্র 4.6) আঁকা হয় যাহাতে সময় (t) লওয়া হয় X-অক্ষ বরাবর এবং পারিপার্শ্বিক হইতে অতিরিক্ত উষ্ণতা (θ) লওয়া হয় Y-অক্ষ বরাবর। এই লেখচিত্র হইতে বিভিন্ন বিন্দুতে স্পর্শক টানিয়া $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ নির্ণয় করা হয়।

এইবার 4.4 লেখচিত্র হইতে বিভিন্ন θ-র মানের জন্য x বাহির করা হয় এবং আরেকটি লেখচিত্র (চিত্র 4.7) আঁকা হয় যাহার X-অক্ষে লওয়া হয় x এবং Y-অক্ষে লওয়া হয় $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$। প্লানিমিটার বা ছক



চিত্র 4.7

কাগজের সাহায্যে 4.7 নং লেখচিত্র হইতে $\int_a^b \left(\frac{d\theta}{dt}\right)dx$ নির্ণয় করা হয়।

মনে করি $\int_a^b \left(\frac{d\theta}{dt}\right)dx =$ সীমাবদ্ধ (shaded) অংশের ক্ষেত্রফল $=$ A

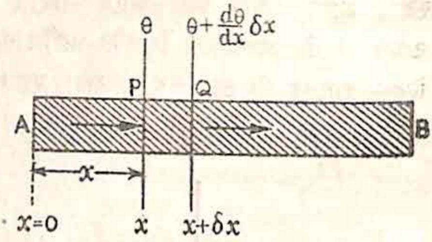
$$\therefore \quad K = \frac{\rho S A}{\tan \phi} \qquad \cdots \qquad (4.4)$$

ρ এবং S-এর মান জানা থাকায় K-এর মান নির্ণয় করা যায়।

4.8 সরল রৈখিক বা ঋজুরেখ তাপ প্রবাহ (Rectilinear flow of heat)

মনে করি, AB একটি অতি দীর্ঘ সমপ্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট দণ্ড (চিত্র 4.8) ইহার A প্রান্তটি উত্তপ্ত। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য অধিক হওয়ায় আমরা মনে করিতেছি যে B

প্রান্তটি পারিপার্শ্বিক উষ্ণতায় আছে। এই দণ্ডটির মধ্যে দুইটি স্তর P এবং Q কল্পনা করিয়া লইলাম যাহাদের A বিন্দু হইতে দূরত্ব যথাক্রমে x এবং $x+\delta x$। মনে করি, P স্তরের উষ্ণতা θ (পারিপার্শ্বিকের তুলনায়)। তাহা হইলে Q স্তরের উষ্ণতা $\frac{d\theta}{dx}\cdot\delta x$ হইবে। যদি উপাদানের পরিবাহিতাঙ্ক K এবং দণ্ডটির প্রস্থচ্ছেদ A হয় তবে



চিত্র 4.8

$$\text{P স্তরে তাপ প্রবেশের হার} = -KA\frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{এবং Q স্তরে তাপ নির্গমনের হার} = -KA\frac{d}{dx}\left(\theta+\frac{d\theta}{dx}\cdot\delta x\right)$$

$$= -KA\left(\frac{d\theta}{dx}+\frac{d^2\theta}{dx^2}\cdot\delta x\right)$$

সুতরাং প্রতি সেকেণ্ডে AB দণ্ডের PQ অংশ কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$Q=\left[-KA\frac{d\theta}{dx}\right]-\left[-KA\left(\frac{d\theta}{dx}+\frac{d^2\theta}{dx^2}\cdot\delta x\right)\right]$$

$$=KA\frac{d^2\theta}{dx^2}\cdot\delta x \text{।} \quad \ldots \quad (4.5)$$

(ক) উষ্ণতা স্থায়ী অবস্থায় পৌঁছানোর পূর্বে (Before the steady state is reached)

যখন দণ্ডের তাপমাত্রা পরিবর্তিত হইতে থাকে, তখন PQ স্তর যে তাপ গ্রহণ করিল তাহার কিছু অংশ শোষণ করিবে এবং বাকী অংশ বিকীর্ণ করিবে।

এখন দণ্ডের উপাদানের ঘনত্ব ρ এবং আপেক্ষিক তাপ S হইলে PQ স্তর কর্তৃক শোষিত তাপ

$$=(A.\delta x.\rho)S\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots \quad (4.6)$$

এবং ঐ স্তর কর্তৃক বিকীর্ণ তাপ $= E.p.\delta x.\theta$ ... (4.7)

যেখানে E = মুক্ত পৃষ্ঠের বিকিরণ ক্ষমতা

p = PQ স্তরের পরিধি

$$\text{অতএব} \quad KA\frac{d^2\theta}{dx^2}=A.\delta x.\rho.S\frac{d\theta}{dt}+Ep\delta x.\theta$$

$$\text{অথবা} \quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{K}{\rho S}\cdot\frac{d^2\theta}{dx^2}-\frac{Ep}{\rho AS}\cdot\theta \quad \ldots \quad (4.8)$$

উষ্ণতা স্থায়ী অবস্থায় পৌঁছানোর পূর্বে ইহাই হইল তাপ প্রবাহের সমীকরণ। এই সমীকরণ **ফুরিয়ের সমীকরণ** (Fourier's equation) নামেও পরিচিত।

(খ) উষ্ণতা স্থায়ী অবস্থায় পৌছানোর পর (After the steady state is reached)

স্থায়ী অবস্থায় PQ স্তরের উষ্ণতা আর বাড়িবে না, কাজেই $\frac{d\theta}{dt}=0$ হইবে।

∴ সমীকরণ (4.8) হইতে পাই

$$\frac{K}{\rho S}\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{Ep}{\rho S.A}\theta$$

অথবা, $$\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{Ep}{AK}\theta=m^2\theta \quad \cdots \quad (4.9)$$

যেখানে $m^2=\frac{Ep}{AK}$

উপরিউক্ত সমীকরণের পরখ সমাধান (trial solution) হইল

$$\theta=A\,e^{mx}+B\,e^{-mx} \quad \cdots \quad (4.10)$$

যেখানে A এবং B হইল দুইটি স্বেচ্ছ অচর (arbitrary constant)। ইহাদের মান সীমাবস্থা (boundary condition) হইতে পাওয়া যায়।

মনে করি, যখন $x=0$, $\theta=\theta_0$ এবং যখন $x=a$; $\theta=0$

এই সীমাবস্থা (4.10) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই

$$\theta_0=A+B$$
$$A=0$$

অতএব $B=\theta_0$ হইবে

এখন A এবং B এর মান (4.10) সমীকরণে বসাইলে পাওয়া যায়

$$\theta=\theta_0\,e^{-mx} \quad \cdots \quad (4.11)$$

ইহাই স্থায়ী অবস্থায় তাপ প্রবাহের সমীকরণ।

যদি একই দৈর্ঘ্য, একই প্রস্থচ্ছেদ এবং সমান পৃষ্ঠ অবস্থাসম্পন্ন অর্থাৎ উদাহরণ-স্বরূপ বলা যায় পাতলা মোম দ্বারা আবৃত কয়েকটি বিভিন্ন ধাতুর তৈয়ারী দণ্ডের এক প্রান্ত একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় উত্তপ্ত করা হইল। দেখা যাইবে যে স্থায়ী অবস্থায় বিভিন্ন দণ্ডে গলিত মোমের দৈর্ঘ্য আলাদা।

মনে করি, গলিত মোমের দৈর্ঘ্য $l_1, l_2, l_3, \cdots$, তাহা হইলে (4.11) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\theta=\theta_0\,e^{-m_1l_1}=\theta_0\,e^{-m_2l_2}=\theta_0\,e^{-m_3l_3}=\cdots$$

$$\therefore\ m_1l_1=m_2l_2=m_3l_3=\cdots$$

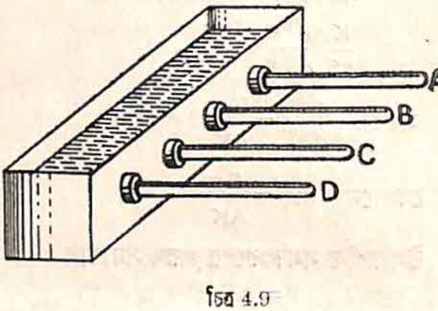
অথবা, $$\sqrt{\frac{Ep}{AK_1}}\,l_1=\sqrt{\frac{Ep}{AK_2}}\,l_2=\sqrt{\frac{Ep}{AK_3}}\,l_3=\cdots$$

অথবা, $$\frac{l_1}{\sqrt{K_1}}=\frac{l_2}{\sqrt{K_2}}=\frac{l_3}{\sqrt{K_3}}=\cdots$$

$$\therefore\ K_1:K_2:K_3:\cdots=l_1^2:l_2^2:l_3^2:\cdots \quad \cdots \quad (4.12)$$

4.9 ইন্‌জেনহজের পরীক্ষা (Ingenhausz's experiment)

এই পরীক্ষায় একই দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কয়েকটি বিভিন্ন ধাতুর দণ্ড A, B, C, D লওয়া হইল (চিত্র 4.9)। ঐ দণ্ডগুলির উপর পাতলা মোমের প্রলেপ দেওয়া থাকে। এই দণ্ডগুলির এক প্রান্ত একটি জলের পাত্রে লাগানো থাকে। এখন ঐ পাত্রের জল ফুটানো হয়। ইহাতে প্রত্যেকটি দণ্ডই তাপ পায়। ঐ তাপ প্রত্যেক দন্ড দিয়া প্রবাহিত হয়। ফলে মোম গলিতে শুরু করে। স্থায়ী অবস্থায় পেঁছানোর পর মোম গলা বন্ধ হইয়া যায়। বিভিন্ন দণ্ডে মোম বিভিন্ন দূরত্ব পর্যন্ত গলিবে।



চিত্র 4.9

যদি $K_1, K_2, K_3, \cdots$ বিভিন্ন দণ্ডের তাপ-পরিবাহিতা এবং $l_1, l_2, l_3, \cdots$ উহাদের গলিত মোমের দৈর্ঘ্য হয় তবে (4.12) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$K_1 : K_2 : K_3 : \cdots = l_1^2 : l_2^2 : l_3^2 : \cdots$$

দুইটি দণ্ডের ক্ষেত্রে পাই

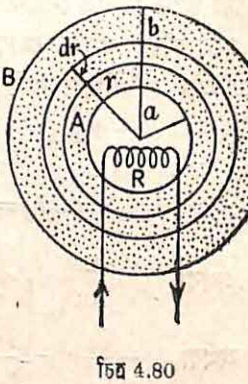
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}$$

কাজেই একটি দণ্ডের তাপ পরিবাহিতা জানা থাকিলে এই পদ্ধতিতে অপর যে-কোন দণ্ডের পরিবাহিতা নির্ণয় করা যায়।

4.10 গোলীয় তাপপ্রবাহ পদ্ধতিতে দানাদার গুঁড়ার তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় (Determination of thermal conductivity of granular powder by spherical heat flow method)

এই পদ্ধতি নাসেলের গোলীয় খোলক (Nusselt's spherical shell) পদ্ধতি নামেও পরিচিত।

একটি পুরু গোলীয় খোল কল্পনা করা হইল যাহার ভিতরের এবং বাহিরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a এবং b। খোলকটির কেন্দ্রে একটি তাপ-উৎস (R) রাখা আছে (চিত্র 4.10)। উৎস হইতে তাপ খোলকের ব্যাসার্ধ বরাবর প্রবাহিত হইবে। কাজেই সমকেন্দ্রীয় গোলীয় তল সমোষ্ণ তল হইবে।



চিত্র 4.80

যে পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় করিতে হইবে তাহার দানাদার গুঁড়া A ও B গোলকের মধ্যে রাখা হয়। মনে করি, ঐ গুঁড়া পদার্থের তাপ পরিবাহিতা হইল K।

কেন্দ্র হইতে r দূরত্বে dr বেধবিশিষ্ট একটি পাতলা তল কল্পনা করা হইল। স্থায়ী অবস্থায় তাপপ্রবাহের হার

$$\frac{dQ}{dt} = -KA\frac{d\theta}{dr}$$

$$= -K.4\pi r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = -4\pi K r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

$$\therefore \frac{dQ}{dt}.\frac{dr}{r^2} = -4\pi K\, d\theta$$

উভয় পক্ষকে সমাকলন করিলে (integrating)

$$\frac{dQ}{dt}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = -4\pi K \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta$$

অথবা, $\frac{dQ}{dt}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = -4\pi K\,(\theta_1 - \theta_2)$
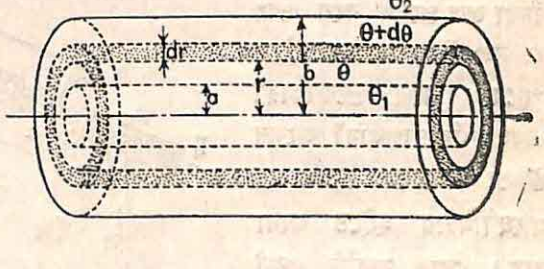
$$\therefore K = \frac{dQ}{dt}.\frac{(b-a)}{ab}.\frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)} \quad \cdots \quad (4.13)$$

এই সমীকরণের $\frac{dQ}{dt}$ নির্ণয় করা হয় উৎসের তাপ সরবরাহ হইতে। θ_2 এবং θ_1 উষ্ণতা নির্ণয় করা হয় তাপ বৈদ্যুত-যুগ্ম (thermo-couple) দ্বারা। গোলকটির ভিতরের এবং বাহিরের ব্যাসার্ধ জানা থাকায় অতি সহজেই K-এর মান নির্ণয় করা যায়।

4.11 বেলনাকার নলের দেওয়ালের ভিতর দিয়া তাপের প্রবাহ (Flow of heat through the walls of a cylindrical tube)

মনে করি, l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি ফাঁপা বেলনাকার নলের ভিতরের এবং বাহিরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a এবং b। স্থায়ী অবস্থায় নলের ভিতরের এবং বাহিরের পৃষ্ঠের উষ্ণতা θ_1 এবং θ_2 $(\theta_1 > \theta_2)$।

এইবার বেলনাকার নলের অক্ষ হইতে r দূরত্বে dr বেধ বিশিষ্ট একটি বেলনাকার খোল (cylindrical shell) লওয়া হইল (চিত্র 4.11)। মনে করি, ঐ খোলের ভিতরের তলের উষ্ণতা θ এবং বাহিরের তলের উষ্ণতা $\theta + d\theta$।



চিত্র 4.11

$\therefore$ খোলটির ভিতর দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে তাপ প্রবাহের পরিমাণ

$$Q = -KA\frac{d\theta}{dr}$$

$$= -K2\pi rl\frac{d\theta}{dr} \quad \left[\because \begin{array}{l} A = \text{খোলের ক্ষেত্রফল} \\ = 2\pi rl \end{array} \right]$$

অথবা $\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi Kl}{Q}.d\theta$ ... (4.14)

(4.14) সমীকরণকে সমাকলন করিয়া পাই

$$\int_a^b \frac{dr}{r} = -K\frac{2\pi l}{Q}\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

অথবা, $\left[\log_e r\right]_a^b = -K\frac{2\pi l}{Q}\left[\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$

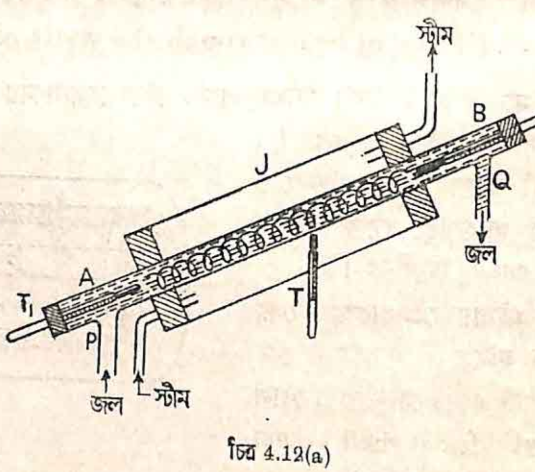
$$\log_e \frac{b}{a} = K\frac{2\pi l}{Q}\left[\theta_1 - \theta_2\right]$$

অথবা $2{\cdot}3026 \log_{10} \frac{b}{a} = K\frac{2\pi l}{Q}(\theta_1 - \theta_2)$

$$\therefore \quad K = Q\frac{2{\cdot}3026 \log_{10} \frac{b}{a}}{2\pi l(\theta_1 - \theta_2)} \qquad \cdots (4.15)$$

(ক) কাচনলের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় (Determination of thermal conductivity of a glass tube)

AB একটি কাচনল [চিত্র 4.12(a)]। ঐ নলটি একটি স্টীম জ্যাকেট J-এর ভিতরে রাখা আছে যাহার উষ্ণতা থার্মোমিটার (T) হইতে পাওয়া যায়। P এবং Q দুইটি পার্শ্বনল। P নল দিয়া জল প্রবেশ করে এবং Q নল দিয়া বাহির হইতে পারে। নলে প্রবেশকারী এবং পরিত্যাগকারী জলের উষ্ণতা যথাক্রমে T_1 ও T_2 থার্মোমিটার হইতে জানা যায়। সমগ্র যন্ত্রটি একটু কাত করিয়া রাখা হয় যাহাতে জল নিচ দিক্ হইতে উপরের দিকে প্রবাহিত হইতে পারে।



চিত্র 4.12(a)

প্রথমে AB নল দিয়া জলপ্রবাহ এবং জ্যাকেট J-এর মধ্য দিয়া স্টীম পাঠানো হয়। বাহিরের পৃষ্ঠ হইতে তাপ নলের ভিতরের পৃষ্ঠে আসিবে এবং জলকে উত্তপ্ত করিবে। কিছুক্ষণ পরে থার্মোমিটারগুলি স্থায়ী উষ্ণতার পাঠ নির্দেশ করিবে।

মনে করি, T_1 এবং T_2 থার্মোমিটারের পাঠ যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2 এবং স্টীমের উষ্ণতা θ.

$\therefore$ জলের গড় উষ্ণতা $=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$

সুতরাং নলের ভিতর দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে যে পরিমাণ তাপ প্রবাহিত হইবে তাহা

$$Q=\frac{2\pi Kl\left(\theta-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\log_e \dfrac{b}{a}}$$

যেখানে K = কাচের পরিবাহিতা

a = কাচনলের ভিতরের ব্যাসার্ধ

b = কাচনলের বাহিরের ব্যাসার্ধ

যদি প্রতি সেকেণ্ডে কাচনল দিয়া প্রবাহিত জলের ভর m হয় তবে প্রতি সেকেণ্ডে ঐ জল কর্তৃক শোষিত তাপ $=m(\theta_2-\theta_1)$

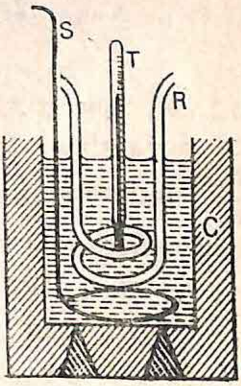
$$\text{সুতরাং}\quad \frac{2\pi Kl\left(\theta-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\log_e \dfrac{b}{a}}=m(\theta_2-\theta_1)$$

$$\therefore\quad K=\frac{m(\theta_2-\theta_1)\log_e \dfrac{b}{a}}{2\pi l\left(\theta-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\qquad\cdots\quad(4.16)$$

যেহেতু এই সমীকরণের ডানদিকের সব কয়টির রাশির মান জানা আছে, K-এর মান সহজেই নির্ণয় করা যায়।

(খ) **রবার নলের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয়** (Determination of thermal conductivity of a rubber tube):

4.12(b) চিত্রে R হইল একটি রবার নল যাহা একটি জলপূর্ণ ক্যালরিমিটার C-এর মধ্যে রাখা আছে; থার্মোমিটার T-এর সাহায্যে জলের উষ্ণতা দেখা হয়। তারপর রবার নলের মধ্য দিয়া একটি নির্দিষ্ট সময় (t) ধরিয়া স্টীম পাঠানো হয়। ইহার পর স্টীম চালনা বন্ধ করিয়া জল S-এর সাহায্যে আলোড়িত করা হয় এবং থার্মোমিটারের উষ্ণতার পাঠ লওয়া হয়।



চিত্র 4.12(b)

যদি জলের ভর এবং ক্যালরিমিটারের জলসম যথাক্রমে m এবং w হয়, তবে প্রতি সেকেণ্ডে জল ও ক্যালরিমিটার বা তাপমাপী কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$Q=\frac{(m+w)(\theta_2-\theta_1)}{t} \qquad \cdots \quad (4.17)$$

যেখানে θ_1 = জলের প্রাথমিক তাপমাত্রা

θ_2 = জলের চূড়ান্ত তাপমাত্রা

এখন এই পরিমাণ তাপ নলের গাত্র দিয়া পরিবাহিত হইতেছে।

∴ প্রতি সেকেণ্ডে প্রবাহিত তাপ

$$Q=\frac{K.2.\pi l\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\log_e\frac{b}{a}} \qquad \cdots \quad (4.18)$$

যেখানে θ = স্টীমের তাপমাত্রা

l = জলের মধ্যে নিমজ্জিত নলের দৈর্ঘ্য

a = নলের অন্তঃব্যাসার্ধ

b = নলের বহিঃব্যাসার্ধ

K = রবারের তাপ-পরিবাহিতা

∴ (4.17) এবং (4 18) সমীকরণদ্বয় হইতে

$$\frac{K.2\pi l\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\log_e\frac{b}{a}}=\frac{(m+w)(\theta_2-\theta_1)}{t}$$

$$\therefore\ K=\frac{(m+w)(\theta_2-\theta_1)}{2\pi l.t}\cdot\frac{\log_e\frac{b}{a}}{\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \qquad \cdots \quad (4.19)$$

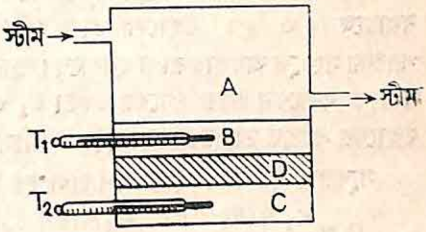
4.12 লী এবং চার্লটনের চাকতি পদ্ধতিতে কুপরিবাহী বস্তুর তাপ পরিবাহিতা নির্ণয় (Lee's and Charlton's method to determine the thermal conductivity of poor conductor)

এই পদ্ধতিতে কোন কুপরিবাহী বস্তু—যেমন, কাঠ, কাচ প্রভৃতির তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয় করা হয়। এখানে কুপরিবাহী বস্তুকে চাকতির আকারে লওয়া হয়।

A একটি পিতলের বেলনাকার কক্ষ যাহাতে দুইটি নল আছে। উপরের নল দিয়া স্টীম প্রবেশ করে এবং নিচের নল দিয়া স্টীম বাহির হয়। পরীক্ষাধীন চাকতি D-কে একটি নিকেল করা পিতলের ফলক C-এর উপর রাখা আছে। স্টীম কক্ষের তলার অংশ মোটা ফলকের (B) মতো। চাকতি এবং B ও C ফলকের আয়তন

সমান। স্টীমের উষ্ণতা T_1 থার্মোমিটার দ্বারা এবং C ফলকের উষ্ণতা T_2 থার্মোমিটার দ্বারা মাপা হয়। 4.13 চিত্রে লী'র এবং চার্লটনের যন্ত্রটির ছবি দেওয়া আছে।

এইবার স্টীম কক্ষের ভিতর দিয়া স্টীম পাঠানো হয়। T_1 এবং T_2 থার্মোমিটারের উষ্ণতা ক্রমাগত বৃদ্ধি পাইবে। কিছুক্ষণ পর উষ্ণতা স্থির হইবে। মনে করি স্থির অবস্থায় T_1 এবং T_2 থার্মোমিটারের পাঠ যথাক্রমে θ_1 এবং θ_2।



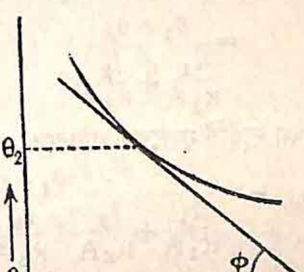
চিত্র 4.13

সুতরাং চাক্তির ভিতর দিয়া প্রতি সেকেণ্ডে যে তাপ-পরিবাহিত হইবে তাহা

$$Q = \frac{KA(\theta_2 - \theta_1)}{d},$$ যেখানে d = চাক্তির বেধ এবং A = চাক্তির ক্ষেত্রফল।

স্থায়ী অবস্থায় C ফলকটি প্রতি সেকেণ্ডে এই তাপ পাওয়া সত্ত্বেও উহার উষ্ণতা বাড়িতেছে না। কাজেই বলা যায় ঐ তাপ বিকিরণের দরুণ নষ্ট হইতেছে।

এখন বিকিরণের দরুণ যে তাপ হারাইতেছে তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। ইহার জন্য C ফলকের উপরের চাকতি এবং স্টীম কক্ষ সরাইয়া ফলকটিকে T_1 থার্মোমিটার পাঠ অপেক্ষা কয়েক ডিগ্রী বেশী উষ্ণতায় বার্ণারের সাহায্যে উত্তপ্ত করা হয়। এইবার উহাকে একই পরিবেশের মাধ্যমে ঠাণ্ডা করা হয়। নির্দিষ্ট সময় অন্তর T_2 থার্মোমিটারের পাঠ লইতে হইবে। তারপর $(t-\theta)$ লেখ অংকন করা হয় (চিত্র 4.14)।



চিত্র 4.14

ঐ লেখচিত্র হইতে θ_2 উষ্ণতায় $\frac{d\theta}{dt}$ নির্ণয় করা হয়।

$$\therefore \text{ বিকিরণের দরুণ তাপক্ষয়} = mS\frac{d\theta}{dt}$$

যেখানে, m = C ফলকটির ভর

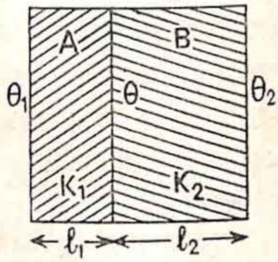
S = আপেক্ষিক তাপ

$$\therefore \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)}{d} = mS\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore K = \frac{mSd\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{A(\theta_1 - \theta_2)} \qquad \ldots (4.20)$$

4.13 সংযুত ফলকের মধ্য দিয়া পরিবহণ (Conduction through composite slabs)

মনে করি, A এবং B দুইটি আয়তক্ষেত্রিক পাত যাহাদের ক্ষেত্রফল A এবং দৈর্ঘ্য যথাক্রমে l_1 ও l_2। উহাদের তাপ পরিবাহিতা K_1 এবং K_2। এই ফলক দুইটি পরস্পর সংযুত অবস্থায় রাখা হইয়াছে। স্থায়ী অবস্থায় সংযুত ফলকের উভয় প্রান্তের উষ্ণতা θ_1 ও θ_2 এবং উহাদের সংযুত তলের উষ্ণতা হইল θ (চিত্র 4.15)।



চিত্র 4.15

সুতরাং স্থায়ী অবস্থায় তাপ প্রবাহের হার,

$$Q=\frac{K_1A(\theta_1-\theta)}{l_1}=\frac{K_2A(\theta-\theta_2)}{l_2}$$

$$=\frac{\theta_1-\theta}{\frac{l_1}{K_1A}}=\frac{\theta-\theta_2}{\frac{l_2}{K_2A}}$$

$$=\frac{(\theta_1-\theta)+(\theta-\theta_2)}{\frac{l_1}{K_1A}+\frac{l}{K_2A}}$$

$$=\frac{\theta_1-\theta_2}{\frac{l_1}{K_1A}+\frac{l_2}{K_2A}}$$

এখন দুইটি ফলকের পরিবর্তে n সংখ্যক ফলক রাখিলে আমরা লিখিতে পারি

$$Q=\frac{\theta_1-\theta_n}{\frac{l_1}{K_1A}+\frac{l_2}{K_2A}+\frac{l_3}{K_3A}+\cdots+\frac{l_n}{K_nA}}$$

$$=\frac{\theta_1-\theta_n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{l_i}{K_iA}}$$

সুতরাং আমরা তড়িত প্রবাহের সহিত সাদৃশ্য রাখিয়া বলিতে পারি

$$\text{তাপ প্রবাহ}=\frac{\text{উষ্ণতার পার্থক্য}}{\text{তাপীয় রোধ}}$$

যেখানে $\sum\frac{l}{KA}$ কে বলা হয় সংযুত ফলকের তাপীয় রোধ (thermal resistance)

4.14 পরিবর্তী বেধবিশিষ্ট পুরু বরফের স্তরের মধ্য দিয়া পরিবহণ পদ্ধতিতে তাপ সঞ্চালন (Heat transfer by conduction through a slab of ice of varying thickness)

সাধারণত শীতপ্রধান দেশে উষ্ণতা 0°C-এর কম হওয়ায় জলাশয়ের জল জমিয়া বরফ হয়। বরফের স্তর যত পুরু হইতে থাকে, তাপকে ক্রমশ পরিবর্তী বেধবিশিষ্ট বরফের মধ্য দিয়া পরিবহণ পদ্ধতিতে সঞ্চালিত হইতে হয়।

মনে করি, জলাশয়ের উপরিতলের উষ্ণতা $-\theta^\circ C$ এবং t সেকেণ্ড পরে জলাশয়ের উপর x বেধবিশিষ্ট বরফ জমিয়া গিয়াছে। ধরি, জলাশয়ের তলদেশের ক্ষেত্রফল A। এখন dt সময়ে dx বেধের বরফ জমিলে উক্ত বরফের ভর হইবে $m = A \times dx \times \rho$

যেখানে ρ হইল $0^\circ C$ উষ্ণতায় বরফের ঘনত্ব।

$\therefore$ জল কর্তৃক বর্জিত তাপ $= A \times dx \times \rho \times L$

(L = বরফ গলনের লীন তাপ)।

উক্ত তাপ dx বেধের বরফের স্তরের মধ্য দিয়া পরিবাহিত হইয়াছে।

$$\therefore \quad A \times dx \times \rho \times L = \frac{K.A.\theta.dt}{x}$$

অথবা, $x\,dx = \dfrac{K\theta}{\rho L}\,dt$

সমাকলন করিয়া (integrate) পাই

$$\frac{x^2}{2} = \frac{K\theta}{\rho L}\,t + C$$

যেখানে C হইল একটি ধ্রুবক যাহার মান সীমাস্থ শর্ত হইতে পাওয়া যায়।

এখন, $t=0$ হইলে $x=0$ হয়

অতএব $C=0$

সুতরাং $\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{K\theta}{\rho L}\,t$

$$\text{অথবা,} \quad t = \frac{\rho L}{2K\theta}.x^2 \qquad \cdots \quad (4.21)$$

x বেধবিশিষ্ট বরফ জমিতে যে সময় লাগিবে তাহা উপরি-উক্ত সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়।

আবার যখন (i) $t=0, \quad x=x_1$

এবং (ii) $t=t_1 \quad x=x_2$ হইলে

$$C = \frac{x_1^2}{2} \text{ হইবে}$$

$$\therefore \quad \frac{x_2^2}{2} = \frac{K\theta}{\rho L}\,t_1 + \frac{x_1^2}{2}$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad t_1 = \frac{\rho L}{2K\theta}(x_2^2 - x_1^2) \qquad \cdots \quad (4.22)$$

4.15 তাপ-পরিবাহিতা ও তড়িৎ পরিবাহিতার সম্পর্ক (Relation between thermal and electrical conductivity)

বিভিন্ন পরীক্ষা হইতে দেখা গিয়াছে, যে সকল পদার্থ তাপের সুপরিবাহী তাহারা তড়িতেরও সুপরিবাহী। 1853 খৃষ্টাব্দে ওয়াইডম্যান-ফ্রানজ (Widemann-Franz) পরীক্ষা করিয়া দেখান যে সকল **ধাতুর তাপ পরিবাহিতাঙ্ক এবং তড়িত**

পরিবাহিতাঙ্কের অনুপাত সমান, ঐ অনুপাত অনপেক্ষ উষ্ণতার (absolute temperature) সহিত সমানুপাতিক অর্থাৎ $\frac{K}{\sigma T}$ = ধ্রুবক, যেখানে K = ধাতুর তাপ পরিবাহিতাঙ্ক, σ = ধাতুর তড়িত পরিবাহিতাঙ্ক এবং T = অনপেক্ষ উষ্ণতা।

উদাহরণ (Examples)

1. একটি ধাতব প্লেটের ভিতর দিয়া এক সেকেণ্ডে 1500 cal তাপ প্রবাহিত হইতেছে। প্লেটের ক্ষেত্রফল 30 sq. cm এবং বেধ 5 mm হইলে প্লেটের দুই তলের উষ্ণতা পার্থক্য কত হইবে? ধাতুর তাপ পরিবাহিতাঙ্ক = 1·58 c.g.s. unit.

(Heat is flowing through a metal plate at the rate of 1500 cal per second. If the area of the plate be 30 sq. cm and thickness be 5 mm what will be the temperature difference between the faces? Thermal conductivity of the metal = 1·53 c. g. s. units.)

আমরা জানি $Q = \frac{KA(\theta_2 - \theta_1)t}{d}$

এক্ষেত্রে K = 1·53 c.g.s. units

Q = 1500 cal

$t = 1$ second

$d = 5$ mm

A = 30 sq. cm

$\therefore \quad 1500 = \frac{1{\cdot}53 \times 30(\theta_2 - \theta_1) \times 1}{0{\cdot}5}$

$\therefore \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{1500 \times 0{\cdot}5}{1{\cdot}53 \times 30}$

$= 16{\cdot}4^\circ C$।

2. 20 cm দৈর্ঘ্য এবং 20 sq. cm ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি দণ্ডের একপ্রান্ত স্টীমগাহে রাখা আছে এবং অপর প্রান্ত জলপ্রবাহের সাহায্যে 20°C এ স্থির রাখা হইয়াছে। প্রবেশের মুখে জলের উষ্ণতা 10°C এবং প্রতি সেকেণ্ডে 5 গ্রাম জল প্রবাহিত হইলে, দণ্ডের উপাদানের পরিবাহিতাঙ্ক কত হইবে?

(One edge of a bar having length of 20 cm and cross-section of 20 sq. cm is kept in a steam bath and the temperature of the other edge is kept fixed by water flow at 20°C. If the temperature of water at the entrance being 10°C and the flow of water 5 grams per second, what will be the thermal conductivity of the material of the rod?)

আমরা জানি, $\frac{K.A(\theta_2-\theta_1)t}{d}=m(\theta_4-\theta_3)$

এক্ষেত্রে $A=20$ sq. cm

$d=20$ cm

$t=1$ second

$\theta_2-\theta_1=(100-20)=80^\circ c$

$\theta_4-\theta_3=(20-10)=10^\circ c$

সুতরাং $\frac{K\times 20\times 80}{20}=5\times 10$

$\therefore\ K=\frac{5\times 10\times 20}{80\times 20}=0{\cdot}625$ c g.s. unit।

3. 30 cm দীর্ঘ, 1 cm বহির্ব্যাস এবং 8 mm রন্ধ্রযুক্ত একটি কাচনলের ভিতর দিয়া প্রতি মিনিটে 500 গ্রাম জল প্রবাহিত হইতেছে। নলের চতুর্দিকে 760 mm পারদ চাপে স্টীম বেষ্টিত আছে। প্রবেশ মুখে এবং বহির্গমন মুখে জলের উষ্ণতা 20°c এবং 30°c হইলে কাচের পরিবাহিতাংক কত হইবে?

(A steady stream of water flowing at the rate of 500 grams a minute through a glass tube 30 cm long, 1 cm in external diameter and 8 mm in bore, the outside of which is surrounded by steam at a pressure of 760 mm of mercury, is raised in temperature from 20°c to 30°c as it passes through the tube. Find the thermal conductivity of glass.) [C.U. '62]

আমরা জানি, $K=\frac{m(\theta_2-\theta_1)\log_e\frac{b}{a}}{2\pi l\left\{\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right\}t}$

এক্ষেত্রে $m=500$ gram

$b=0{\cdot}5$ cm

$a=0{\cdot}4$ cm

$\theta=100^\circ c$

$\theta_1=20^\circ c$

$\theta_2=30^\circ c$

$t=60$ second

এবং $l=30$ cm

সুতরাং $K=\frac{500\times(30-20)\times 2{\cdot}302\times\log_{10}\frac{5}{4}}{2\times 3{\cdot}14\times 30\times\{100-\frac{30+20}{2}\}\times 60}$

$=\frac{500\times 10\times 2{\cdot}302\times 0{\cdot}0969}{2\times 3{\cdot}14\times 30\times 75\times 60}$

$=0{\cdot}0013$ c.g.s. unit।

4. কোন জলাশয়ের উপর 5 cm পুরু বরফ জমিয়া আছে এবং জলাশয়ের উপরের বায়ুর উষ্ণতা -20°c. কত সময়ে বরফ ফলকের বেধ দ্বিগুণ হইবে? বরফের পরিবাহিতাংক = 0·005, বরফের ঘনত্ব = 0·92 gram/c.c. এবং বরফের লীন তাপ = 80 cal/gram.

(The thickness of ice on a lake is 5 cm and the temperature of air above is -20°c. Find the time taken for the thickness of ice to be doubled. Thermal conductivity of ice = 0·005, density of ice = 0·91 gram/c.c , latent heat = 80 cal/gram.) [C.U. '68]

আমরা জানি,

$$t_1 = \frac{\rho L}{2K\theta}(x_2^2 - x_1^2)$$

এক্ষেত্রে $\rho = 0{\cdot}91$ gram/c.c.,

$L = 80$ cal

$K = 0{\cdot}005$ c.g.s. unit

$\theta = 20^\circ$C

$x_1 = 5$ cm

এবং $x_2 = 10$ cm

$$\therefore \quad t_1 = \frac{0{\cdot}91 \times 80}{2 \times 0{\cdot}005 \times 20}(10^2 - 5^2)$$

$= 7$ hours/35 minute.

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. তাপ পরিবাহিতাঙ্কের সংজ্ঞা লিখ। তাপ পরিবাহিতা এবং উষ্ণতামাপক পরিবাহিতার পার্থক্য বুঝাইয়া দাও।

(Define thermal conductivity and distinguish between thermal conductivity and thermometric conductivity of a substance)

(C.U. '63)

2. কোন বস্তুর তাপ পরিবাহিতাঙ্কের সংজ্ঞা লেখ। তাপের সুপরিবাহী কোন বস্তুর তাপ পরিবাহিতাংক কিরূপে নির্ণয় করিবে?

(Define thermal conductivity of a substance. How would you measure the thermal conductivity of a good conductor of heat ?) (C.U. '64)

3. তাপের কুপরিবাহী কোন বস্তুর তাপ পরিবাহিতাংক নির্ণয়ের জন্য লী-এর পদ্ধতি বর্ণনা কর এবং অন্তর্নিহিত মূলতত্ত্ব ব্যাখ্যা কর।

(Define Lee's method of determining the thermal conductivity of poor conductors of heat and explain the underlying theory.) (C.U. '66)

4. দেখাও যে, মোমের প্রলেপযুক্ত বিভিন্ন উপাদানের দণ্ডের এক প্রান্তের উষ্ণতা সমান হইলে উহাদের পরিবাহিতাঙ্ক মোম-গলনের দৈর্ঘ্যের বর্গের সমানুপাতিক হইবে।

(Show that the thermal conductivity of the different bars each covered by wax with their ends fixed at certain temperature vary on the square of the lengths along which the wax has melted.)

5. একটি বরফ-বাক্স 1·75 cm পুরু কাঠ দিয়া তৈয়ারী এবং ভিতরে 3 cm পুরু কর্কের লাইনিং আছে। কর্কের ভিতরকার পৃষ্ঠের উষ্ণতা 0°C এবং কাঠের বাহিরের পৃষ্ঠের উষ্ণতা 12°C হইলে, উভয়ের আন্তঃতলের উষ্ণতা কত হইবে? কাঠের পরিবাহিতাঙ্ক = 0·00060 c.g.s. এবং কর্কের পরিবাহিতাঙ্ক = 0·00012 c.g.s.।

(An ice-box is built of wood 1·75 cm thick lined with cork 3·0 cm thick. If the temperature of the inner surface of the cork be 0°C and that the outer surface of wood 12°C. What is the temperature of the interface? The conductivity of wood = 0·00060 c.g.s. and that of cork is 0·00012 c.g.s.) (C.U. '46)

[Ans. 10·71°C]

6. একটি জলাশয়ের উপর 2 cm পুরু বরফ জমিয়াছে, উপরিস্থ বায়ুর উষ্ণতা −15°C; বরফের বেধ বৃদ্ধির হার প্রতি ঘণ্টায় সেণ্টিমিটার এককে নির্ণয় কর। বরফের $K = 0·004$ c.g.s. একক এবং $\rho = 0·9$ gram/c.c., $L = 80$ cal/gram.

(A lake is covered with ice 2 cm thick. The temperature of the overlying air is −15°C. Find the rate of thickening of ice, expressed in cm per hour. For ice $K = 0·004$ c.g.s. unit, $\rho = 0·9$ gram/c.c., $L = 80$ cal/gram.) (C.U. '67)

[Ans. 1·5 cm/hour.]

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

বিকিরণ

(Radiation)

5.1 সূচনা (Introduction)

মাধ্যমকে উত্তপ্ত না করিয়া যে পদ্ধতিতে তাপ উত্তপ্ত বস্তু হইতে শীতল বস্তুর দিকে সঞ্চালিত হয় তাহাকে বিকিরণ বলা হয়। কোন শীতল বস্তু উত্তপ্ত বস্তু হইতে বিকিরণের মাধ্যমে যে শক্তি গ্রহণ করে তাহাকে বিকীর্ণ তাপ বলা হয়।

পৃথিবী সূর্য হইতে এই পদ্ধতিতে তাপশক্তি লাভ করে। সূর্য হইতে বিকীর্ণ তাপ মাত্র 8 মিনিট 15 সেকেণ্ডে পৃথিবীতে পৌঁছায়। তাপ সঞ্চালনের সময় কাল্পনিক মাধ্যম ঈথর উত্তপ্ত হয় না। এই তাপ তরঙ্গের আকারে সঞ্চালিত হয়। এই তাপতরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য আলোকের তরঙ্গদৈর্ঘ্য অপেক্ষা দীর্ঘতর। পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গিয়াছে যে বিকীর্ণ তাপ এবং দৃশ্যমান আলোকের প্রকৃতি একই। বিকীর্ণ তাপ সরলরেখায় চলাচল করে। আলোকের ন্যায় বিকীর্ণ তাপ প্রতিফলন (reflection), প্রতিসরণ (refraction), ব্যতিচার (interference), সমবর্তন (polarisation), অববর্তন (diffraction) প্রভৃতি সূত্র মানিয়া চলে।

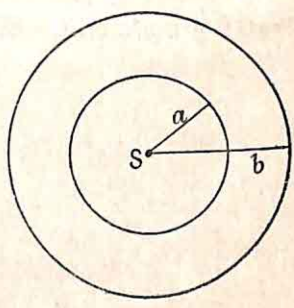
5.2 বিপরীত বর্গীয় বা ব্যস্ত বর্গসূত্র (Inverse-square law)

কোন তাপ উৎস হইতে কোন বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রতি সেকেণ্ডে লম্বভাবে আপতিত বিকীর্ণ তাপ অর্থাৎ বিকীর্ণ তাপের প্রাবল্য (intensity), তাপ উৎস হইতে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতী। ইহাকেই বিপরীত বর্গীয় সূত্র বলা হয়।

মনে করি, একটি ফাঁপা পাতলা গোলকের কেন্দ্রে S হইল তাপের একটি বিন্দু-উৎস। এই উৎস হইতে প্রতি সেকেণ্ডে Q পরিমাণ তাপ নিঃসৃত হইতেছে এবং উহা উক্ত গোলকের অন্তঃস্থ দেওয়ালে গিয়া পড়িতেছে। সুতরাং তাপ-উৎস ও বস্তুর ভিতর দূরত্ব a (কারণ ঐ গোলকের ব্যাসার্ধ a) হওয়ায় বিকীর্ণ তাপের প্রাবল্য

$$I_1 = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

এইবার যদি S-কে কেন্দ্র করিয়া অপেক্ষাকৃত বড় গোলক লওয়া যায়, যাহার ব্যাসার্ধ b (চিত্র 5.1); তবে বিকীর্ণ তাপের প্রাবল্য



চিত্র 5.1

$$I_2 = \frac{Q}{4\pi b^2}$$

অতএব $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

অর্থাৎ $I \propto \dfrac{1}{r}$ [যেখানে r = যে কোন গোলকের ব্যাসার্ধ]

সুতরাং বিকীর্ণ তাপের প্রাবল্য উৎস হইতে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতী।

5.3 উৎসর্জন ক্ষমতা এবং অবশোষণ ক্ষমতা (Emissive power and absorptive power)

কোন উত্তপ্ত বস্তু হইতে নিঃসৃত তাপের মধ্যে সব প্রকারের তরঙ্গদৈর্ঘ্য থাকে। বিকীর্ণ তাপের প্রকৃতি বস্তুর ভৌতিক অবস্থার (physical condition) উপর নির্ভরশীল। বস্তু কর্তৃক বিকীর্ণ তাপের পরিমাণ (i) বস্তুর উষ্ণতা, (ii) পারিপার্শ্বিক উষ্ণতা, (iii) যে সময় ধরিয়া তাপ বিকীর্ণ হয় এবং (iv) বস্তু-পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে।

নির্দিষ্ট উষ্ণতায় কোন বস্তু প্রতি বর্গ একক ক্ষেত্রফলে প্রতি সেকেণ্ডে যে পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে এবং একই উষ্ণতায় একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি কৃষ্ণিকা (blackbody) এক সেকেণ্ডে যে তাপ বিকিরণ করে—এই দুইয়ের অনুপাতকে **উৎসর্জন ক্ষমতা বা নিঃসারক ক্ষমতা** বলে।

আবার বিকিরণ ক্ষমতা তরঙ্গদৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করে। মোট শক্তি যাহা কোন বস্তুর একক ক্ষেত্রফল হইতে একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় প্রতি সেকেণ্ডে লম্বভাবে λ এবং $\lambda+d\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সীমার মধ্যে নিঃসৃত হয় তাহাকে উক্ত উষ্ণতায় λ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের জন্য **উৎসর্জন ক্ষমতা** বলা হয়। ইহাকে $e_\lambda d\lambda$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

নির্দিষ্ট সময়ে কোন বস্তু উহার উপর আপতিত বিকীর্ণ তাপের যে পরিমাণ অবশোষণ করে এবং ঐ বস্তুর উপর মোট যে পরিমাণ বিকীর্ণ তাপ আপতিত হয়—এই দুইয়ের অনুপাতকে বস্তুটির **অবশোষণ ক্ষমতা** বলা হয়।

মনে করি, প্রতি সেকেণ্ডে কোন বস্তুর উপর dQ_λ পরিমাণ তাপ আপতিত হইয়াছে। λ এবং $\lambda+d\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সীমার মধ্যে ঐ বিকীর্ণ তাপের $a_\lambda dQ_\lambda$ অংশ বস্তু কর্তৃক অবশোষিত হইল। তখন a_λকে বস্তুটির **অবশোষণ ক্ষমতা** বলা হয়।

5.4 আদর্শ কৃষ্ণিকা বা পূর্ণ বিকিরক (Perfectly blackbody)

কোন বিকীর্ণ শক্তি বস্তুর উপর আপতিত হইলে উহার কিছু অংশ প্রতিফলিত, কিন্তু অংশ বস্তু কর্তৃক অবশোষিত হয় এবং বাকী অংশ অপসৃত (transmitted) হয়। এখন যদি বিকীর্ণ তাপের r ভগ্নাংশ বস্তু কর্তৃক প্রতিফলিত, a অংশ অবশোষিত এবং t অংশ অপসৃত হয় তবে আমরা বলিতে পারি

$$r+a+t=1$$

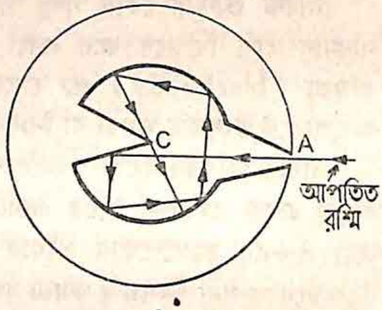
যখন কোন বস্তু আপতিত সকল তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকিরণ সম্পূর্ণভাবে অবশোষণ করে তখন সেই বস্তুকে **আদর্শ কৃষ্ণিকা বা পূর্ণ বিকিরক** বলা হয়। এক্ষেত্রে $a=1$, $r=0$ এবং $t=0$। বাস্তবে আদর্শ কৃষ্ণিকা বস্তু বিরল।

আদর্শ কৃষ্ণিকার উপর যে কোন তরঙ্গদৈর্ঘ্যের বিকীর্ণ তাপ আপতিত হউক না কেন উহা সেই তাপের সবটাই অবশোষণ করিবে। উহা যে তাপ বিকীর্ণ করে তাহা পদার্থের কোন বিশেষ ধর্মের উপর নির্ভর করে না, কেবলমাত্র ঐ কৃষ্ণিকার উষ্ণতার উপর নির্ভর করে।

কোন কৃষ্ণিকা নির্দিষ্ট উষ্ণতায় যে সকল তরঙ্গদৈর্ঘ্য অবশোষণ করে, উক্ত উষ্ণতায় উহা সেই সকল তরঙ্গ নিঃসৃত করিতে পারে। কৃষ্ণিকা উত্তম অবশোষক এবং পূর্ণ বিকিরক। ভুসা (Lamp black), প্লাটিনাম কালি (Platinum black) যথাক্রমে 96% এবং 98% আপতিত বিকিরণ অবশোষণ করিতে পারে।

(ক) **ফেরী'র কৃষ্ণিকা** (Fery's blackbody)

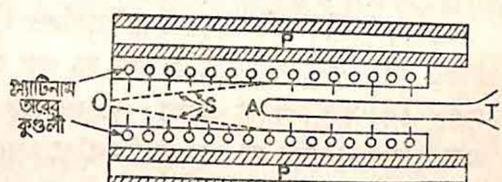
5.2 চিত্রে ফেরী'র কৃষ্ণিকা দেখানো হইয়াছে। ইহা একটি দুই দেওয়াল-বিশিষ্ট ফাঁপা গোলক। ভিতরের দেওয়ালে ভুসা মাখানো থাকে এবং বাহিরের দিক্‌টা নিকেল পালিশ করা থাকে। দুই দেওয়ালের মধ্যবর্তী স্থান বায়ুশূন্য করা হয় যাহাতে পরিবহণ ও পরিচলন পদ্ধতিতে তাপ নষ্ট না হয়। ঐ গোলকের A হইল একটি সূক্ষ্ম ছিদ্র। ছিদ্রের বিপরীত দিকে একটি শঙ্কু C থাকে যাহাতে আগত বিকীর্ণ তাপ সরাসরি প্রতিফলিত হইয়া বাহিরে যাইতে না পারে। A ছিদ্র দিয়া বিকিরণ গোলকের মধ্যে প্রবেশ করে। ঐ বিকিরণ পাত্রের দেওয়াল হইতে বারবার প্রতিফলিত হইয়া অবশেষে অবশোষিত হয়। এখন এই গোলকটি একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় উত্তপ্ত করা হয়। A ছিদ্র দিয়া নির্গত বিকীর্ণ তাপকে কৃষ্ণিকা বিকিরণ বা পূর্ণ বিকিরণ বলা হয়।



চিত্র 5.2

(খ) **ভিনের কৃষ্ণিকা** (Wien's blackbody) :

5.3 চিত্রে ভিনের কৃষ্ণিকা দেখানো হইয়াছে। A একটি ফাঁপা চোঙাকৃতি ধাতব প্রকোষ্ঠ যাহার উপর দিয়া সরু প্লাটিনাম তারের কুণ্ডলী থাকে। কক্ষের ভিতর কালো রঙ করা থাকে। কালো রঙের অবতল পর্দার (S) সাহায্যে বিকিরণ সীমিত করা যায়। একটি তাপ-বৈদ্যুত যুগ্ম (T)-এর সাহায্যে প্রকোষ্ঠের উষ্ণতা পরিমাপ করা যায়। দুইটি পোর্সেলিনে তৈয়ারী নল (P, P) দ্বারা A প্রকোষ্ঠকে ঘিরিয়া রাখা হয়। প্রকোষ্ঠটি সাধারণত প্লাটিনাম বা পিতল দ্বারা তৈয়ারী করা হয়।



চিত্র 5.3

5.5 প্রিভোস্টের বিনিময় নীতি (Prevost's theory of exchanges)

পূর্বে লোকের ধারণা ছিল যে, উত্তপ্ত বস্তু তাপ বিকিরণ করে এবং ঠাণ্ডা বস্তু শৈত্য বিকিরণ করে। প্রিভোস্ট সর্বপ্রথম এই ধারণা ভ্রান্ত বলিয়া প্রমাণ করিলেন। তিনি যে তত্ত্ব দিলেন তাহা প্রিভোস্টের বিনিময় নীতি নামে পরিচিত।

প্রিভোস্ট বলেন যে, সকল বস্তু (যাহাদের উষ্ণতা চরম শূন্য অপেক্ষা বেশী) হইতেই বিকীর্ণ তাপ নিঃসৃত হয়। নিঃসৃত শক্তি উষ্ণতা বৃদ্ধির সহিত বৃদ্ধি পায়। এই বিকিরণ ততক্ষণ ধরিয়া চলিতে থাকে যে পর্যন্ত বস্তুর উষ্ণতা পরম শূন্য অপেক্ষা বেশী থাকে। কোন উষ্ণতা বৃদ্ধি বা হ্রাস বস্তু ও পারিপার্শ্বিক বস্তুর মধ্যে বিকীর্ণ তাপের বিনিময়ের ফলে ঘটিয়া থাকে।

আমরা যখন কোন উত্তপ্ত বস্তুর নিকট দাঁড়াই তখন গরম অনুভব করি। তাহার কারণ বিকিরণের দরুণ আমরা যে শক্তি হারাই, উত্তপ্ত বস্তু হইতে তাহা অপেক্ষা বেশী শক্তি লাভ করি। একইভাবে শীতল বস্তুর নিকট দাঁড়াইলে কেন ঠাণ্ডা লাগে তাহা বোঝা যায়। এক্ষেত্রে বর্জিত বিকীর্ণ তাপ লব্ধ বিকীর্ণ তাপ অপেক্ষা বেশী হয়। আবার যখন কোন বস্তু যে পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে, তাহাই আবার পারিপার্শ্বিক বস্তু হইতে শোষণ করে, তখন ঐ বস্তুর উষ্ণতা স্থির থাকে।

5.6 কারশ্যফের সূত্র (Kirchhoff's law)

যে কোন নির্দিষ্ট উষ্ণতায় এবং একই তরঙ্গদৈর্ঘ্যের কোন বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা এবং শোষণ ক্ষমতার অনুপাত একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবক একটি কৃষ্ণিকা বিকিরণ বা কোটর বিকিরণ ক্ষমতার সমান। ইহাই কারশ্যফের সূত্র।

মনে করি, কোন বস্তু-পৃষ্ঠে প্রতি বর্গ একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রতি সেকেণ্ডে λ এবং $\lambda+d\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে dQ পরিমাণ বিকীর্ণ শক্তি আপতিত হইতেছে। বস্তুটির অবশোষণ ক্ষমতা a_λ হইলে প্রতি একক সময়ে বস্তুটির একক ক্ষেত্রফলে $a\ dQ$ পরিমাণ তাপ অবশোষণ করিবে।

সুতরাং অবশিষ্ট শক্তি $(dQ-a_\lambda dQ)=(1-a_\lambda)dQ$ প্রতিফলিত বা অপসৃত (transmitted) হইবে।

বস্তুটির বিকিরণ ক্ষমতা e_λ হইলে উহার প্রতি একক ক্ষেত্রফলে প্রতি সেকেণ্ডে $e_\lambda d\lambda$ তাপ নিঃসৃত হইবে।

সুতরাং একক সময়ে বস্তুটির প্রতি বর্গ একক ক্ষেত্রফল হইতে নির্গত তাপশক্তি = বস্তু কর্তৃক প্রতিফলিত শক্তি + বিকীর্ণ শক্তি

$$=(1-a_\lambda)dQ+e_\lambda d\lambda$$

তাপীয় সাম্যাবস্থায়, মোট আপতিত শক্তি = মোট নির্গত শক্তি

$$\therefore\quad dQ=(1-a_\lambda)dQ+e_\lambda d\lambda$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad a_\lambda dQ=e_\lambda d\lambda \qquad \cdots \quad (5.1)$$

পূর্ণ কৃষ্ণিকার ক্ষেত্রে $a_\lambda=1$ এবং বিকিরণ ক্ষমতা E_λ হইলে আমরা লিখিতে পারি

$$dQ=E_\lambda d\lambda \qquad \cdots \quad (5.2)$$

(5.1) এবং (5.2) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই

$$a_\lambda E_\lambda d\lambda=e_\lambda d\lambda$$

অথবা $\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = E_\lambda$ ... (5.3)

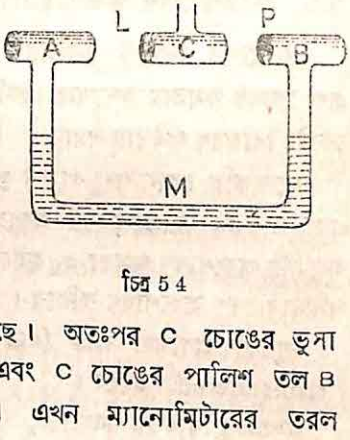
ইহাই কারশ্যফের সূত্র।

যেহেতু E_λ একটি ধ্রুবক কাজেই কোন বস্তুর e_λ বেশী হইলে a_λ-র মানও বেশী হইবে অর্থাৎ যে বস্তু আদর্শ বিকিরক সেই বস্তু আদর্শ শোষকও হইবে।

5.7 রিচীর পরীক্ষা (Ritchie's experiment)

রিচী কারশ্যফের সূত্রের সত্যতা পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করেন। তিনি দেখান যে কোন বস্তুর উৎসর্জন বা বিকিরণ ক্ষমতা উহার শোষণ ক্ষমতার সহিত সমানুপাতে থাকে।

5.4 চিত্রে A এবং B হইল দুইটি ফাঁপা ধাতব চোঙ যাহা ম্যানোমিটার M-এর সাহায্যে পরস্পর-সংলগ্ন। A চোঙের L পার্শ্ব উত্তমরূপে পালিশ করা এবং B চোঙের P পার্শ্বে ভুসা মাখানো। C হইল আরেকটি চোঙ। ইহা ফুটন্ত জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া A এবং B চোঙের মাঝখানে রাখা হয়। এই চোঙের একপ্রান্ত পালিশ করা এবং অপর প্রান্ত ভুসা মাখানো। এখন C চোঙটিকে এমন অবস্থায় রাখা হইল যাহাতে উহার ভুসা মাখানো তল P-র দিকে থাকে। লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে ম্যানোমিটারের তরল B চোঙের দিক্ হইতে A চোঙের দিকে সরিয়া যাইতেছে। অতঃপর C চোঙের ভুসা মাখানো তল A চোঙের পালিশ তলের দিকে এবং C চোঙের পালিশ তল B চোঙের ভুসা মাখানো তলের দিকে রাখা হইল। এখন ম্যানোমিটারের তরল স্থির অবস্থায় থাকিবে।



চিত্র 5.4

মনে করি, কালো এবং পালিশ করা তলের বিকিরণ ক্ষমতা যথাক্রমে e_1 এবং e_2 এবং উহাদের অবশোষণ ক্ষমতা যথাক্রমে a_1 এবং a_2.।

C চোঙের কালো তল হইতে প্রতি সেকেণ্ডে e_1 শক্তি বিকীর্ণ হয়। এই শক্তির K ভগ্নাংশ A-এর পালিশ করা তলে আপতিত হইলে ঐ তল কর্তৃক অবশোষিত শক্তি $= Ke_1a_2$। অনুরূপ B চোঙের কালো তল Ke_2a_1 তাপ অবশোষণ করিবে।

যেহেতু ম্যানোমিটারের তরল স্থায়ী অবস্থায় আছে আমরা বলিতে পারি,

$$Ke_1a_2 = Ke_2a_1$$

অর্থাৎ $\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} =$ ধ্রুবক

ইহাই কারশ্যফের সূত্র।

5.8 কারশ্যফ্ সূত্রের সাহায্যে সৌর বর্ণালির ফ্রন-হফার রেখাগুলির উৎপত্তি ব্যাখ্যা (Explanation of the occurrence of Fraun-Hofer lines in the solar spectrum with the help of Kirchhoff's law)

ফ্রন-হফার সৌর বর্ণালিতে অনেকগুলি কালো রেখা দেখিতে পান। সৌর বর্ণালিতে ফ্রন-হফারের প্রাপ্ত D রেখাদ্বয়ের অবস্থান এবং সোডিয়াম বর্ণালিতে হলুদ রেখাদ্বয়ের অবস্থান একই। কারশ্যফের সূত্র হইতে ইহার ব্যাখ্যা দেওয়া সম্ভব। আমরা জানি সোডিয়ামকে উদ্দীপন (excite) করিলে উহা *D* রেখাদ্বয় বিকিরণ করিতে পারে। সুতরাং কারশ্যফের সূত্রানুসারে সোডিয়াম ঐ একই তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলোক অবশোষণ করিতে পারে। শুভ্র আলো অপেক্ষাকৃত শীতল সোডিয়াম বাষ্পের মধ্য দিয়া পাঠাইলে দুইটি কালো রেখা পাওয়া যায়।

সূর্যের আলোকমণ্ডল (photosphere) হইতে আলো অপেক্ষাকৃত শীতল আবরণ বর্ণমণ্ডলের (chromosphere) মধ্য দিয়া আসে। ঐ বর্ণমণ্ডলে H_2, N_2, O_2, N_2, Cu, Hg প্রভৃতি গ্যাসীয় অবস্থায় থাকে। উক্ত গ্যাসীয় মৌলগুলি যে যে রেখা বিকিরণ করিতে পারে সূর্যরশ্মি হইতে সেই সব তরঙ্গদৈর্ঘ্য শোষণ করে। তাহার ফলে সৌর বর্ণালিতে ফ্রন-হফারের কালো রেখার (dark lines) সৃষ্টি হয়।

5.9 স্টীফানের সূত্র (Stefan's law)

ডুলং এবং পেটিটের পরীক্ষা হইতে স্টীফান প্রায়োগিকভাবে (empirically) দেখান যে **একটি কৃষ্ণিকা হইতে প্রতি সেকেণ্ডে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে পরিমাণ পূর্ণ বিকিরণ হয়, তাহা ঐ বস্তুর পরম উষ্ণতার চতুর্থ ঘাতের (fourth power) সহিত সমানুপাতী** অর্থাৎ $E \propto T^4$ অথবা $E = \sigma T^4$, σ একটি ধ্রুবক যাহাকে স্টীফানের ধ্রুবক (Stefan's constant) বলা হয়। ঐ ধ্রুবকের মান $5{\cdot}7 \times 10^{-5}$ আর্গ/সেকেণ্ড/সে.মি.^{2}/$^\circ K^4$।

যদি $T_2\,^\circ K$ উষ্ণতায় কোন কৃষ্ণিকা $T_1\,^\circ K$ উষ্ণতায় অপর একটি কৃষ্ণিকা কর্তৃক আবৃত থাকে ($T_1 > T_2$) তবে প্রথম বস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফল হইতে প্রতি সেকেণ্ডে উৎসর্জিত শক্তির পরিমাণ হইবে

$$e = \sigma\ (T_1^4 - T_1^4)$$

স্টীফানের এই সূত্রটি বোলজ্‌ম্যান (Boltzmann) তাপগতি বিদ্যার সাহায্যে ব্যাখ্যা করেন বলিয়া ইহাকে স্টীফান-বোলজ্‌ম্যান (Stefan-Boltzmann) সূত্র বলা হয়।

5.10 নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র (Newton's law of cooling)

কোন বস্তু বিকিরণের দরুণ যে হারে তাপ হারাইবে তাহা বস্তুর উষ্ণতা এবং পারিপার্শ্বিক উষ্ণতার পার্থক্যের সমানুপাতিক। এই তাপক্ষয় বস্তুর পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল (surface area) এবং প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। উক্ত সূত্র কম উষ্ণতা পার্থক্যের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হইবে।

সুতরাং নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রানুসারে

$$-\frac{dQ}{dt}=K(\theta-\theta_0)$$

যেখানে θ = বস্তুর উষ্ণতা, θ_0 = পারিপার্শ্বিক উষ্ণতা,

$-\frac{dQ}{dt}$ = বর্জিত তাপের হার এবং K = ধ্রুবক।

5.11 স্টীফান-বোলজ্‌ম্যানের সূত্র হইতে নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র (Newton's law of cooling from Stefan-Boltzmann's law)

আমরা স্টীফান-বোলজ্‌ম্যানের সূত্র হইতে জানি যে

$$E=\sigma(T_1^4-T_2^4)$$
$$=\sigma(T_1-T_2)(T_1^3+T_1^2T_2+T_1T_2^2+T_2^3)$$

যদি উষ্ণতার পার্থক্য সামান্য হয় তবে $T_1 \approx T_2$ হইবে

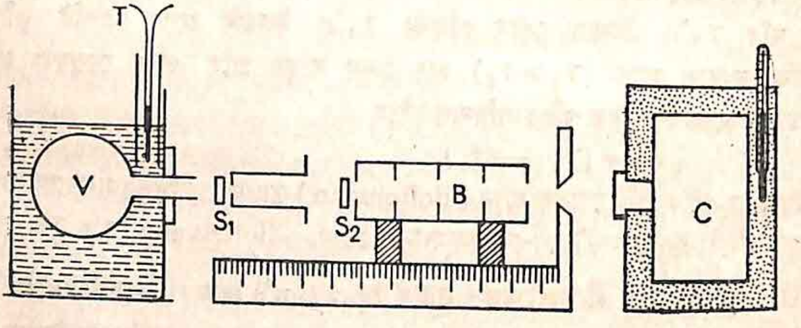
সেক্ষেত্রে $E=\sigma(T_1-T_2).4T_1^3$

$$=4\sigma T_1^3(T_1-T_2)$$
$$=K(T_1-T_2) \quad \text{যেখানে } K=4\sigma T_1^3 = \text{ধ্রুবক}$$
$$\therefore \quad E \propto (T_1-T_2)$$

অর্থাৎ যখন উষ্ণতার পার্থক্য কম হইবে, তখন শীতলীকরণের হার উষ্ণতার পার্থক্যের সমানুপাতিক হয়। ইহাই নিউটনের শীতলীকরণের সূত্র।

5.12 স্টীফানের সূত্রের পরীক্ষামূলক প্রমাণ (Experimental verification of Stefan's law)

5.5 চিত্রে V হইল একটি ফাঁপা গোলক। ইহা তামার তৈয়ারী এবং ইহার ভিতরে প্লাটিনাম ব্ল্যাক-এর প্রলেপ দেওয়া থাকে। গোলকটি গলিত সোডিয়াম ও



চিত্র 5.5

পটাশিয়াম নাইট্রেটের গাহে (bath) নিমজ্জিত করা হয়। এই গাহের উষ্ণতা 219°C এবং উহার উষ্ণতা তাপ-বৈদ্যুত যুগ্ম (thermo-couple) T-এর সাহায্যে

মাপা হয়। বিকীর্ণ তাপের প্রাবল্য বলোমিটার B-এর সাহায্যে পরিমাপ করা হয়। অপর আরেকটি কালো বস্তু C-এর সাহায্যে বলোমিটারকে প্রমিতকরণ (standardization) করা হয়। এখন S_1 ও S_2 সাটার তুলিয়া লইলে কালো বস্তু C হইতে বিকিরণ বলোমিটারের উপর পড়িবে এবং গ্যালভানোমিটারের বিক্ষেপ হইবে।

গাহের বিভিন্ন উষ্ণতার জন্য গ্যালভানোমিটারের বিক্ষেপ লক্ষ্য করা হয়। যদি C কৃষ্ণিকার উষ্ণতা T_1, বলোমিটারের উষ্ণতা T_2 এবং গ্যালভানোমিটারের বিক্ষেপ d হইলে দেখা যায় যে

$$d \propto (T_1^4 - T_2^4)$$

কিন্তু $d \propto E$

$$\therefore \quad E \propto (T_1^4 - T_2^4)$$

ইহা হইতে স্টীফানের সূত্রের সত্যতা প্রমাণিত হয়।

5.13 পাইরোমিটার (Pyrometer)

উচ্চ উষ্ণতার পরিমাপকে অত্যুষ্ণতামিতি বা পাইরোমেট্রি (pyrometry) বলে এবং যে যন্ত্রের সাহায্যে ইহা পরিমাপ করা হয় তাহাকে বলে পাইরোমিটার বা অত্যুষ্ণতামাপী (pyrometer)।

হেমবিন্দু (goldpoint)-এর ঊর্ধ্বে উচ্চ উষ্ণতা পরিমাপের জন্য বিকিরণ সূত্রাবলী অনুসরণ করিয়া যে যন্ত্র তৈয়ারী করা হয় তাহাকে বিকিরণ পাইরোমিটার (radiation pyrometer) বলে। পাইরোমিটারকে প্রধানত দুই ভাগে বিভক্ত করা হয়: (i) মোট বিকিরণ পাইরোমিটার (Total radiation pyrometer) ও (ii) আলোকীয় পাইরোমিটার (Optical pyrometer)।

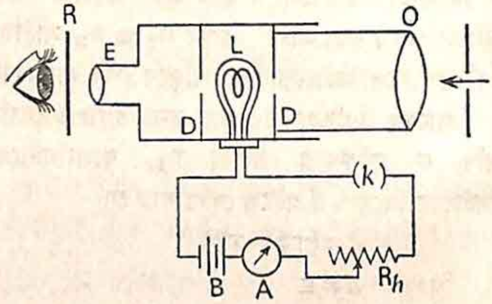
আলোকীয় পাইরোমিটারকে আবার দুইভাগে ভাগ করা হয়—যথা, অদৃশ্যমান ফিলামেণ্ট আলোকীয় পাইরোমিটার (Disappearing filament optical pyrometer) ও (ii) সমবর্তন আলোকীয় পাইরোমিটার (Polarising optical pyrometer)। পরের অনুচ্ছেদে একটি অদৃশ্যমান ফিলামেণ্ট আলোকীয় পাইরোমিটারের বর্ণনা দেওয়া হইল।

5.13 1 অদৃশ্যমান ফিলামেণ্ট আলোকীয় পাইরোমিটার (Disappearing filament optical pyrometer)

বিজ্ঞানী মোর্স সর্বপ্রথম এই পাইরোমিটারের পরিকল্পনা করেন। কিন্তু পরবর্তীকালে হলবর্ণ ও কার্লবম ইহার প্রভূত উন্নতিসাধন করেন। 5.6 চিত্রে এই পাইরোমিটারের নকশা দেখানো হইয়াছে।

ইহাতে একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্র আছে, যাহার E হইল অভিনেত্র (eye piece) ও L অভিলক্ষ্য (objective)। দূরবীক্ষণ যন্ত্রের আড়াআড়ি তার (cross-wire)-কে একটি বৈদ্যুতিক বাতির ফিলামেণ্ট ও দুইটি নিয়ন্ত্রক সচ্ছিদ্র পর্দা (diaphragms)

D, D দ্বারা পরিবর্তন করা হয়। ফিলামেণ্টকে শ্রেণী সমবায়ে একটি ব্যাটারী B, অ্যামমিটার A ও রিওস্ট্যাট R_h-এর সহিত যোগ করা হয়। বাতির সাহায্যে প্রবাহমাত্রাকে পরিবর্তন করিয়া ইহার উষ্ণতাকে যে কোন মানে স্থির রাখা সম্ভব। একটি লাল কাচ (red filter glass) R চোখ ও অভিনেত্রের মধ্যে রাখিয়া উহার ভিতর দিয়া ফিলামেণ্টের দিকে দৃষ্টি দেওয়া হয়। এই



চিত্র 5.6

সময়ে বর্তনীতে প্রবাহমাত্রা এমনভাবে নিয়ন্ত্রিত করা হয় যেন তাপ প্রতিবিম্বের দরুণ বাল্বের ফিলামেণ্ট সম্পূর্ণরূপে অদৃশ্য হইয়া যায়।

উদাহরণ (Examples)

1. একটি কৃষ্ণিকা 40၂°K উষ্ণতায় কি পরিমাণ তাপ বিকীর্ণ করিবে তাহা নির্ণয় কর।

(Calculate the total power radiated by a black body at a temperature 400°K.)

স্টীফানের সূত্র হইতে আমরা জানি,

$E = \sigma T^4$ যেখানে $\sigma = 5{\cdot}672 \times 10^{-8}$ m.k s. unit

$\therefore\ E = 5{\cdot}672 \times 10^{-8} \times (400)^4$

$= 5{\cdot}6762 \times 256$

$= 1453$ watt/ netre^2।

2. A এবং B দুইটি কৃষ্ণিকাকে 27°C উষ্ণতার বায়ুশূন্য বেষ্টনীর মধ্যে রাখা হইল। A-এর উষ্ণতা ˋ27°C এবং B-এর উষ্ণতা 127°C। A ও B কৃষ্ণিকা হইতে যে হারে তাপ ক্ষয় হইবে তাহা তুলনা কর।

(Two black bodies A and B are kept in evacuated vessels maintained at a temperature of 27°C. The temperature of A is 527°C and the temperature of B is 127°C. Compare the rates at which heat is lost from A and B.)

স্টীফান-বোলজ্‌ম্যানের সূত্রানুসারে

$$E = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

A বস্তুর ক্ষেত্রে $T_1 = 527° + 273° = 800°K$

$T_2 = 27° + 273° = 300°K$

$\therefore\ E_A = \sigma\,[(800)^4 - (300)^4]$

$= \sigma \times (100)^4[8^4 - 3^4] = \sigma \times (100)^4 \times 4015$ erg/s/cm^2

আবার B বস্তুর ক্ষেত্রে $T_1 = 127 + 273 = 400^\circ K$

$T_2 = 27 + 273 = 300^\circ K$

$\therefore\ E_B = \sigma\,[(400)^4 - (300)^4]$

$= \sigma \times 100^4 \times [4^4 - 3^4] = \sigma \times 100^4 \times 175$

$\therefore\ \dfrac{E_A}{E_B} = \dfrac{4015}{175} = \dfrac{803}{35}$

3. একটি 2×10^{-5} cm^2 ক্ষেত্রফলসম্পন্ন কৃষ্ণিকা $1000^\circ K$ উষ্ণতায় কতটা তাপশক্তি প্রতি সেকেন্ডে বিকিরণ করিবে তাহা বাহির কর। কত উষ্ণতায় কৃষ্ণিকাটি দ্বিগুণ তাপশক্তি বিকিরণ করিবে ? $\sigma = 5{\cdot}67 \times 10^{-5}$ ergs/s/ cm^2 $(^\circ K)^4$ ।

(A certain blackbody with a surface area of 2×10^{-5} cm^2 has a constant temperature of $1000^\circ K$. What is the total power radiated by the blackbody ? At what temperature it will radiate twice as a much power ? $\sigma = 5{\cdot}67 \times 10^{-5}$ ergs/s/ cm^2 $(^\circ K)^4$)

(C U. 1978)

স্টীফানের সূত্র হইতে আমরা জানি

$E = \sigma T^4$

$\therefore$ বিকীর্ণ তাপশক্তি $= 2 \times 10^{-5} \times 5{\cdot}67 \times 10^{-5} \times (1000)^4$

$= 1134$ erg/second

মনে করি, T' উষ্ণতায় বস্তুটি দ্বিগুণ শক্তি বিকিরণ করিবে।

$\therefore\ 2 \times 1134 = 2 \times 10^{-5} \times 5{\cdot}67 \times 10^{-5} \times (T')^4$ erg/second

$\therefore\ T'^4 = \dfrac{2 \times 1134}{2 \times 5{\cdot}67 \times 10^{-10}}$

$= 2 \times 10^{-12}$

$\therefore\ T = 1190^\circ K.$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. কোন বস্তুর উৎসর্জন ক্ষমতা ও অবশোষণ ক্ষমতা বলিতে কি বোঝায় ব্যাখ্যা কর। গুহিকা বিকিরণ বা কোটর বিকিরণ সম্পর্কিত স্টীফান সূত্র বিবৃত কর ও ব্যাখ্যা কর। সূত্রটির সত্যতা পরীক্ষামূলকভাবে কিরূপে প্রমাণ করিবে ?

(Explain the terms 'emissive and absorptive powers of a body. State and explain Stefan's law of blackbody radiation. How can the law be experimentally verified ?) (C.U. '66)

2. আদর্শ কৃষ্ণিকা বলিতে কি বোঝ ? ইহা কিরূপে প্রস্তুত করা যায় ? কারশ্যফের সূত্র লিখ এবং ঐ সূত্র কিরূপে পরীক্ষা দ্বারা নিরূপণ করিবে ব্যাখ্যা কর।

(What is a perfectly blackbody ? How can it be in practice ? State Kirchhoff's law and explain how the law may be experimentally verified.) (C.U. '69)

3. (a) আদর্শ কৃষ্ণিকা বলিতে কি বুঝায় ? গুহিকা বিকিরণ বা পূর্ণ বিকিরণ সম্পর্কীয় স্টীফান-বোলজ্‌ম্যান সূত্র লিখ এবং ব্যাখ্যা কর।

(b) নিউটনের শীতলীকরণের সূত্র ব্যাখ্যা কর।

((a) What is a perfect blackbody ? State and explain Stefan-Boltzmann law for blackbody radiation.

(b) Explain Newton's law of cooling.) (C.U. '78)

4. কোন বস্তুর উৎসর্জন ক্ষমতা এবং অবশোষণ ক্ষমতা বলিতে কী বুঝ ? বস্তুর উৎসর্জন এবং অবশোষণ ক্ষমতা-সম্পর্কিত কারশ্যফ সূত্রটি বিবৃত করিয়া ব্যাখ্যা কর। এই সূত্রটি সৌর বর্ণালির ফ্রন-হফার রেখাগুলির উৎপত্তি কিরূপে ব্যাখ্যা করে ? গুহিকা বা কোটর বিকিরণ কি ? আদর্শ কৃষ্ণিকা কিরূপে পাওয়া সম্ভব ?

(Explain the terms emissive and absorptive power of a body. State and explain Kirchhoff's law regarding the emissive and absorptive powers of a body. How does the above law explain the occurrence of Fraun-Hofer lines in the solar spectrum ? What is blackbody radiation ? How can we realise a perfectly blackbody ?) (C.U. '80)

5. $5{\cdot}0\times10^{-5}$ বর্গ মিটার ক্ষেত্রফলের একটি কৃষ্ণিকা 2000°K উষ্ণতায় কতটা শক্তি বিকিরণ করিবে নির্ণয় কর। $\sigma=5{\cdot}672\times10^{-5}$ ergs/s/cm²/°K।

(Calculate the energy radiated by a blackbody of surface area $5{\cdot}0\times10^{-5}$ sq. metre at a constant temperature of 2000°K. $\sigma=5{\cdot}672\times10^{-5}$ ergs/s/cm²/°K⁴.) [Ans. 0·45 watt]

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

গ্যাসের তরলীকরণ
(Liquefaction of gases)

6.1 সূচনা (Introduction)

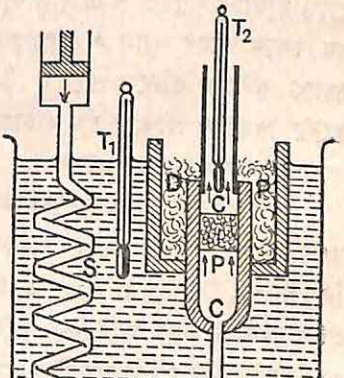
উনবিংশ শতাব্দীর প্রথম দিকে বিজ্ঞানীরা উপলব্ধি করেন যে সাধারণ উষ্ণতায় যে সকল বস্তু গ্যাসীয় অবস্থায় থাকে তাহাদের শীতল করিলে তাহারা তরলে পরিণত হয়। অতঃপর ঐ তরলকে দ্রুত বাষ্পীভূত করিলে খুব নিম্ন উষ্ণতা সৃষ্ট হয়। এই কারণে বিজ্ঞানীরা মোটামুটি এই সময় হইতেই গ্যাস তরলীকরণ বা তরলন সমস্যার দিকে মনোনিবেশ করেন।

1862 খ্রীষ্টাব্দে কার্বন ডাই-অক্সাইডের উপর অ্যান্ড্রুজের পরীক্ষালব্ধ ফল হইতে দেখা যায় যে, ক্রান্তিক উষ্ণতার নিচে চাপ প্রয়োগের দ্বারা গ্যাসকে তরলে পরিণত করা সম্ভব। ক্রান্তিক উষ্ণতার ঊর্ধ্বে গ্যাসের তরলীকরণ সম্ভব নয়।

1863 খ্রীষ্টাব্দে ফ্যারাডে সর্বপ্রথম হিম-মিশ্রণ পদ্ধতিতে ক্লোরিণকে তরলে পরিণত করেন। ইহার পর 1896 খ্রীষ্টাব্দে লিণ্ড, 1898 খ্রীষ্টাব্দে ডেওয়ার, 1899 খ্রীষ্টাব্দে পিটেট ও 1908 খ্রীষ্টাব্দে কেমারলিং ওনেস তরলীকরণ সংক্রান্ত উন্নততর পরীক্ষাকার্য সম্পন্ন করেন।

6.2 জুল-টমসনের সচ্ছিদ্র ছিপি পরীক্ষা (Joule-Thomson's porous plug experiment)

স্থির চাপে কোন গ্যাসকে সচ্ছিদ্র ছিপির ভিতর দিয়া পাঠাইলে ছিপির দুই প্রান্তে চাপের পার্থক্য হয়। ইহার ফলে গ্যাসের আয়তন বাড়ে। এই পদ্ধতিকে নিরুদ্ধ প্রক্রিয়া (throttling process) বলা হয়। এই প্রক্রিয়ায় গ্যাস অণুকে অভ্যন্তরীণ কার্য করিতে হয়। সেইজন্য গ্যাসের উষ্ণতা হ্রাস পায়।



চিত্র 6.1

জুল-টমসনের পরীক্ষার ব্যবস্থাটি 6.1 চিত্রে দেখানো হইয়াছে। পরীক্ষাধীন গ্যাসকে একটি সংনমন পাম্পের সাহায্যে উচ্চচাপে সংনমিত করা হয় এবং একটি সর্পিল টিউবের (S) ভিতর দিয়া পাঠানো হয়। এই টিউবটি শীতল জলগাহে নিমজ্জিত থাকে। সর্পিল টিউবের মধ্য দিয়া যাওয়ার ফলে গ্যাস জলগাহের উষ্ণতা লাভ করে। অতঃপর এই শীতল গ্যাস তামার নল C-র মধ্য দিয়া

একটি চোঙাকৃতি কাঠের বাক্সে প্রবেশ করে। এই কাঠের বাক্সের মাঝখানে উল বা তুলার তৈয়ারী সচ্ছিদ্র ছিপি থাকে যাহা দুইটি ছিদ্রযুক্ত পিতলের প্লেটের (PP) মধ্যে বসানো হয়। কাঠের চোঙটিকে ঘিরিয়া থাকে তুলা-ভর্তি একটি টিনের পাত্র D।

ছিপিতে প্রবেশের আগে এবং পরে গ্যাসের উষ্ণতা যথাক্রমে T_1 এবং T_2 থার্মোমিটারের সাহায্যে মাপা হয়। গ্যাসের চাপ ম্যানোমিটারের সাহায্যে দেখা হয়।

পরীক্ষালব্ধ ফলাফল (experimental results)

1. উপযুক্ত নিম্ন উষ্ণতায় প্রত্যেক গ্যাসই শীতল হয়। সাধারণ উষ্ণতায় হাইড্রোজেন এবং হিলিয়াম উত্তপ্ত হয়।

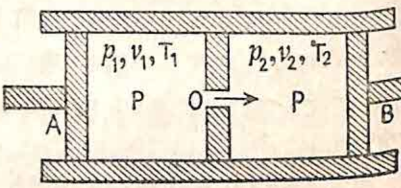
2. সচ্ছিদ্র ছিপির মধ্য দিয়া যাওয়ার ফলে প্রত্যেক গ্যাসেরই উষ্ণতা পরিবর্তিত হয়। এই পরিবর্তনকে জুল-টমসন প্রভাব (Joule-Thomson effect) বলে। উষ্ণতা হ্রাস পাইলে এই প্রভাবকে ধনাত্মক জুল-টমসন অভিক্রিয়া এবং উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইলে, ঋণাত্মক জুল-টমসন অভিক্রিয়া বলে।

3. গ্যাসের উষ্ণতার হ্রাস ছিপির দুই দিকের চাপের পার্থক্যের সমানুপাতিক।

4. প্রাথমিক উষ্ণতা বৃদ্ধি করিলে উষ্ণতার হ্রাস ক্রমশ কমিতে থাকিবে এবং একটি বিশেষ উষ্ণতায় উষ্ণতার কোন হ্রাস হয় না। প্রাথমিক উষ্ণতা ঐ উষ্ণতা অপেক্ষা বেশী হইলে উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইবে। এই উষ্ণতাকে অর্থাৎ যে প্রাথমিক উষ্ণতায় জুল-টমসনের প্রভাব ঋণাত্মক হয় তাহাকে উৎক্রম উষ্ণতা (Inversion temperature) বলে।

পরীক্ষার মূলতত্ত্ব (experimental theory)

মনে করি, দুইটি চোঙ P এবং P-র মাঝখানে সচ্ছিদ্র ছিপি O আছে (চিত্র 6.2)। চোঙ দুইটির পার্শ্বে A এবং B দুইটি কাল্পনিক পিস্টন। সচ্ছিদ্র ছিপির মধ্য দিয়া যে কোন ভরের গ্যাস A চোঙ হইতে B চোঙে চলাচল করিতে পারে। পিস্টন-দ্বয়ের অবস্থান এইরূপ হয় যাহাতে চাপ পার্থক্য সবসময়ে স্থির থাকে।



চিত্র 6.2

এখন সচ্ছিদ্র ছিপির মধ্য দিয়া যাওয়ার ফলে চাপের পার্থক্য হইবে। মনে করি, নিম্ন চাপের দিকে p_2, v_2, T_2 এবং u_2 হইল যথাক্রমে চাপ, আয়তন, উষ্ণতা এবং অন্তর্নিহিত শক্তি (internal energy) এবং উচ্চ চাপের দিকে p_1, v_1, T_1 এবং u_1 হইল যথাক্রমে চাপ, আয়তন, উষ্ণতা এবং অন্তর্নিহিত শক্তি।

সুতরাং, একক ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে,

A পিস্টন দ্বারা কৃত কার্য $= p_1 v_1$

এবং B পিস্টন দ্বারা কৃত কার্য $= p_2 v_2$

∴ সচ্ছিদ্র ছিপির মধ্য দিয়া যাইবার ফলে একক ভরের গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য =

$$p_2v_2 - p_1v_1$$

এবং অন্তর্নিহিত শক্তির পরিবর্তন $= u_1 - u_2$

এক্ষেত্রে গ্যাসের প্রসারণ নিরুদ্ধ প্রক্রিয়ায় সম্পন্ন হয় বলিয়া গ্যাস উহার অন্তর্নিহিত শক্তির বিনিময়ে কার্য করিবে অর্থাৎ $p_2v_2 - p_1v_1 = u_1 - u_2$

অথবা, $u_1 + p_1v_1 = u_2 + p_2v_2$ $\cdots$ (6.1)

অথবা, $u + pv =$ ধ্রুবক

কিন্তু $u + pv =$ H-কে মোট তাপ বা এনথ্যালপি (enthalpy) বলে। সুতরাং এই প্রক্রিয়ায় এনথ্যালপি ধ্রুবক থাকায় এই প্রক্রিয়াকে সম-এনথ্যালপি (isenthalpic) প্রক্রিয়া বলে।

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে (in case of perfect gas)

আদর্শ গ্যাস বয়েলের সূত্র মানিয়া চলে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি

$$p_1v_1 = p_2v_2$$

∴ (6.1) সমীকরণ হইতে পাই $u_1 = u_2$ অর্থাৎ প্রসারণের আগে এবং পরে অন্তর্নিহিত শক্তি সমান হওয়ায় সচ্ছিদ্র ছিপির ভিতর দিয়া যাওয়ার ফলে আদর্শ গ্যাসের উষ্ণতার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না।

বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে (in case of real gas)

বাস্তব গ্যাসের উষ্ণতা বয়েল উষ্ণতার (T_B) ঊর্ধ্বে থাকিলে $p_1v_1 > p_2v_2$। সুতরাং $p_2v_2 - p_1v_1 < 0$ অর্থাৎ $u_1 - u_2$ একটি ঋণাত্মক রাশি হইবে। সুতরাং গ্যাসের উষ্ণতার বৃদ্ধি হইবে কিন্তু বয়েল উষ্ণতার নিচে $p_1v_1 < p_2v_2$। সুতরাং $u_1 > u_2$ হইবে। এক্ষেত্রে গ্যাস শীতল হইবে।

6.3 বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে জুল-টমসন শীতলতা (Joule-Thomson cooling of a real gas)

বাস্তব গ্যাস ভ্যান ডার ওয়ালস্ সমীকরণ মানিয়া চলে

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

মনে করি, P_1 চাপ এবং V_1 আয়তনের এক গ্রাম অণু গ্যাস সচ্ছিদ্র ছিপির ভিতর দিয়া যাওয়ার ফলে চাপ হইল P_2 এবং আয়তন হইল V_2। জুল-টমসনের শীতলতার দরুণ তাপমাত্রা T_1 হইতে T_2-তে পরিবর্তিত হইল।

∴ গ্যাস কর্তৃক বাহ্যিক কার্য (external work) $= P_2V_2 - P_1V_1$

ভ্যান ডার ওয়ালসের সমীকরণ অনুসারে আন্তরাণবিক চাপ $P' = \dfrac{a}{V^2}$

$$\therefore \text{ অভ্যন্তরীণ কার্য} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2}\,dV = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

সুতরাং গ্যাস কর্তৃক মোট কৃত কার্য

$$W = P_2V_2 - P_1V_1 + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) \quad \cdots \quad (6.2)$$

এখন, ভ্যান ডার ওয়ালসের সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

অথবা, $PV + \frac{a}{V} - bP - \frac{ab}{V^2} = RT$

অথবা, $PV = RT + bP - \frac{a}{V}$ $\left[\frac{ab}{V^2} \text{ ক্ষুদ্র বলিয়া উপেক্ষণীয়}\right]$ ... (6.3)

(6.3) সমীকরণ হইতে PV-র মান (6.2) সমীকরণে বসাইলে পাওয়া যায়

$$W = \left(RT_2 + bP_2 - \frac{a}{V_2}\right) - \left(RT_1 + bP_1 - \frac{a}{V_1}\right) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

$$= R(T_2 - T_1) + b(P_2 - P_1) + 2a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

আবার $PV = RT$ হইলে

$$W = R(T_2 - T_1) + b(P_2 - P_1) + \frac{2a}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right)$$

এখানে, T_1 এবং T_2-এর মানের পার্থক্য খুব সামান্য বলিয়া মনে করি $T_1 \approx T_2$, $T_1 - T_2 = dT$ এবং $P_1 - P_2 = dP$

$$W = -RdT - bdP + \frac{2a}{RT}\,dP$$

$$= -(C_p - C_v)dT + dP\left(\frac{2a}{RT} - b\right)$$

স্থির আয়তনে গ্যাসের গ্রাম আণবিক আপেক্ষিক তাপ C_v হইলে এক-গ্রাম অণু গ্যাস নিজের নিকট হইতে যে পরিমাণ তাপ শোষণ করিবে তাহা $= C_v dT$

$$\therefore \quad C_v dT = (C_p - C_v)dT + dP\left(\frac{2a}{RT} - b\right)$$

অথবা, $C_p dT = dP\left(\frac{2a}{RT} - b\right)$

$$\therefore \quad \frac{dT}{dP} = \frac{1}{C_p}\left[\frac{2a}{RT} - b\right] = \mu \quad \cdots \quad (6\,3)$$

ইহাই বাস্তব গ্যাসে জুল-টমসন শীতলতার পরিমাণ।

এখন, উচ্চ উষ্ণতায় $\frac{2a}{RT} < b$ হইবে। এক্ষেত্রে μ ঋণাত্মক হওয়ায় তাপের সৃষ্টি হইবে এবং জুল-টমসন ফল ধনাত্মক হইবে।

নিম্ন উষ্ণতায়, $\frac{2a}{RT} > b$ হইবে। এক্ষেত্রে μ ধনাত্মক হওয়ায় শীতলতার সৃষ্টি হয় এবং জুল-টমসন ফল ঋণাত্মক হইবে।

কিন্তু যদি $\frac{2a}{RT} = b$ হয়, উষ্ণতার কোন পরিবর্তন হইবে না।

হাইড্রোজেনের ক্ষেত্রে a-র মান কম বলিয়া সাধারণ উষ্ণতাতে $\frac{2a}{RT} < b$ হয়। ফলে সাধারণ উষ্ণতায় হাইড্রোজেন গ্যাস উত্তপ্ত হয়।

উৎক্রম উষ্ণতায় (T_i) জুল-টমসন ফল শূন্য হয়।

$$\therefore \quad \frac{2a}{RT_i} = b$$

অর্থাৎ $$T_i = \frac{2a}{Rb} \qquad \cdots \quad (6.4)$$

6.4 উৎক্রম উষ্ণতা, বয়েল উষ্ণতা এবং ক্রান্তিক উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক (Interrelations between Inversion temperature, Boyle temperature and Critical temperature)

আমরা জানি, বয়েল উষ্ণতা $T_B = \frac{a}{Rb}$

কিন্তু উৎক্রম উষ্ণতা $T_i = \frac{2a}{Rb}$

$$\therefore \quad T_i = 2T_B$$

অর্থাৎ **উৎক্রম উষ্ণতা হইল বয়েল উষ্ণতার দ্বিগুণ**

আবার, $$T_B = \frac{27}{8} T_C$$

$$\therefore \quad T_i = 2T_B = \frac{27}{4} T$$

অর্থাৎ উৎক্রম উষ্ণতা হইল ক্রান্তিক উষ্ণতার $\frac{27}{4}$ গুণ।

6.5 রুদ্ধতাপ প্রসারণের দরুণ শীতলতা (Cooling due to adiabatic expansion)

যখন কোন গ্যাসের রুদ্ধতাপ সম্প্রসারণ হয়, তখন ঐ গ্যাস বাহ্যিক কার্য সম্পাদন করে এবং গ্যাসের উষ্ণতা হ্রাস পায়।

আমরা জানি, রুদ্ধতাপ প্রসারণের ক্ষেত্রে

$$PV^{\gamma} = \text{ধ্রুবক} \quad \text{যেখানে } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

আবার $PV = RT$ $\therefore \quad V = \frac{RT}{P}$

অর্থাৎ $PV^{\gamma} = P\left(\frac{RT}{P}\right)^{\gamma} = R^{\gamma}T^{\gamma}/P^{\gamma-1} =$ ধ্রুবক

অথবা, $\frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} =$ ধ্রুবক

অতএব $\frac{T_1}{(P_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_2}{P_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

$$\therefore \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad \cdots \quad (6.5)$$

এই সমীকরণ হইতে উষ্ণতা পরিবর্তনের যে মান পাওয়া যায় তাহা জুল-টমসন প্রসারণের তুলনায় অনেক বেশী।

6.6 রুদ্ধতাপ শীতলতা এবং জুল-টমসন শীতলতার মধ্যে পার্থক্য (Distinction between adiabatic cooling and Joule-Thomson cooling)

রুদ্ধতাপ শীতলতা	জুল-টমসন শীতলতা
1. পারিপার্শ্বিক বস্তুর সহিত তাপের আদান-প্রদান হয় না।	1. পরীক্ষাধীন বস্তুকে কুপরিবাহী পদার্থ দ্বারা আবৃত করিয়া তাপের আদান প্রদান বন্ধ করা হয়।
2. রুদ্ধতাপ প্রসারণে তাপের পরিবর্তন বেশী হয়।	2. এক্ষেত্রে তাপের পরিবর্তন অপেক্ষাকৃত কম হয়।
3. আদর্শ গ্যাসের রুদ্ধতাপ প্রসারণে শীতলতার সৃষ্টি হয়।	3. জুল-টমসন ফল আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে শূন্য হয়।
4 এই পদ্ধতিতে তাপের উদ্ভব হয় না।	4. উৎক্রম উষ্ণতার ঊর্ধ্বে তাপের সৃষ্টি হয়।
5. ইহা একটি অপনেয় (reversible) প্রক্রিয়া।	5. ইহা অপনেয় প্রক্রিয়া নহে।
6. রুদ্ধতাপ প্রসারণে এনথ্যালপি অর্থাৎ মোট তাপ ধ্রুবক হয়।	6. এক্ষেত্রে এনট্রপি ধ্রুবক।

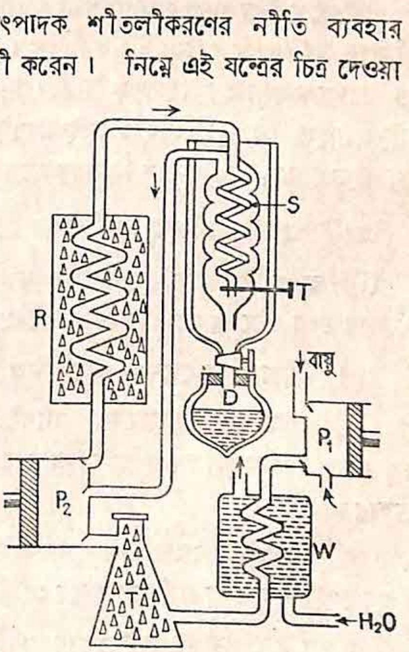
6.7 পুনরুৎপাদক শীতলতা (Regenerative cooling)

জুল-টমসন ফলের দ্বারা কোন গ্যাসকে শীতলীকরণ করিতে হইলে উক্ত গ্যাসকে উৎক্রম উষ্ণতার নিচে রাখিতে হইবে। কিন্তু অন্যান্য পদ্ধতিতে গ্যাসকে ক্রান্তিক উষ্ণতার নিচে রাখা হয়। উৎক্রম উষ্ণতা ক্রান্তিক উষ্ণতা অপেক্ষা বেশী হওয়ায় জুল-টমসন ফলের দ্বারা গ্যাস তরলীকরণে কম প্রাথমিক শীতলীকরণের প্রয়োজন হয়। কিন্তু এই পদ্ধতিতে উষ্ণতার পরিবর্তন অপেক্ষাকৃত কম। পুনরুৎপাদক শীতলীকরণ পদ্ধতিতে জুল-টমসন ফলের দ্বারা শীতলীকরণ গ্যাসের এক অংশ নবাগত গ্যাসকে শীতল করার কাজে ব্যবহৃত হয়। সুতরাং শীতলতা ক্রমশ পুঞ্জীভূত হয় এবং এই চক্র বজায় রাখা হয়। ইহার ফলে প্রাথমিক উষ্ণতা ক্রমশ হ্রাস পায়। উষ্ণতা যত কমে জুল-টমসন শীতলতা তত বাড়ে।

এই পদ্ধতি 1895 খৃষ্টাব্দে লিন্ড (Linde) বায়ু তরলীকরণে, 1898 খৃষ্টাব্দে দেওয়ার (Dewar) হাইড্রোজেন তরলীকরণে এবং 1908 খৃষ্টাব্দে ওনেস (Onnes) হিলিয়াম তরলীকরণে ব্যবহার করিয়াছিলেন।

6.8 লিণ্ডের বায়ু তরলকারী যন্ত্র (Linde's air liquifier)

জুল-টমসনের শীতলীকরণ এবং পুনরুৎপাদক শীতলীকরণের নীতি ব্যবহার করিয়া লিণ্ডে বায়ু তরলীকরণ যন্ত্র তৈয়ারী করেন। নিম্নে এই যন্ত্রের চিত্র দেওয়া হইল (চিত্র 6.3)।



চিত্র 6.3

এখানে বায়ুকে দুইটি পদক্ষেপে P_1 এবং P_2 সংনমন পাম্পের সাহায্যে সংনমিত করা হয়। P_1 পাম্পের সাহায্যে বায়ুকে 20 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে সংনমিত করিয়া একটি কুণ্ডলীর ভিতর দিয়া P_2 পাম্পে পাঠানো হয়। এই কুণ্ডলীটি শীতল জলগাহ W এবং কস্টিক সোডার স্তম্ভে ডোবানো থাকে। সংনমনজনিত তাপ জলগাহের মধ্য দিয়া যাওয়ার ফলে দূরীভূত হয়। বায়ুতে মিশ্রিত কার্বন ডাই-অক্সাইড কস্টিক সোডা দ্বারা শোষিত হয়। এখন বায়ুকে P_2 পাম্প দ্বারা 200 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে সংনমিত করা হয় এবং হিমমিশ্রণ কক্ষের (R) মধ্য দিয়া পাঠানো হয়। গ্যাসের উষ্ণতা $-20^\circ C$-এ হ্রাস পায়। অতঃপর শীতল গ্যাসকে পুনরুৎপাদক কুণ্ডলী S এবং সচ্ছিদ্র ছিপি T-এর মধ্য দিয়া যাওয়ার ফলে গ্যাসের উষ্ণতা আরও হ্রাস পায়। এই শীতল বায়ু নবাগত গ্যাসকে শীতলীকরণ করিতে

ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতির পুনরাবৃত্তির ফলে গ্যাস এত ঠাণ্ডা হয় যে (T)-এর মধ্যে প্রসারণের ফলে উষ্ণতা $-183^\circ C$-এর নিচে নামিয়া যায় এবং বায়ু তরলে পরিণত হয় এবং দেওয়ার ফ্লাস্ক D-তে ইহা সংগৃহীত হয়।

এই যন্ত্রের সাহায্যে এক লিটার তরল বায়ু উৎপাদন করিতে এক ঘণ্টারও কম সময় লাগে। হ্যামসন, ডেওয়ার এবং অন্যান্যরা বায়ু তরলকারী যন্ত্রের উন্নতিসাধন করেন এবং ইহার দ্বারা মাত্র দশ মিনিটে বায়ুকে তরলীকরণ করা যায়।

তরল বায়ু (i) গ্যাস শুষ্ককরণ, (ii) নিম্ন উষ্ণতার উদ্ভাবন, (iii) উচ্চ মাত্রার শূন্যতা সৃষ্টি, (iv) অক্সিজেন উৎপাদন, (v) গ্যাস শোধন এবং (vi) নাইট্রোজেন প্রস্তুত করিতে ব্যবহৃত হয়।

6.9 হিমায়ন (Refrigeration)

বরফ তৈয়ারীর জন্য, খাদ্যদ্রব্যকে পচনের হাত হইতে রক্ষা করিতে এবং নানাবিধ কাজের জন্য কৃত্রিম উপায়ে শীতলতার সৃষ্টি করাকে হিমায়ন বলা হয় এবং যে যন্ত্র এই উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত হয় তাহা হিমায়ক যন্ত্র নামে পরিচিত।

এই যন্ত্রে নিম্ন চাপে কোন তরলকে বাষ্পীভূত করা হয় এবং রুদ্ধতাপ (adiabatic) প্রক্রিয়ায় উক্ত গ্যাসকে প্রসারিত করা হয়। যে তরলকে হিমায়ক যন্ত্রে ব্যবহার করা হয় তাহাকে বলা হয় হিমায়ক (refrigerant)। অ্যামোনিয়া (NH_3), সালফার ডাই-অক্সাইড (SO_2), কার্বন ডাই-অক্সাইড (CO_2), ফ্রিয়ন (CCl_2F_2), মিথাইল ক্লোরাইড (CH_3Cl) ইত্যাদি হিমায়করূপে ব্যবহৃত হয়।

একটি ভাল হিমায়কের নিম্নলিখিত গুণাবলী থাকা প্রয়োজন :

(i) অল্প পরিমাণ হিমায়কের বাষ্পীভবনে যথেষ্ট পরিমাণ শীতলতার সৃষ্টি করিবার জন্য তরলের বাষ্পীভবনের লীনতাপ বেশী হওয়া প্রয়োজন।

(ii) হিমায়কের বাষ্পের আপেক্ষিক আয়তন কম হওয়া প্রয়োজন।

(iii) NTPতে হিমায়কের গ্যাসীয় অবস্থায় থাকা প্রয়োজন। কিন্তু উহা চাপ প্রয়োগে এবং শীতল করিলে যাহাতে তরলে পরিণত হয় সেইদিকে দৃষ্টি রাখা দরকার।

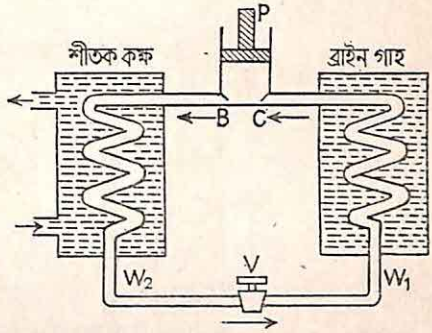
(iv) হিমায়ক যন্ত্রের উপাদানের অবক্ষয় (corrosion) না ঘটায় এবং বিষাক্ত না হয় সেইদিকে লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

হিমায়ক যন্ত্র প্রধানত দুই প্রকার : (i) বাষ্প সংনমন (vapour compression) যন্ত্র এবং বাষ্প শোষণ (vapour absorption) যন্ত্র। শোষণ হিমায়ক যন্ত্রের দক্ষতা সংনমন হিমায়ক যন্ত্র অপেক্ষা কম। ফ্রিজিডেয়ার হইল বাষ্প সংনমন যন্ত্র এবং ইলেকট্রোলাক্স হইল বাষ্পশোষণ হিমায়ক যন্ত্র।

(i) **বাষ্প সংনমন যন্ত্র বা ফ্রিজিডেয়ার**

ফ্রিজিডেয়ারে হিমায়ক হিসাবে সালফার ডাই-অক্সাইড, ফ্রিয়ন বা কার্বন ডাই-অক্সাইড ব্যবহৃত হয়। এই যন্ত্রের কার্যনীতি 6.4 নং চিত্র হইতে সহজেই বোঝা যাইবে।

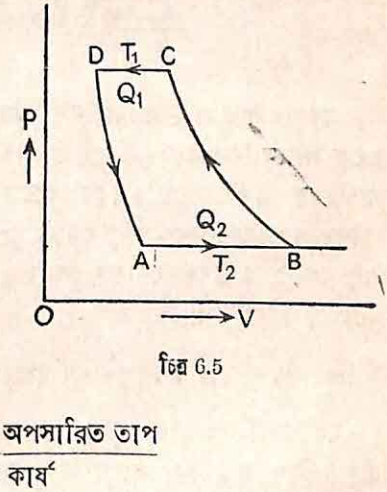
একটি বৈদ্যুতিক মোটরের সাহায্যে সংনমন পাম্প P-কে চালিত করা হয়। পাম্পের চোঙে B ও C দুইটি ভালভ্ থাকে। W_1 হইল একটি বাষ্পায়ক। এখানে কুণ্ডলীর ভিতরের তরল বাইরের তরল হইতে লীনতাপ সংগ্রহ করিয়া বাষ্পীভূত হয়। এই বাষ্পায়ক হইতে আগত নিম্ন চাপযুক্ত বাষ্প C ভালভের মধ্য দিয়া পাম্পের ভিতর ঢোকে এবং সংনমন বাষ্প B ভালভের মধ্য দিয়া শীতকের মধ্যে প্রবেশ করে এবং উচ্চ চাপের ফলে উহা আবার তরলীভূত হয়।



চিত্র 6.4

নিয়ন্ত্রণকারী ভালভ V-এর সাহায্যে উক্ত তরল আবার বাষ্পায়কে ফিরিয়া আসে। এইভাবে একই চক্র বারবার চলিতে থাকে।

হিমায়ক যন্ত্রের সূচক চিত্র 6.5 নং চিত্রে দেখানো হইয়াছে। AB রেখা T_2° উষ্ণতায় তরলের বাষ্পীভবন বুঝাইতেছে। রুদ্ধতাপ সংকোচন BC রেখা দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। T_1° উষ্ণতায় বাষ্পের তরলীকরণ CD রেখা দ্বারা এবং তরলের রুদ্ধতাপ প্রসারণ DA রেখা দ্বারা দেখানো হইয়াছে।



চিত্র 6.5

$$\text{হিমায়কের গুণাঙ্ক, } \phi = \frac{\text{হিমায়ক যন্ত্র কর্তৃক অপসারিত তাপ}}{\text{মোট কৃত কার্য}}$$

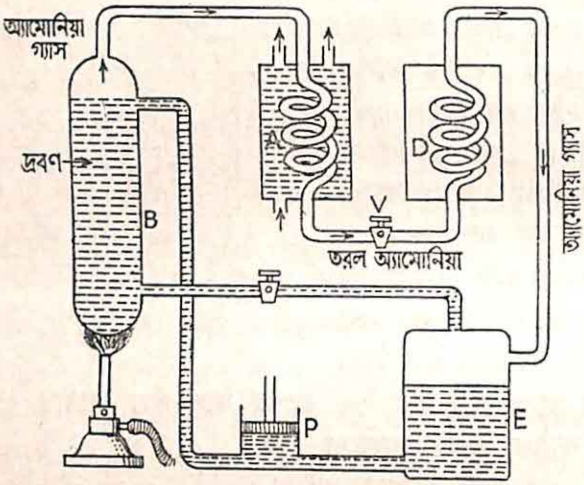
$$= \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

চক্রটি অপনেয় কাজেই $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ হইবে।

$$\therefore \quad \phi = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

(ii) বাষ্প শোষণ যন্ত্র বা ইলেক্‌ট্রোলাক্স

এই যন্ত্রে নিম্ন চাপযুক্ত বাষ্পকে শোষণ প্রণালীতে উচ্চ চাপযুক্ত বাষ্পে পরিণত করা হয়। অ্যামোনিয়া হিমায়ক হিসাবে এবং জলকে শোষক বস্তু হিসাবে ব্যবহার করা হয়। এই যন্ত্রের কার্যপ্রণালী 6.6 চিত্রে বোঝানো হইয়াছে।



চিত্র 6.6

বয়লার কক্ষ B হইতে অ্যামোনিয়া গ্যাস মুক্ত হইয়া শীতল কক্ষে আসে। এই কক্ষে অ্যামোনিয়া গ্যাস তরলে রূপান্তরিত হয় এবং নিয়ন্ত্রণ ভালভ V-এর মধ্য দিয়া বাষ্পায়ক কক্ষ D-তে প্রবেশ করে। অ্যামোনিয়া বাষ্পীভবনের জন্য প্রয়োজনীয় লীনতাপ পারিপার্শ্বিক বস্তু হইতে সংগ্রহ করে বলিয়া ঐ স্থান শীতল হইয়া যায়। এই গ্যাস অতঃপর শোষক কক্ষ E-তে প্রবেশ করে এবং P পাম্পের সাহায্যে পুনরায় বয়লারে চলিয়া যায়।

6.10 শীতাতপ নিয়ন্ত্রণ বা বাতানুকূলন (Air conditioning)

কোন সীমিত স্থান—যেমন ঘর, বড় হল, বাড়ী প্রভৃতির উষ্ণতা, আপেক্ষিক আর্দ্রতা, বায়ুর বিশুদ্ধতা এবং বায়ুর গতি নিয়ন্ত্রণ করিয়া মানুষের পক্ষে আরামপ্রদ করিয়া তোলা হয়। এই ব্যবস্থাকে শীতাতপ নিয়ন্ত্রণ বলা হয়।

আরামবোধ বিভিন্ন মানুষের ক্ষেত্রে বিভিন্ন হইলেও উষ্ণতা, আর্দ্রতা, বায়ুর গতি এবং প্রবেশকারী মুক্ত বায়ুর মান নিম্নলিখিত হইলে সাধারণত আরামবোধ হয়।

(i) উষ্ণতা : 63°F—75°F

(ii) আপেক্ষিক আর্দ্রতা : 35%—66%

(iii) বায়ুর গতি : 9 metre/second—20 metre/second

(iv) প্রবেশকারী মুক্ত বায়ু : 30% মোট বায়ুর চলাচলের পরিমাণ।

উদাহরণ (Examples)

1. কোন গ্যাসের ক্রান্তিক উষ্ণতা 22°K হইলে উহার উৎক্রম উষ্ণতা কত হইবে ?

(What will be the temperature of inversion of a gas whose critical temperature is 22°K ?)

আমরা জানি, $T_i = \frac{27}{4} T_c$

$\therefore \quad T_i = \frac{27}{4} \times 22 = 148{\cdot}5 \text{ K}$

2. একটি হিমায়ক যন্ত্র 7°C উষ্ণতা হইতে 27°C উষ্ণতার ভিতর কার্য করিতেছে। শক্তি সরবরাহের পরিমাণ 250 watts হইলে প্রতি ঘণ্টায় কি পরিমাণ তাপ যন্ত্র হইতে অপসারিত হইবে ?

(A refrigerator is working between the temperature 7°C and 27°C. How much heat would be removed per hour from the refrigerator for an energy supply of 250 watts ?)

আমরা জানি, হিমায়ক গুণাঙ্ক, $\phi = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

$$\therefore \quad \phi = \frac{(273+27)}{20} = \frac{280}{20} = 14$$

আবার, $\phi = \frac{Q_2}{W}$

এক্ষেত্রে $W = 250 \text{ watt} = \frac{250}{4{\cdot}2}$ cal/second

$$\therefore \quad 14 = \frac{Q_2}{250} \times 4{\cdot}2$$

$$\therefore \quad Q_2 = 14 \times \frac{250}{4{\cdot}2}$$

$= 833{\cdot}3$ cal/second

$= 3000$ kilo cal/hour.

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. জুল-টমসনের সচ্ছিদ্র ছিপি পরীক্ষার বিবরণ দাও।

(Describe the porous plug experiment of Joule and Thomson.)

2. হিমায়ন বলিতে কি বোঝ ? হিমায়ন যন্ত্রের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

(What do you mean by refrigeration ? Give a short description of refrigerator.)

3. জুল-টমসন প্রসারণ এবং রুদ্ধতাপ প্রসারণের মধ্যে পার্থক্য কি ? ভ্যান ডার ওয়ালস্-এর অবস্থা সমীকরণ মেনে চলে এরকম একটি গ্যাসের ক্ষেত্রে জুল টমসনের শীতলতার একটি রাশিমালা উপপাদন কর।

(Explain clearly the difference between Joule-Thomson expansion and adiabatic expansion. Deduce an expression for Joule-Thomson cooling for a gas obeying Van der Waals' equation of state.) (C. U. (Hons.) '62)

4. কার্বন ডাই-অক্সাইডের উৎক্রম উষ্ণতা 170·5°K হইলে ক্রান্তিক উষ্ণতা নির্ণয় কর।

(The temperature of inversion of carbon di-oxide is 170·5°K. Find its critical temperature.) [Ans. 31°C]

5. হিমায়ক যন্ত্রের ন্যূনতম ক্ষমতা কত হইলে বরফ গলিবে না। ধরিয়া লও উষ্ণতা 20°C হইলে ঘণ্টায় 2 kg পরিমাণ বরফ গলে।

(Find the minimum power output of the motor of a refrigerator which just prevents the ice from melting. Suppose the ice melts at the rate of 2 kg per hour when the room temperature is 20°C.) [Ans. 0·018 H.P.]

সপ্তম পরিচ্ছেদ

তাপগতিবিদ্যা
(Thermodynamics)

7.1 সূচনা (Introduction)

রামফোর্ড (Rumford) এবং জুলের (Joule) যান্ত্রিক শক্তির তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হওয়া সংক্রান্ত পরীক্ষা হইতে প্রথমে তাপগতি তত্ত্ব বা তাপশক্তিবিদ্যার সূত্রপাত হয়। তাপগতিবিদ্যায় (thermodynamics) তাপ ও যান্ত্রিক শক্তির ভিতর সম্পর্ক আলোচনা করা হইয়াছে। তাপগতিবিদ্যায় প্রথম ও দ্বিতীয় এই দুইটি সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন তাপীয় ঘটনা ব্যাখ্যা করা হয়।

7.2 তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র (First law of thermodynamics)

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র আলোচনা করিতে হইলেই প্রথমেই অন্তর্নিহিত শক্তি সম্বন্ধে কিছু জানা প্রয়োজন। প্রত্যেক সংস্থার (system) মধ্যে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ শক্তি থাকে যাহার ফলে উহারা বিভিন্ন প্রকার শক্তি উৎপন্ন করিতে পারে। এই শক্তিকে অন্তর্নিহিত শক্তি বলা হয়। পদ্ধতির অভ্যন্তরীণ গঠনের উপর এই শক্তি নির্ভর করে। অভ্যন্তরীণ গঠন অপরিবর্তিত থাকিলে অন্তর্নিহিত শক্তি আয়তন, চাপ এবং উষ্ণতার উপর নির্ভর করে। আদর্শ গ্যাসের অন্তর্নিহিত শক্তি গ্যাসের উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল। কিন্তু বাস্তব গ্যাসের অন্তর্নিহিত শক্তি গ্যাসের আয়তন ও উষ্ণতা উভয়ের উপরেই নির্ভর করে।

রামফোর্ড এবং জুলের পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হইতে প্রাপ্ত **তাপ ও কার্যের** সম্পর্ক হইতে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র প্রতিষ্ঠিত হয়। এই সূত্রানুসারে **যখনই কোন কার্য সম্পূর্ণভাবে তাপে রূপান্তরিত হয় তখনই তাপ এবং কার্য পরস্পরের সমানুপাতিক হইবে।**

অর্থাৎ W পরিমাণ কার্য H পরিমাণ তাপে রূপান্তরিত হইলে $W \propto H$ হইবে অথবা $W = JH$, যেখানে J একটি ধ্রুবক। J-কে তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক (mechanical equivalent of heat) বা জুল তুল্যাঙ্ক (Joule's equivalent) বলা হয় সি.জি.এস. পদ্ধতিতে ইহার মান হইল 4·2 joules/cal।

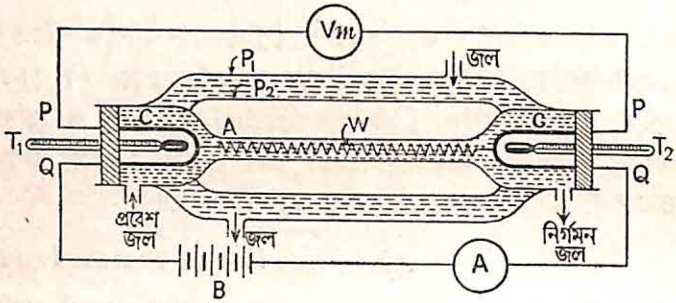
ক্লসিয়াস (Clausius) তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেন **কোন সংস্থা কর্তৃক গৃহীত তাপের কিছু অংশ উহার অন্তর্নিহিত শক্তি বৃদ্ধি করে এবং বাকী অংশ বাহ্যিক কার্য সম্পন্ন করে।**

অর্থাৎ কোন সংস্থা dQ তাপ শোষণ করিবার জন্য উহার অন্তর্নিহিত শক্তি পরিবর্তন du এবং কৃত কার্য dW হইলে আমরা লিখিতে পারি

$$dQ = du + dW$$

7.3 J-এর মান নির্ণয় (Determination of J)

ক্যালেণ্ডার এবং বার্নস J-এর মান নির্ণয়ে যে যন্ত্র ব্যবহার করেন তাহা 7.1 নং চিত্রে দেখানো হইয়াছে। একটি কাচ বা কোয়ার্জের তৈয়ারী 2 mm ব্যাসার্ধের নলের (A) মধ্যে একটি প্লাটিনাম তার (W) নলের অক্ষ বরাবর রাখা আছে। এই নলের ভিতর অবিরাম জল প্রবাহিত হয়। প্লাটিনাম তারের দুই প্রান্ত দুইটি তামার নলের



চিত্র 7.1

(C, C) সহিত যুক্ত থাকে। তামার নল দুইটির মধ্য দিয়া তড়িত প্রবাহ চালানো করিয়া জল উত্তপ্ত করা হয়। বিকিরণের জন্য যাহাতে তাপ নষ্ট কম থাকে, সেইজন্য A নলটিকে বায়ুশূন্য জ্যাকেট P_2 দ্বারা এবং P_2কে আবার P_1 জ্যাকেট দ্বারা আবৃত রাখা হয়।

পরীক্ষার শুরুতে A নলের ভিতর দিয়া জল প্রবাহিত করানো হয় এবং তড়িত প্রবাহের সাহায্যে প্লাটিনাম তারকে উত্তপ্ত করা হয়। জল এবং তড়িতের প্রবাহমাত্রা নিয়ন্ত্রণ করিয়া প্রবেশকারী জল এবং নির্গমনকারী জলের ভিতর উষ্ণতার ব্যবধান একই রাখিতে হইবে। যখন উষ্ণতার পার্থক্য স্থায়ী হইয়া যাইবে তখন একটি নির্দিষ্ট সময় (t) ধরিয়া জল সংগ্রহ করা হয়। সেই সঙ্গে T_1 থার্মোমিটার হইতে প্রবেশকারী জলের উষ্ণতা (θ_1) এবং T_2 থার্মোমিটার হইতে নির্গমনকারী জলের উষ্ণতা (θ_2) নির্ণয় করা হয়। T_1 এবং T_2 যথাক্রমে রোধ থার্মোমিটার (resistance thermometer)। অতঃপর প্লাটিনাম তারের দুই প্রান্তের বিভব-বৈষম্য বিভবমাপী (potentiometer) এবং প্রমাণ কোষের (standard cell) সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

মনে করি, প্লাটিনাম তারের মধ্য দিয়া তড়িত প্রবাহ (i) t সেকেণ্ড ধরিয়া প্রবাহিত হইয়াছে। তারের দুই প্রান্তের বিভব-পার্থক্য V হইলে উৎপন্ন তাপ $H=\frac{Vit}{J}$ যেখানে J হইল তাপের যান্ত্রিক তুল্যাঙ্ক। বিকিরণজনিত তাপক্ষয় নগণ্য হইলে ঐ তাপ m gram জলের উষ্ণতা $(\theta_2-\theta_1)$°C বৃদ্ধি করিবে।

$\therefore$ জল কর্তৃক গৃহীত তাপ $=m(\theta_2-\theta_1)$

সুতরাং $\frac{Vit}{J}=m(\theta_2-\theta_1)$

কিন্তু বিকিরণের দরুণ তাপক্ষয় h হইলে

$$\frac{Vit}{J}=m(\theta_2-\theta_1)+h$$

এখন তড়িত প্রবাহমাত্রা পরিবর্তিত করিয়া i_1 করা হইল জলের প্রবাহ নিয়ন্ত্রণ করিয়া উষ্ণতা ব্যবধান $(\theta_2-\theta_1)^\circ C$ রাখা হয়। এক্ষেত্রে বিভব পার্থক্য V_1 এবং সংগৃহীত জল m_1 gram হইলে

$$\frac{V_1 i_1 t}{J}=m_1(\theta_2-\theta_1)+h$$

সুতরাং $(\theta_2-\theta_1)(m-m_1)=\frac{(Vi-V_1 i_1)}{J}\,t$

অথবা, $J=\frac{(Vi-V_1 i_1)}{(\theta_2-\theta_1)(m-m_1)}\,t$

এই পদ্ধতিতে J-এর মান নির্ণয়ে নিম্নলিখিত সুবিধা আছে।

(a) ক্যালোরিমিটারের প্রয়োজন হয় না।

(b) উষ্ণতা স্থির থাকে।

(c) তড়িতের সাহায্যে তাপ উৎপন্ন হয় বলিয়া তাপের মান নির্ভুলভাবে নির্ণয় করা যায়।

(d) বিকিরণজনিত তাপক্ষয় কত তাহা জানিবার প্রয়োজন হয় না।

(e) নলে অন্য তরল ব্যবহার করিয়া এই পদ্ধতিতে উক্ত তরলের আপেক্ষিক তাপ বিভিন্ন উষ্ণতায় বাহির করা যায়।

7.4 সমোষ্ণ পরিবর্তন (Isothermal change)

কোন গ্যাসকে চাপ প্রয়োগ করিয়া হঠাৎ সংকুচিত করিলে কিছু তাপ উৎপন্ন হয়। ইহার ফলে উষ্ণতা বৃদ্ধি পায়। কিন্তু উৎপন্ন তাপকে তৎক্ষণাৎ অপসারিত করিয়া ধীরে ধীরে চাপ বৃদ্ধি করিলে উষ্ণতার কোন পরিবর্তন হইবে না। আবার গ্যাসকে হঠাৎ প্রসারিত করিলে উহা কিছু কার্য করিবে। ফলে উষ্ণতা হ্রাস পাইবে। কিন্তু প্রয়োজনীয় তাপ বাহির হইতে সরবরাহ করিলে এবং আয়তন প্রসারণ ধীরে ধীরে সংঘটিত হইলে উষ্ণতা স্থায়ী থাকে। যে পরিবর্তনে গ্যাসের উষ্ণতা সর্বদা ধ্রুবক হয় তাহাকে সমোষ্ণ পরিবর্তন বলা হয়। **অর্থাৎ উষ্ণতার কোনরূপ পরিবর্তন না ঘটাইয়া কোন গ্যাসের চাপের পরিবর্তন করিলে যদি আয়তন পরিবর্তন হয়, তবে সেই পরিবর্তনকে সমোষ্ণ পরিবর্তন বলা হয় এবং যে পদ্ধতিতে এই পরিবর্তন সংঘটিত হয় তাহাকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়া (isothermal process) বলা হয়।**

সমোষ্ণ পরিবর্তন সংঘটিত করিতে হইলে (i) গ্যাসকে তাপের সুপরিবাহী পাত্রে রাখিতে হইবে। (ii) পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের উচ্চ তাপগ্রাহীতা থাকিতে হইবে। এবং (iii) ধীরে ধীরে চাপের পরিবর্তন করা প্রয়োজন।

7.5 রুদ্ধতাপ পরিবর্তন (Adiabatic change)

কোন গ্যাসকে হঠাৎ চাপ প্রয়োগ করিয়া সংকুচিত করিলে তাপ উৎপন্ন হয়। ঐ তাপ অপসারিত না করিলে উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইবে। আবার গ্যাসকে হঠাৎ প্রসারিত হইতে দিলে উহা কিছু পরিমাণ তাপ হারাইবে। বাহির হইতে ঐ তাপ সরবরাহ না করিলে গ্যাসের উষ্ণতা হ্রাস পাইবে। অর্থাৎ রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে উষ্ণতার পরিবর্তন হয়।

যে পরিবর্তনে কোন তাপ বাহির হইতে সরবরাহ করা হয় না বা বস্তু হইতে অপসারিত করা হয় না, কিন্তু গ্যাসের চাপ এবং আয়তনের পরিবর্তন হয় তাহাকে রুদ্ধতাপ পরিবর্তন বলা হয়। যে পদ্ধতিতে এইরূপ পরিবর্তন সংঘটিত হয় তাহাকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া (adiabatic process) **বলা হয়।**

রুদ্ধতাপ পরিবর্তন সংঘটিত করিতে হইলে (i) গ্যাসকে তাপের কুপরিবাহী পাত্রে রাখিতে হইবে। (ii) পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের নিম্ন তাপগ্রাহীতা হইতে হইবে এবং (iii) চাপ পরিবর্তন খুব দ্রুত সংঘটিত করা প্রয়োজন।

7.6 (ক) রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between pressure and volume of a gas in adiabatic change)

মনে করি, এক গ্রাম-অণু গ্যাসকে dQ তাপ সরবরাহ করা হইল। ইহার জন্য গ্যাসের উষ্ণতা বাড়িবে এবং কিছু পরিমাণ কার্য উহাকে করিতে হইবে। গ্যাসের উষ্ণতা এবং আয়তন পরিবর্তন যথাক্রমে dT এবং dV।

এখন স্থির আয়তনে dT উষ্ণতা বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় তাপ $= C_v dT$, যেখানে C_v হইল স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ।

আবার P চাপে গ্যাসের আয়তন dV বৃদ্ধি করিতে প্রয়োজনীয় কার্য $= PdV$

সুতরাং $$dQ = \frac{PdV}{Q} + C_v dT \qquad \cdots (7.1)$$

রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় $dQ = 0$

$$\therefore \quad PdV + C_v dT = 0 \qquad \cdots (7.2)$$

আমরা জানি গ্যাসের সমীকরণ হইল $PV = RT$

অতএব উহাকে অবকলন করিয়া (differentiate) পাই $PdV + VdP = RdT$

অথবা, $$dT = \frac{PdV + VdP}{R} \qquad \cdots (7.3)$$

(7.2) সমীকরণে dT-এর মান বসাইলে পাওয়া যায়

$$C_v\left(\frac{PdV+VdP}{R}\right)+PdV=0$$

অথবা, $C_v(PdV+VdP)+R.PdV=0$

অথবা, $C_v(PdV+VdP)+(C_p-C_v)PdV=0$ $[\because C_p-C_v=R]$

অথবা, $C_v.VdP+C_p.PdV=0$

অথবা, $VdP+\frac{C_p}{C_v}PdV=0$

অথবা, $VdP+\gamma PdV=0$

অথবা, $\frac{dP}{P}+\gamma\frac{dV}{V}=0$ ... (7.4)

(7.4) সমীকরণকে সমাকলন করিয়া পাই

$$\log P+\gamma \log V=\text{ধ্রুবক}$$

সুতরাং $PV^\gamma=\text{ধ্রুবক}$ ... (7.5)

ইহাই চাপ এবং আয়তনের ভিতর সম্পর্ক।

(খ) আয়তন এবং উষ্ণতার ভিতর সম্পর্ক (Relation between volume and temperature of a gas)

আমরা জানি, $PV=RT$

সুতরাং $P=\frac{RT}{V}$

ইহা (7.5) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই

$$\frac{RT}{V}.V^\gamma=\text{ধ্রুবক}$$

অথবা, $TV^{\gamma-1}=\text{ধ্রুবক}$ $[\because R=\text{ধ্রুবক}]$ ... (7.6)

ইহাই উষ্ণতা এবং আয়তনের ভিতর সম্পর্ক।

(গ) চাপ এবং উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক (Relation between pressure and temperature of a gas)

আমরা জানি, $PV=RT$

সুতরাং $V=\frac{RT}{P}$

ইহা (7.5) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই,

$$P\left(\frac{RT}{P}\right)^\gamma=\text{ধ্রুবক}$$

অথবা, $P^{\gamma-1}T^\gamma=\text{ধ্রুবক}$ $[\because R=\text{ধ্রুবক}]$

সুতরাং $TP^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ = ধ্রুবক ... (7.7)

ইহাই উষ্ণতা এবং চাপের ভিতর সম্পর্ক ।

(ঘ) ঘনত্ব এবং উষ্ণতার মধ্যে সম্পর্ক (Relation between density and temperature of a gas)

আমরা জানি $V = \frac{m}{\rho}$

যেখানে V = গ্যাসের আয়তন

m = উক্ত গ্যাসের ভর

এবং ρ = গ্যাসের ঘনত্ব

এখন V-এর মান (7.6) সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$T\left(\frac{m}{\rho}\right)^{\gamma-1} = \text{ধ্রুবক}$$

নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের ভর স্থির থাকায় আমরা লিখিতে পারি

$$T\rho^{1-\gamma} = \text{ধ্রুবক} \quad \dots \quad (7.8)$$

ইহাই উষ্ণতা এবং ঘনত্বের ভিতর সম্পর্ক ।

7.7 রুদ্ধতাপ লেখ সমোষ্ণ লেখ অপেক্ষা খাড়া (An adiabatic curve is steeper than an isothermal curve)

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে PV^{γ} = ধ্রুবক

V-এর সাপেক্ষে (with respect to) অবকলন করিয়া (differentiate) পাই

$$P.\gamma V^{\gamma-1} + V^{\gamma}\frac{dP}{dV} = 0$$

অথবা, $$\frac{dP}{dV} = -\gamma\frac{P}{V} \quad \dots \quad (7.9)$$

আবার সমোষ্ণ পরিবর্তনে PV = ধ্রুবক

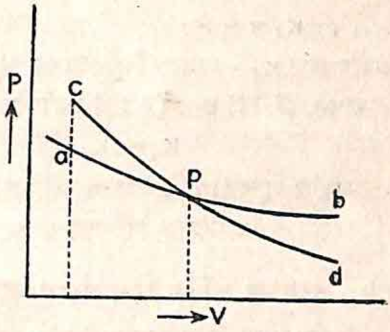
সুতরাং V-এর সাপেক্ষে অবকলন করিলে পাওয়া যায়

$$V\frac{dP}{dV} + P = 0$$

অথবা, $$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V} \quad \dots \quad (7.10)$$

γ-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বেশী। সুতরাং (7.9) এবং (7.10) সমীকরণদ্বয় তুলনা করিলে আমরা দেখিতে পাই যে রুদ্ধতাপ লেখর নতি সমোষ্ণ লেখর নতির

γ গুণ। যে লেখর নতি যত বেশী হইবে সেই লেখ তত খাড়া হইবে (চিত্র 7.2)। মনে করি, P বিন্দুতে আদর্শ গ্যাসের আয়তন, চাপ এবং উষ্ণতা যথাক্রমে V, P এবং T। ঐ গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সংকুচিত করিলে উহার আয়তন হ্রাস পাইবে। a বিন্দু উক্ত অবস্থা নির্দেশ করিতেছে। অতএব aPb গ্যাসের সমোষ্ণ লেখ। কিন্তু গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সমপরিমাণে সংকুচিত করিলে, উদ্ভূত তাপ গ্যাসেই আবদ্ধ থাকে, সেইজন্য চাপ বেশী হইবে। এই অবস্থা c বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। cPd হইল গ্যাসের রুদ্ধতাপ লেখ। অতএব আমরা বলিতে পারি যে রুদ্ধতাপ লেখ বেশী খাড়া। অতএব রুদ্ধতাপ লেখ সমোষ্ণ লেখ অপেক্ষা খাড়া।



চিত্র 7.2

7.8 রুদ্ধতাপ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক এবং সমোষ্ণ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between adiabatic elasticity and isothermal elasticity)

মনে করি, কোন গ্যাসের আয়তন এবং চাপ যথাক্রমে V এবং P। চাপ dP পরিবর্তন করিলে আয়তন পরিবর্তন dV হইল।

এখন আয়তন গুণাংক $K = \dfrac{\text{চাপ পরিবর্তন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}}$

$$= \frac{dP}{\frac{dV}{V}} = \frac{VdP}{dV}$$

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে $PV^{\gamma} =$ ধ্রুবক

$$\therefore \quad V^{\gamma}\frac{dP}{dV} + \gamma PV^{\gamma-1} = 0$$

অথবা, $V\dfrac{dP}{dV} + \gamma P = 0$

অথবা, $\dfrac{VdP}{dV} = -\gamma P$

সুতরাং $K_a = -\gamma P$ $\qquad\cdots\quad (7.11)$

যেখানে রুদ্ধ তাপ স্থিতিস্থাপক গুণাংক $= K_a$

আবার সমোষ্ণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে $PV =$ ধ্রুবক

সুতরাং $V\dfrac{dP}{dV} + P = 0$

অথবা, $\frac{VdP}{dV} = -P$

$\therefore \; K_i = -P$ ... (7.12)

যেখানে K_i = সমোষ্ণ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক

এখন, (7.11) এবং (7.12) সমীকরণ হইতে পাই

$$K_a = \gamma K_i$$

অর্থাৎ রুদ্ধতাপ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক

$= \gamma \times$ সমোষ্ণ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক।

7.9 সমোষ্ণ পরিবর্তনে গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য (Work done by a gas during isothermal change)

মনে করি, এক গ্রাম-অণু গ্যাস একটি পিস্টনযুক্ত চোঙে লওয়া হইয়াছে। চোঙের দেওয়াল তাপের কুপরিবাহী কিন্তু তলদেশ তাপের সুপরিবাহী। গ্যাসের আয়তন, চাপ এবং উষ্ণতা যথাক্রমে V, P এবং T। চোঙটি T°K উষ্ণতা বিশিষ্ট একটি তাপ উৎসের উপর বসানো হইল। এখন ধীরে ধীরে পিস্টনটিকে বাহিরের দিকে সরাইলে গ্যাস প্রসারিত হইবে এবং কিন্তু কার্য করিবে। তাপ উৎস হইতে প্রয়োজনীয় তাপ পিস্টনের অভ্যন্তরে প্রবেশ করিয়া উহার উষ্ণতা স্থির রাখিবে।

এমন, পিস্টনের সরণ dx হইলে গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য,

dW = পিস্টনের উপর প্রযুক্ত বল × সরণ

$= P \times A \times dx$

$= PdV$

[যেখানে A = পিস্টনের প্রস্থচ্ছেদ $\therefore \; Adx = dV$ = আয়তন পরিবর্তন]

কিন্তু সমোষ্ণ পরিবর্তনে গ্যাস বয়েলের সূত্র এবং চার্লসের সূত্র মানিয়া চলে অর্থাৎ $PV = RT$

$$\therefore \; P = \frac{RT}{V}$$

সুতরাং $dW = \frac{RT}{V}.dV$ ... (7.13)

এখন মনে করি, গ্যাসের প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত আয়তন যথাক্রমে V_1 এবং V_2। উক্ত সম্প্রসারণে গ্যাস কর্তৃক কৃত মোট কার্য

$$W = \int dW$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V}\, dV$$

$$= RT \log \frac{V_2}{V_1} \qquad \cdots \quad (7.14)$$

7.10 রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য (Work done by a gas during adiabatic change)

মনে করি, কুপরিবাহী পদার্থ দ্বারা নির্মিত একটি পিস্টনযুক্ত চোঙে এক গ্রাম-অণু গ্যাস লওয়া হইল। গ্যাসের চাপ, আয়তন এবং উষ্ণতা যথাক্রমে P, V এবং T। এখন পিস্টনটিকে হঠাৎ বাহিরের দিকে সরাইলে গ্যাসটি প্রসারিত হইবে এবং কিছু পরিমাণ কার্য সম্পাদন করিবে। কিন্তু চোঙ এবং পিস্টন কুপরিবাহী পদার্থের হওয়ায় বাহির হইতে তাপের কোনরূপ আদান-প্রদান হইবে না। ফলে গ্যাসের উষ্ণতা হ্রাস পাইবে।

মনে করি, পিস্টনের প্রস্থচ্ছেদ A এবং উহার সরণ হইল dx। অতএব উহা যে পরিমাণ কার্য করিবে তাহা

$$dW = P \times A \times dx = PdV$$

কিন্তু এক্ষেত্রে $PV^{\gamma} = C$ [ধ্রুবক]

$$\therefore \quad P = \frac{C}{V^{\gamma}}$$

অতএব, $dW = C\dfrac{dV}{V^{\gamma}}$

গ্যাসের আয়তন V_1 হইতে V_2 হইলে, গ্যাস কর্তৃক মোট কৃত কার্য

$$W = \int dW$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} C\frac{dV}{V^{\gamma}}$$

$$= \frac{C}{1-\gamma}\left[\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{C}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{C}{V_1^{\gamma-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}\left[\frac{P_1V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{P_2V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}}\right] \quad (\because \; P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} = C)$$

$$= \frac{1}{\gamma-1}[P_1V_1 - P_2V_2] \qquad \cdots \quad (7.15)$$

আবার, গ্যাসের প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত উষ্ণতা T_1 ও T_2 হইলে

$P_1V_1 = RT_1$ এবং $P_2V_2 = RT_2$

সুতরাং $W = \dfrac{R}{\gamma-1}[T_1 - T_2]$

$$= \frac{R}{\frac{C_p}{C_v} - 1}\left[T_1 - T_2\right] \quad \left(\because \; \gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$$

$$= \frac{C_p - C_v}{\frac{C_p}{C_v} - 1}[T_1 - T_2] \quad (\because \; R = C_p - C_v)$$

$$= C_v[T_1 - T_2] \qquad \cdots \quad (7.16)$$

7.11 গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ (Specific heats of gases)

গ্যাসকে তাপ দিলে উহার আয়তন, চাপ এবং উষ্ণতার পরিবর্তন হয়। কিন্তু কঠিন বা তরলের ক্ষেত্রে আয়তন এবং চাপের কোন পরিবর্তন হয় না। সুতরাং সাধারণ আপেক্ষিক তাপের সংজ্ঞা গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়। এক্ষেত্রে আয়তন ও চাপের উল্লেখ থাকে। গ্যাসের দুই ধরণের আপেক্ষিক তাপ থাকে।

(a) **স্থির আয়তনে আপেক্ষিক তাপ** (Specific heat at constant volume)

স্থির আয়তনে 1 gram গ্যাসের উষ্ণতা 1°C বৃদ্ধি করিতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন, তাহাকে স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ (c_v) বলা হয়। কিন্তু 1 gram-এর পরিবর্তে 1 গ্রাম-অণু গ্যাস লইলে যে তাপের প্রয়োজন হইবে, তাহাকে স্থির আয়তনে গ্রাম আণবিক আপেক্ষিক তাপ (C_V) বলে।

$$C_V = M \times c_v$$

যেখানে M = গ্যাসের আণবিক ওজন।

(b) **স্থির চাপে আপেক্ষিক তাপ** (Specific heat at constant pressure)

স্থির চাপে 1 gram গ্যাসের উষ্ণতা 1°C বৃদ্ধি করিতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাহাকে স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ (c_p) বলা হয়।

1 gram-এর পরিবর্তে 1 গ্রাম-অণু গ্যাস লইলে উক্ত আপেক্ষিক তাপকে স্থির চাপে গ্রাম আণবিক আপেক্ষিক তাপ (C_P) বলে।

$$C_P = M \times c_p$$

যেখানে M = গ্যাসের আণবিক ওজন।

এখন আয়তন স্থির রাখিয়া বাহির হইতে তাপ সরবরাহ করিলে গ্যাসের উষ্ণতা ও চাপ পরিবর্তিত হইবে। এক্ষেত্রে গ্যাস কোন বাহ্যিক (external) কার্য করিবে না। কিন্তু স্থির চাপে সমপরিমাণ তাপ দিলে গ্যাসের উষ্ণতা এবং আয়তন পরিবর্তিত হইবে এবং গ্যাস কিছু কার্য সম্পন্ন করিবে। ফলে গ্যাসের উষ্ণতা পূর্বের ন্যায় বৃদ্ধি পাইবে না। উষ্ণতা একই রাখিতে হইলে বাহির হইতে আরও তাপ সরবরাহ করিতে হইবে।

কাজেই আমরা বলিতে পারি 1 গ্রাম-অণু গ্যাসের উষ্ণতা 1°C বৃদ্ধি করিতে স্থির আয়তনের বেলায় যে তাপ লাগিবে স্থির চাপে তাহা অপেক্ষা বেশী তাপ লাগিবে অর্থাৎ $c_p > c_v$।

7.12 c_p, c_v এবং R-এর ভিতর সম্পর্ক (Relation between c_p, c_v and R)

গ্যাসের অন্তর্নিহিত শক্তি (internal energy), আয়তন এবং উষ্ণতা যথাক্রমে u, V এবং T হইলে

$$u = f(V, T) \qquad \cdots \quad (7.17)$$

(7.17) সমীকরণকে অবকলন করিয়া পাই

$$du = \left(\frac{du}{dT}\right)_V dT + \left(\frac{du}{dV}\right)_T dV \quad \cdots \quad (7.18)$$

তাপগতি বিদ্যার প্রথম সূত্র হইতে আমরা জানি

$$dQ = du + dW$$
$$= du + PdV \quad \cdots \quad (7.19)$$

এখন, (7.18) এবং (7.19) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$dQ = \left(\frac{du}{dT}\right)_V dT + \left(\frac{du}{dV}\right)_T dV + PdV$$

অথবা, $$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{du}{dT}\right)_V + \left[P + \left(\frac{du}{dV}\right)_T\right]\frac{dV}{dT} \quad \cdots \quad (7.20)$$

এখন আয়তন স্থির থাকিলে $dV = 0$ হইবে।

$$\therefore \quad C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{du}{dT}\right)_V \quad \cdots \quad (7.21)$$

কিন্তু চাপ স্থির থাকিলে আমরা লিখিতে পারি,

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = \left(\frac{du}{dT}\right)_V + \left[P + \left(\frac{du}{dV}\right)_T\right]\left(\frac{dV}{dT}\right)_P$$
$$= C_v + \left[P + \left(\frac{du}{dV}\right)_T\right]\left(\frac{dV}{dT}\right)_P \quad \cdots \quad (7.22)$$

আবার, $\left(\frac{du}{dV}\right)_T = 0$ কারণ সমোষ্ণ সম্প্রসারণে গ্যাসের অন্তর্নিহিত শক্তি একই থাকে।

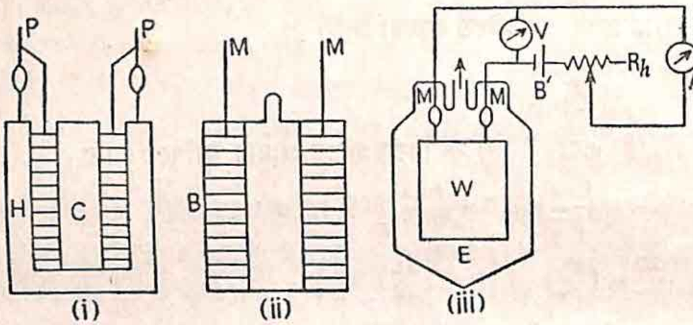
7.13 নিম্ন উষ্ণতায় কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়; নার্ন্স্ট ক্যালরিমিটার (Determination of specific heat of a solid at low temperature ; Nernst calorimeter)

পরীক্ষাধীন বস্তুকে চোঙের (C) আকারে লইতে হয়। চোঙের গায়ে প্লাটিনাম তার জড়ানো থাকে। এই তার রোধ থার্মোমিটার (resistance thermometer) এবং উত্তাপকের (heater) কাজ করে। চোঙের গায়ে প্যারাফিন কাগজ থাকে। ইহার ফলে তারের সহিত চোঙের সংযোগ ঘটে না। দুইটি তার (P P) দ্বারা ক্যালরিমিটারকে ঝোলানো হয় [চিত্র 7.3(i)]।

পরীক্ষাধীন বস্তুটি কুপরিবাহী হইলে প্লাটিনাম তারকে একটি রূপার পাত্রে (B) বসানো হয় [চিত্র 7.3(ii)]। রূপা সুপরিবাহী হওয়ায় কঠিন বস্তুর উষ্ণতা সর্বত্র সমান হয়।

C চোঙকে অপর একটি ফাঁপা চোঙে (H) বসানো হয়। এইভাবে ক্যালরিমিটারটি প্রস্তুত করা হয়। তারপর ক্যালরিমিটারকে (W) একটি কাচের কুণ্ডের (C_2) মধ্যে বসানো হয়। তরল বায়ুর সাহায্যে প্রয়োজনীয় নিম্ন উষ্ণতায় কুণ্ডকে বায়ুশূন্য করিয়া কুণ্ডের মুখ সীল করা হয়।

প্রয়োজনীয় তড়িৎ প্রবাহের ব্যবস্থাপনা 7.3(iii) চিত্রে দেখানো হইয়াছে। মনে করি, দুই তারের প্রান্তীয় বিভব প্রভেদের মান হইল V এবং কুণ্ডলীর মধ্য দিয়া t সময়



চিত্র 7.3

ধরিয়া তড়িৎপ্রবাহ চালানা করা হইল। প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত প্রবাহমাত্রা I_1 এবং I_2 হইলে আমরা লিখিতে পারি

$$V = I_1R_1 = I_2R_2$$

যেখানে R_1 এবং R_2 হইল প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত রোধ। প্লাটিনাম তারের রোধের পরিবর্তন হইতে উষ্ণতা বৃদ্ধি $\delta\theta$ নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, বস্তুর ভর $= m$

আপেক্ষিক তাপ $= s$

$$\text{গড় প্রবাহমাত্রা} = \frac{I_1 + I_2}{2} = I$$

বিভব প্রভেদ $= V$

সুতরাং $VIt = Jms\delta\theta + h$

যেখানে $h =$ বিকিরণের জন্য তাপক্ষয়

$J =$ জুল তুল্যাঙ্ক

$\therefore \quad Jms\delta\theta = VIt - h$

$$\text{অতএব} \quad s = \frac{VIt - h}{Jm\delta\theta}$$

উক্ত সমীকরণ হইতে নিম্ন উষ্ণতায় কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় করিতে পারা যায়।

এখন $PV = RT$ সমীকরণকে অবকলন করিয়া পাই

$$PdV + VdP = RdT$$

চাপ স্থির থাকায় $dP = 0$ হইবে

সুতরাং $PdV = RdT$

অর্থাৎ $P\left(\frac{dV}{dT}\right)_P = R$

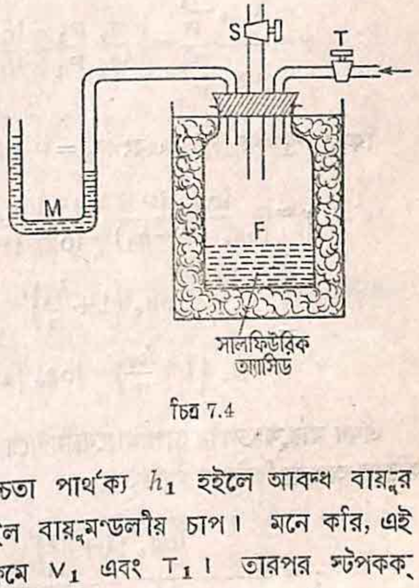
অতএব (7.22) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$C_p = C_v + R$$

অথবা $C_p - C_v = R$ ... (7.23)

7.14 ক্লিমেণ্ট ও ডিসরম্ পদ্ধতিতে গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত নির্ণয় (Determination of the ratio of two specific heats of a gas by Clement and Desorme's method)

এই পদ্ধতিতে একটি মোটা কাচের ফ্লাস্ক (F) লওয়া হয় (চিত্র 7.4)। ফ্লাস্কটির আয়তন প্রায় 30 লিটার। ফ্লাস্কের মুখে অবস্থিত তিনটি নলের সহিত যথাক্রমে একটি স্টপকক্ S, একটি গ্যাস নিরুদ্ধ প্যাঁচকল T এবং একটি ম্যানোমিটার M লাগানো থাকে। ফ্লাস্কটিকে একটি কাঠের গুঁড়া দ্বারা পূর্ণ কাঠের বাক্সে বসানো হয়। ইহার ফলে পরিপার্শ্বের সহিত গ্যাসের তাপের আদান-প্রদান বন্ধ হইয়া যায়।



চিত্র 7.4

পরীক্ষার শুরুতে T-এর মধ্য দিয়া বায়ুমণ্ডলীয় চাপ অপেক্ষা অধিক চাপে শুষ্ক বায়ু ফ্লাস্কের ভিতর প্রবেশ করানো হয়। তারপরে T-কে বন্ধ করা হইলে বায়ু পরিপার্শ্বের উষ্ণতায় আসে। ম্যানোমিটারে তরল স্তম্ভের উচ্চতা পার্থক্য h_1 হইলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ হইবে $P_1 = P + h_1$ যেখানে P হইল বায়ুমণ্ডলীয় চাপ। মনে করি, এই অবস্থায় বায়ুর আয়তন এবং উষ্ণতা যথাক্রমে V_1 এবং T_1। তারপর স্টপকক্ S-কে হঠাৎ খুলিয়াই বন্ধ করা হয়। এই সময় বায়ুর চাপ বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান হইবে। এবং বায়ুর রুদ্ধতাপ সম্প্রসারণের জন্য উষ্ণতা হ্রাস পাইবে। মনে করি, বায়ুর উষ্ণতা এবং আয়তন যথাক্রমে T এবং V। সমগ্র যন্ত্রটি এই অবস্থায় কিছুক্ষণ রাখিয়া দেওয়া হয়। আবদ্ধ বায়ু তাপ গ্রহণ করিয়া পূর্বের উষ্ণতায় ফিরিয়া আসিবে এবং উহার চাপ বৃদ্ধি পাইবে। ম্যানোমিটারে তরল স্তম্ভের উচ্চতা পার্থক্য h_2 হইলে আবদ্ধ বায়ুর চাপ $P_2 = P + h_2$ হইবে।

প্রক্রিয়াটি রুদ্ধ তাপ হওয়ায় আমরা লিখিতে পারি

$$P_1 V_1^{\gamma} = P V^{\gamma}$$

অথবা, $\frac{P_1}{P} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{\gamma}$

অথবা, $\log_e \frac{P_1}{P} = \gamma \log_e \frac{V}{V_1}$

অথবা, $\gamma = \dfrac{\log_e \frac{P_1}{P}}{\log_e \frac{V}{V_1}}$

আবার, রূদ্ধতাপ সম্প্রসারণের পরে বায়ু পুনরায় একই উষ্ণতায় ফিরিয়া আসায় $P_1V_1 = P_2V$ হইবে

অর্থাৎ $\frac{V}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{\log_e \frac{P_1}{P}}{\log_e \frac{P_1}{P_2}} = \frac{\log_e P_1 - \log_e P}{\log_e P_1 - \log_e P_2}$$

কিন্তু $P_1 = P + h_1$ এবং $P_2 = P + h_2$

$$\therefore \quad \gamma = \frac{\log_e (P+h_1) - \log_e P}{\log_e (P+h_1) - \log_e (P+h_2)}$$

$$= \frac{\log_e \left(1+\frac{h_1}{P}\right)}{\log_e \left(1+\frac{h_1}{P}\right) - \log_e \left(1+\frac{h_2}{P}\right)} \quad \cdots \quad (7.25)$$

এখন বায়ুমণ্ডলীয় চাপ ম্যানোমিটারে ব্যবহৃত H উচ্চতার তরলস্তম্ভ দ্বারা প্রকাশ করিলে আমরা লিখিতে পারি,

$$\gamma = \frac{\log_e \left(1+\frac{h_1}{H}\right)}{\log_e \left(1+\frac{h_1}{H}\right) - \log_e \left(1+\frac{h_2}{H}\right)}$$

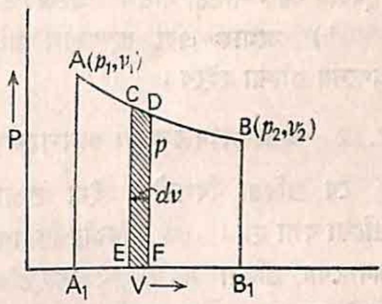
$$= \frac{\frac{h_1}{H}}{\frac{h_1}{H} - \frac{h_2}{H}} \qquad [\because h_1 << H \text{ এবং } h_2 << H]$$

$$= \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad \cdots \quad (7.26)$$

অতএব যে কোন গ্যাসের আপেক্ষিক তাপদ্বয়ের অনুপাত উপরি-উক্ত সমীকরণ হইতে নির্ণয় করা যায়।

7.15 সূচক-চিত্র (Indicator diagram)

মনে করি, কোন গ্যাসের উষ্ণতা স্থির রাখিয়া উহার আয়তন পরিবর্তন করা হইতেছে, তাহা হইলে উক্ত গ্যাসের চাপেরও পরিবর্তন হইবে। এখন গ্যাসের আয়তনকে X-অক্ষ বরাবর এবং চাপকে Y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করিলে একটি সমোষ্ণ লেখচিত্র পাওয়া যাইবে (চিত্র 7.5)। A (p_1, v_1) বিন্দু প্রাথমিক অবস্থা এবং B (p_2, v_2) চূড়ান্ত অবস্থা নির্দেশ করিবে। AB রেখার মধ্যবর্তী বিন্দুগুলি মধ্যবর্তী অবস্থা বুঝাইবে অর্থাৎ আমরা বলিতে পারি AB রেখা সমগ্র প্রক্রিয়াটি প্রকাশ করে। এইরূপ লেখচিত্রকে সূচক-চিত্র বলা হয়।



চিত্র 7.5

মনে করি, P চাপের বিরুদ্ধে গ্যাসের আয়তন dV বৃদ্ধি পাইল। সুতরাং গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য $dW = Pdv$। 7.5 চিত্র হইতে সহজেই বোঝা যায় যে

কৃত কার্য $dW = PdV = CE \times EF$

$= \square CEFD$

এখন গ্যাসের আয়তন V_1 হইতে V_2 হইলে গ্যাস মোট যে কার্য সম্পাদন করিবে তাহা A ও B সীমার মধ্যে □CEFD-এর ন্যায় অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফলের সমষ্টি হইবে।

অতএব, $W = \int dW = \int_{V_1}^{V_2} PdV = ABB_1A_1$ ক্ষেত্রফল।

সুতরাং সূচক-চিত্রের ক্ষেত্রফল হইতে আমরা সরাসরি কৃত কার্য নির্ণয় করিতে পারিব।

7.16 প্রত্যাবর্তক বা অপনেয় প্রক্রিয়া (Reversible process)

যে প্রক্রিয়ায় ক্রিয়াশীল বস্তু (working substance) বিপরীতমুখী হইয়া সম্মুখ প্রক্রিয়ার (direct process) মতো একই অবস্থার মধ্য দিয়া অতিক্রম করে, তাহাকে অপনেয় প্রক্রিয়া বলে। সম্মুখ প্রক্রিয়ায় ক্রিয়াশীল বস্তু কিছু তাপ শোষণ করিলে বিপরীত প্রক্রিয়ায় যদি বস্তুর উপর সমপরিমাণ কার্য করা যায় তাহা হইলে সমপরিমাণ তাপ বর্জিত হইবে।

এই প্রক্রিয়ায় সংস্থার (system) পরিবর্তন খুব ধীরে ধীরে সংঘটিত হয় যাহাতে প্রতিটি ধাপে তাপগতীয় সাম্য (thermodynamic equillibrium) অবস্থা বজায় থাকে।

অপনেয় প্রক্রিয়ার উদাহরণ (examples of reversible process)

(a) প্রতি গ্রামে 80 cal তাপ শোষণ করিয়া 0°C উষ্ণতায় বরফ জলে পরিণত হয়। আবার 0°C উষ্ণতায় জল হইতে প্রতি গ্রামে 80 cal তাপ অপসারণ করিলে পুনরায় বরফ পাওয়া যায়। অতএব ইহা একটি অপনেয় প্রক্রিয়া।

(b) সমোষ্ণ এবং রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া খুব ধীরে ধীরে সংঘটিত হইলে উহা অপনেয় প্রক্রিয়া হইবে।

7.17 অপ্রত্যাবর্তক বা অনপনেয় প্রক্রিয়া (Irreversible process)

যে প্রক্রিয়া বিপরীত হইয়া প্রত্যাবর্তন করিতে পারে না তাহাকে অনপনেয় প্রক্রিয়া বলা হয়। এই প্রক্রিয়ায় ক্রিয়াশীল সংস্থা প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়া আসে না। অনপনেয় প্রক্রিয়া সর্বদা স্বতঃস্ফূর্তভাবে সংঘটিত হয়। অতএব প্রাকৃতিক প্রক্রিয়া মাত্রই অনপনেয় বা অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়া।

অনপনেয় প্রক্রিয়ার উদাহরণ (examples of irreversible process)

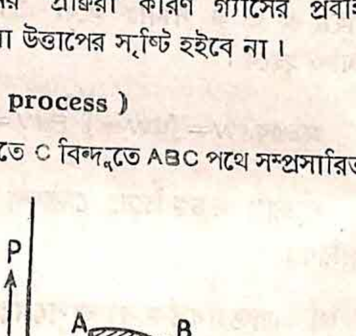
(a) কিছু পরিমাণ জলকে উত্তপ্ত করা হইল। এই প্রক্রিয়াটি অনপনেয়। কারণ পাত্রের তলার দিকের জল তাড়াতাড়ি উত্তপ্ত হইবে এবং পরিচলন স্রোতের সৃষ্টি হওয়ায় সাম্যাবস্থা বজায় থাকে না।

(b) বৈদ্যুতিক রোধের ভিতর দিয়া তড়িৎ প্রবাহ পাঠাইলে তাপের উদ্ভব হয়। ইহা একটি অনপনেয় প্রক্রিয়া।

(c) জুল-টমসন প্রক্রিয়া একটি অনপনেয় প্রক্রিয়া কারণ গ্যাসের প্রবাহ বিপরীতমুখী হইলে সম্মুখ প্রবাহের ন্যায় শৈত্য বা উত্তাপের সৃষ্টি হইবে না।

7.18 আবর্ত বা চক্রীয় প্রক্রিয়া (Cyclic process)

মনে করি, কিছু পরিমাণ গ্যাসকে A বিন্দু হইতে C বিন্দুতে ABC পথে সম্প্রসারিত করা হইল (চিত্র 7.6)। তারপর C বিন্দু হইতে উক্ত গ্যাসের আয়তন ক্রমশ সংকুচিত করিয়া CDA পথে প্রারম্ভিক বিন্দুতে আনা হইল। **যে প্রক্রিয়ায় কোন বস্তু ধারাবাহিক অবস্থা পরিবর্তনের মধ্য দিয়া পুনরায় প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়া আসে, সেই প্রক্রিয়াকে আবর্ত বা চক্রীয় প্রক্রিয়া বলে।**



চিত্র 7.6

চিত্রে বন্ধ রেখা (closed curve) ABCDA একটি আবর্ত প্রক্রিয়া নির্দেশ করিতেছে। এক্ষেত্রে বস্তুর প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত অবস্থা একই হওয়ায় বস্তুর অন্তর্নিহিত শক্তির পরিবর্তন $du = 0$ হইবে। সুতরাং তাপগতি বিদ্যার প্রথম সূত্রানুসারে,

$$dQ = du + Pdv$$
$$= Pdv$$

A বিন্দু হইতে C বিন্দুতে যাইতে বস্তুর অন্তর্নিহিত শক্তির পরিবর্তন পথের উপর নির্ভর করে না। উহা বস্তুর প্রাথমিক ও চূড়ান্ত অবস্থার উপর নির্ভর করে।

গ্যাসের আয়তন সম্প্রসারণের (A বিন্দু হইতে C বিন্দু) সময় গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য $= \square EABCFE$

আবার আয়তন সংকোচনের সময় কৃত কার্য

$$= \square EADCFE$$

অতএব আবর্ত প্রক্রিয়ায় গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য

$$= \square EABCFE - \square EADCFE$$

= চক্রের সূচক দ্বারা বেষ্টিত অংশের ক্ষেত্রফল।

7.19 তাপগতি বিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র (The second law of thermodynamics)

আমরা জানি যে যান্ত্রিক শক্তি, শব্দ শক্তি, আলোক শক্তি প্রভৃতি বিভিন্ন প্রকার শক্তি অতি সহজেই তাপে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু তাপ শক্তিকে রূপান্তরিত করিতে হইলে যন্ত্রের প্রয়োজন অনস্বীকার্য। এই যন্ত্রই তাপ ইঞ্জিন নামে পরিচিত। কার্নো এই তাপ ইঞ্জিন লইয়া বিভিন্ন গবেষণার পরে সিদ্ধান্তে আসেন যে, তাপকে কখনই সম্পূর্ণভাবে কার্যে রূপান্তরিত করা যায় না।

ক্লসিয়াস এবং কেলভিন উপরি-উক্ত তথ্যের যে সাধারণ রূপ দেন তাহা তাপগতি বিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র নামে পরিচিত।

ক্লসিয়াসের সূত্র (Clausius law)

বাহিরের শক্তির সাহায্য ব্যতিরেকে কোন স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রের পক্ষে নিম্ন উষ্ণতার বস্তু হইতে উচ্চ উষ্ণতার বস্তুতে তাপের স্থানান্তর সম্ভব নয়।

অথবা, তাপ আপনা হইতেই শীতলতর বস্তু হইতে উষ্ণতর বস্তুতে প্রবাহিত হইতে পারে না।

কেলভিনের সূত্র (Kelvin's law)

কোন বস্তুকে উহার পরিপার্শ্বের শীতলতম অংশ হইতে অধিকতর শীতল করিয়া শক্তির অবিরাম সরবরাহ পাওয়া সম্ভব নয়।

7.20 তাপগতি বিদ্যার প্রথম এবং দ্বিতীয় সূত্রের মধ্যে পার্থক্য (Difference between first and second laws of thermodynamics)

তাপগতি বিদ্যার প্রথম সূত্র হইতে আমরা জানি যে বিভিন্ন প্রকার শক্তি পরস্পরের ভিতর রূপান্তরিত হইতে পারে। কিন্তু আদৌ সেই পরিবর্তন হইবে কি না, আবার

হইলে তার অভিমুখ এবং পরিমাণই বা কত হইবে তাহা তাপগতি বিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র হইতে ইহা জানা যায়।

তাপগতি বিদ্যার প্রথম সূত্র হইতে আমরা পাই যে, তাপকে কার্যে রূপান্তর করা সম্ভব। সেই সঙ্গে আমাদের মনে এই প্রশ্ন জাগে যে তাপকে কি সম্পূর্ণভাবে কার্যে পরিণত করা যায়। এই প্রশ্নের সমাধান আমরা দ্বিতীয় সূত্র হইতে করিতে পারি।

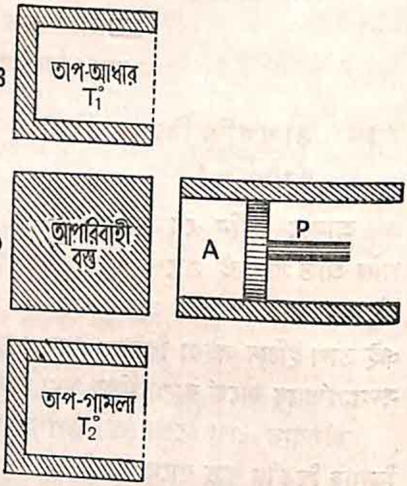
7.21 কার্নোর ইঞ্জিন (Carnot's Engine)

কার্নোর ইঞ্জিন একটি আদর্শ ইঞ্জিন। ইহার বাস্তব রূপায়ন সম্ভব নয়। এই ইঞ্জিন সকল প্রকার ত্রুটিমুক্ত এবং কর্মদক্ষতা সবচেয়ে বেশী। বাস্তব ক্ষেত্রে ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 5% হইতে 20% মাত্র। তাপকে কর্যে রূপান্তরিত করিতে তাপ-ইঞ্জিন ব্যবহার করা হয়।

এই ইঞ্জিন কয়েকটি অংশে বিভক্ত (চিত্র 7.7) :

(a) A একটি চোঙ। ইহার তলদেশ তাপের সুপরিবাহী কিন্তু দেওয়াল কুপরিবাহী পদার্থ দ্বারা নির্মিত। চোঙের ভিতর আদর্শ গ্যাস লওয়া হয়। এই চোঙের ভিতর একটি পিস্টন P ঘর্ষণহীনভাবে চলাচল করিতে পারে।

(b) B একটি তাপ উৎস (source) যাহার উষ্ণতা T_1°K। ইহার তাপগ্রাহীতা খুব উচ্চ এবং উষ্ণতা সর্বদা স্থির থাকে।



চিত্র 7.7

(c) C একটি তাপ-গামলা (sink) যাহার উষ্ণতা T_2°K। ইহার তাপগ্রাহীতা খুব উচ্চ এবং উষ্ণতা সর্বদা একই থাকে।

(d) D একটি অপরিবাহী বস্তু যাহার উপর A চোঙকে রাখা হয়।

7.22 কার্নোর চক্র (Carnot's cycle)

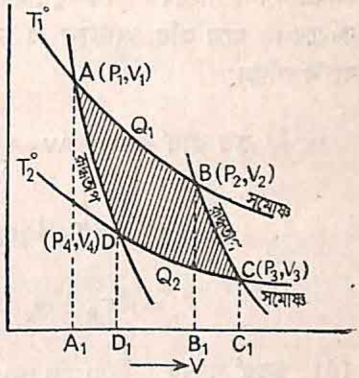
একটি তাপ-ইঞ্জিনকে যে প্রক্রিয়ায় কার্য করাইলে উহা হইতে নিরবচ্ছিন্নভাবে শক্তি পাওয়া যায় তাহাকে কার্নোর চক্র বলা হয়।

ক্রিয়াশীল বস্তু (working substance) নিম্নলিখিত চারটি পর্যায়ের ভিতর দিয়া অতিক্রম করে।

(a) প্রথম পর্যায় (First operation)

মনে করি, চোঙের ভিতর আবদ্ধ গ্যাসের আয়তন, চাপ এবং উষ্ণতা যথাক্রমে V_1, P_1 এবং T_1। A বিন্দু গ্যাসের প্রাথমিক অবস্থা নির্দেশ করে।

এখন চোঙকে তাপ উৎসের উপর বসানো হইল। পিস্টনকে ধীরে ধীরে বাহিরের দিকে সরাইলে গ্যাসের আয়তন প্রসারণ ঘটিবে। ইহার ফলে উষ্ণতা হ্রাস পাইবে। কিন্তু তাপ উৎস হইতে উহা প্রয়োজনীয় তাপ গ্রহণ করিয়া উষ্ণতা স্থির রাখিবে। অর্থাৎ গ্যাসের সমোষ্ণ আয়তন প্রসারণ হইবে। মনে করি চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_2 ও V_2 হইল এবং গ্যাস Q_1 তাপ শোষণ করিল (চিত্র 7.8)।



চিত্র 7.8

$$\therefore \text{ কৃত কার্য } Q_1 = W_1 = \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dV \quad [\because \quad PV = RT_1]$$

$$= RT_1 \log_e \frac{V_2}{V_1} \quad \cdots \quad (7.27)$$

(b) দ্বিতীয় পর্যায় (Second operation)

এখন চোঙকে অপরিবাহী বস্তুর উপর রাখা হইল এবং পিস্টনকে বাহিরের দিকে আরও সরানো হইল। গ্যাসের রুদ্ধতাপ প্রসারণ হইবে। এই প্রক্রিয়া চলিতে থাকিল যতক্ষণ না গ্যাসের উষ্ণতা T_2°K হয়। মনে করি গ্যাসের আয়তন ও চাপ যথাক্রমে V_3 ও P_3 হইল।

$$\therefore \text{ কৃত কার্য } W_2 = \int_{V_2}^{V_3} P dV$$

$$= \int_{V_2}^{V_3} \frac{K}{V^\gamma} dV \quad [\because \quad PV^\gamma = K = \text{ধ্রুবক}]$$

$$= \frac{K}{1-\gamma}\left[\frac{1}{V_3^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{K}{V_3^{\gamma-1}} - \frac{K}{V_2^{\gamma-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}\left[\frac{P_3V_3^\gamma}{V_3^{\gamma-1}} - \frac{P_2V_2^\gamma}{V_2^{\gamma-1}}\right] \quad [\because \quad P_3V_3^\gamma = P_2V_2^\gamma \;]$$

$$= \frac{1}{1-\gamma}[P_3V_3 - P_2V_2]$$

$$= \frac{R}{1-\gamma}\left(T_2 - T_1 \right)\left[\because \begin{array}{l} P_3V_3 = RT_2 \\ P_2V_2 = RT_1 \end{array}\right] \quad \cdots \quad (7.28)$$

(c) তৃতীয় পর্যায় (Third operation)

এইবার গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করা হয়। চোঙকে তাপ-গামলার উপর স্থাপন করিয়া পিস্টনকে ধীরে ধীরে ভিতরের দিকে সরানো হয়। গ্যাসের উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইবে। কিন্তু চোঙ তাপ-গামলার সংস্পর্শে থাকায় গ্যাস তাপ বর্জন করিবে। মনে করি, আয়তন ও চাপ যথাক্রমে V_4 ও P_4 হইল এবং উহা Q_2 তাপ বর্জন করিল।

$$\therefore \text{ কৃত কার্য} = Q_2 = W_3 = \int_{V_3}^{V_4} -PdV$$

$$= -RT_2 \log_e \frac{V_4}{V_3}$$

$$= RT_2 \log_e \frac{V_3}{V_4} \qquad \cdots \quad (7.29)$$

(d) চতুর্থ পর্যায় (Fourth operation)

এই পর্যায়ে গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করা হয়। এই প্রক্রিয়ায় উষ্ণতা বৃদ্ধি পাইবে। এই প্রক্রিয়া চলিবে যতক্ষণ পর্যন্ত না উষ্ণতা T_1 °K হয়। অর্থাৎ গ্যাস পুনরায় প্রারম্ভিক অবস্থায় ফিরিয়া আসে।

$$\text{কৃত কার্য} = W_4 = \int_{V_4}^{V_1} -PdV = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) \qquad \cdots \quad (7.30)$$

$$= W_4$$

$$\text{সুতরাং গ্যাস কর্তৃক কৃত কার্য} = W_1 + W_2 - W_3 - W_4$$

$$= W_1 - W_3 \quad (\because \; W_2 = W_4)$$

$$= Q_1 - Q_2$$

$$= \square ABCD$$

7.23 ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা (Efficiency of engine)

ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা বলিতে ইঞ্জিন মোট যে পরিমাণ তাপকে কার্যে রূপান্তরিত করে এবং উহা তাপ উৎস হইতে যে পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে তাহাদের অনুপাতকে বুঝায়।

$$\text{অর্থাৎ কর্মক্ষমতা, } \eta = \frac{\text{যে পরিমাণ তাপ কার্যে রূপান্তরিত হইয়াছে}}{\text{যে পরিমাণ তাপ শোষণ করিয়াছে}}$$

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

কিন্তু $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{W_1}{W_3}=\frac{RT_1 \log_e \frac{V_2}{V}}{RT_2 \log_e \frac{V_3}{V_4}}$

$$=\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{\log_e \frac{V_2}{V_1}}{\log_e \frac{V_3}{V_4}}\right) \quad \cdots \quad (7.31)$$

আমরা জানি, $T_1V_2^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1}$ (রুদ্ধতাপ রেখা BC হইতে পাওয়া যায়)

$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_4^{\gamma-1}$ (রুদ্ধতাপ রেখা DA হইতে পাওয়া যায়)

অতএব আমরা বলিতে পারি, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_4}{V_3}$

$$\therefore \frac{\log_e \frac{V_2}{V_1}}{\log_e \frac{V_3}{V_4}}=1 \text{ হইবে ।}$$

সুতরাং (7.31) সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{T_1}{T_2}$$

$$\therefore \quad \eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{T_2}{T_1} \quad \cdots \quad (7.32)$$

(7.32) সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা ক্রিয়াশীল বস্তুর (working substance) প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। ইহা কেবলমাত্র তাপ উৎস এবং তাপ-গামলার উষ্ণতার উপর নির্ভর করে। যে কোন দুইটি নির্দিষ্ট উষ্ণতার ভিতরে ক্রিয়াশীল সকল ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা সমান।

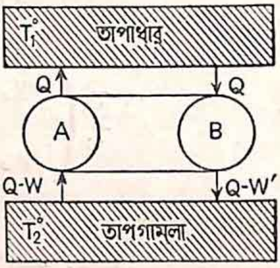
7.24 কার্নোর উপপাদ্য (Carnot's theorem)

উষ্ণতার একই সীমার মধ্যে ক্রিয়াশীল (i) অন্য কোন ইঞ্জিন কার্নোর ইঞ্জিন অপেক্ষা বেশী কর্মদক্ষ হইতে পারে না এবং (ii) সকল প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা সমান এবং উহা ক্রিয়াশীল বস্তুর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। ইহাই কার্নোর উপপাদ্য।

তাপগতি বিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের সাহায্যে কার্নোর উপপাদ্য প্রমাণ করা যায়।

মনে করি, A এবং B দুইটি তাপীয় ইঞ্জিন (চিত্র 7.9)। A হইল প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিন এবং B হইল অনপনেয় ইঞ্জিন। উহারা উষ্ণতার একই সীমার মধ্যে ক্রিয়াশীল।

প্রথমে আমরা ধরিয়া লই যে B ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা বেশী। মনে করি ইঞ্জিন (B) তাপ উৎস হইতে Q তাপ শোষণ করিয়া W′ পরিমাণ কার্য করিয়া বাকী (Q − W′) পরিমাণ তাপ তাপ-গামলার নিকট বর্জন করিতেছে। B ইঞ্জিন A ইঞ্জিনের সহিত এমনভাবে যুক্ত রহিয়াছে যাহাতে B ইঞ্জিন A ইঞ্জিনকে বিপরীত মুখে চালনা করিতে পারে। অতএব A ইঞ্জিন তাপ-গামলা হইতে কিছু পরিমাণ তাপ শোষণ করিবে এবং W কার্য করিবার পর Q তাপ বর্জন করিবে। অতএব A ইঞ্জিন (Q − W) পরিমাণ তাপ শোষণ করিবে।



চিত্র 7.9

এখন B ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা A ইঞ্জিন অপেক্ষা বেশী হওয়ায় $\frac{W'}{Q} > \frac{W}{Q}$ অর্থাৎ $W' > W$ হইবে। সুতরাং $(Q - W) > (Q - W')$ অর্থাৎ B ইঞ্জিন যে পরিমাণ তাপ তাপ-গামলাকে দিবে তাহা অপেক্ষা A ইঞ্জিন বেশী তাপ শোষণ করিবে। এইরূপ চক্র চলিতে থাকিলে তাপ-গামলা ক্রমশ শীতল হইবে এবং এক সময়ে উহা পারিপার্শ্বিক অপেক্ষা অধিক শীতল হইয়া পড়িবে। কিন্তু কেলভিনের তাপগতি বিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রানুসারে ইহা অসম্ভব। অতএব A ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা B ইঞ্জিন অপেক্ষা বেশী হইবে।

আবার আমরা জানি কর্মক্ষমতা $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$; কাজেই ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা ক্রিয়াশীল বস্তুর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না।

7.25 উষ্ণতার অনপেক্ষ স্কেল (Absolute scale of temperature)

কার্নোর ইঞ্জিনের সহায়তায় লর্ড কেলভিন উষ্ণতার একটি স্কেল উদ্ভাবন করেন যাহা ক্রিয়াশীল বস্তুর ধর্মের উপর নির্ভর করে না। এই স্কেলকে উষ্ণতার অনপেক্ষ স্কেল (absolute scale) বা তাপগতীয় স্কেল (thermodynamic scale) বলা হয়। মনে করি, কার্নোর ইঞ্জিন θ_1 উষ্ণতায় Q_1 তাপ শোষণ করিয়া θ_2 উষ্ণতায় Q_2 তাপ বর্জন করিল।

সুতরাং আমরা লিখিতে পারি

$$\eta = f(\theta_1, \theta_2)$$

কিন্তু $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

$$\therefore \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \eta$$

$$= 1 - f(\theta_1, \theta_2)$$

অতএব $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{1}{1-f(\theta_1,\ \theta_2)}=F(\theta_1,\ \theta_2)$ ... (7.33)

যেখানে $F(\theta_1,\ \theta_2)$ হইল একটি নূতন অপেক্ষক। এখন যদি আর একটি কার্নো ইঞ্জিন লওয়া হয় যাহা θ_2 উষ্ণতায় Q_2 তাপ শোষণ করিয়া θ_3 উষ্ণতায় Q_3 তাপ বর্জন করিবে।

$\therefore\ \frac{Q_2}{Q_3}=F(\theta_2,\ \theta_3)$ ... (7.34)

(7.33) এবং (7.34) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই

$\frac{Q_1}{Q_2}\times\frac{Q_2}{Q_3}=\frac{Q_1}{Q_3}=F(\theta_1,\ \theta_2)\times F(\theta_2,\ \theta_3)$ ... (7.35)

মনে করি, তৃতীয় আরেকটি ইঞ্জিন θ_1 উষ্ণতায় Q_1 তাপ গ্রহণ করিয়া θ_2 উষ্ণতায় Q_3 তাপ বর্জন করে।

$\therefore\ \frac{Q_1}{Q_3}=F(\theta_1,\ \theta_3)$ ... (7.36)

(7.35) এবং (7.36) সমীকরণদ্বয় হইতে আমরা লিখিতে পারি

$F(\theta_1,\ \theta_3)=F(\theta_1,\ \theta_2)\times F(\theta_2,\ \theta_3)$ ... (7.36)

মনে করি, $F(\theta_1,\ \theta_2)=\frac{\phi(\theta_1)}{\phi(\theta_2)}$

এবং $F(\theta_2,\ \theta_3)=\frac{\phi(\theta_2)}{\phi(\theta_3)}$

$\therefore\ F(\theta_1,\ \theta_2)\times F(\theta_2,\ \theta_3)=\frac{\phi(\theta_1)}{\phi(\theta_3)}$

$=F(\theta_1,\ \theta_3)$ ... (7.37)

অতএব $\frac{Q_1}{Q_2}=F(\theta_1,\theta_2)=\frac{\phi(\theta_1)}{\phi(\theta_2)}$ ... (7.38)

$\because\ \theta_1>\theta_2$ এবং $Q_1>Q_2$, অতএব $\phi(\theta_1)>\phi(\theta_2)$

অর্থাৎ $\phi(\theta)$ হইল (θ) এর রৈখিক অপেক্ষক

এখন $\phi(\theta)$ কে তাপগতীয় স্কেলে τ দ্বারা প্রকাশ করিলে (7.38) সমীকরণকে লেখা যায়,

$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{\tau_1}{\tau_2}$ ... (7.39)

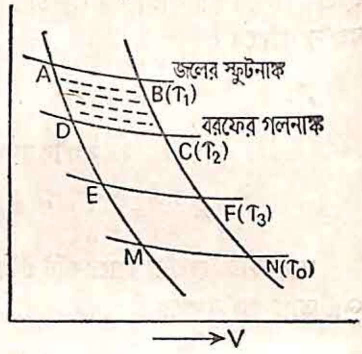
অতএব (7.39) সমীকরণ হইতে একটি নূতন স্কেল পাওয়া যায়। এই স্কেলকে অনপেক্ষ স্কেল বলা হয়।

$\therefore\ \eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{\tau_2}{\tau_1}$ ... (7.40)

এখন $\tau_2=0$ হইলে $\eta=1$ হইবে অর্থাৎ শোষিত তাপ সম্পূর্ণরূপে কার্যে পরিণত হইবে। ইহাই অনপেক্ষ স্কেলের শূন্য ডিগ্রী। অতএব যে উষ্ণতায় ইঞ্জিন শোষিত তাপের সবটাই কার্যে রূপান্তরিত করে তাহাকে অনপেক্ষ স্কেলের শূন্য উষ্ণতা বলে।

7.26 তাপগতীয় স্কেলের ডিগ্রীর আকার (Size of degree in thermodynamic scale)

7.10 চিত্রে স্বাভাবিক চাপে জলের স্ফুটনাঙ্ক এবং বরফের গলানাঙ্ক—এই দুই নির্দিষ্ট উষ্ণতার ভিতর ক্রিয়াশীল কার্নোর ইঞ্জিনের সূচক-চিত্র দেখানো হইয়াছে। ইঞ্জিন কর্তৃক কৃত কার্য □ABCD সমান হইবে। এখন □ABCD-কে AB রেখার সমান্তরালভাবে অঙ্কিত কতকগুলি সমোষ্ণ রেখা দ্বারা সমান 100 ভাগে ভাগ করা হইল। এক একটি অংশের ক্ষেত্রফল এক ডিগ্রীর সমান হইবে। অর্থাৎ এক ডিগ্রী বলিতে জলের স্ফুটনাঙ্ক এবং হিমাঙ্ক—এই দুই উষ্ণতার ভিতর ক্রিয়াশীল কোন কার্নোর ইঞ্জিনের সূচক-চিত্রের ক্ষেত্রফলের 100 ভাগের এক ভাগ শক্তি বুঝায়।



চিত্র 7.10

7.27 তাপগতীয় স্কেল এবং আদর্শ গ্যাস স্কেল অভিন্ন (Thermodynamical scale and perfect gas scale are identical)

আমরা জানি যে T_1 এবং T_2 উষ্ণতার ভিতর ক্রিয়াশীল কার্নোর ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা হইল,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \cdots \quad (7.41)$$

(7.40) এবং (7.41) সমীকরণদ্বয়কে তুলনা করিলে আমরা পাই

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad \cdots \quad (7.42)$$

অর্থাৎ আদর্শ গ্যাস স্কেল এবং তাপগতীয় স্কেল সমান।

যেহেতু $\tau_2 = 0$ হইলে $T_2 = 0$ হইবে, শূন্য ডিগ্রী উভয় স্কেলেই সমান হইবে। এখন তাপগতীয় স্কেলের ক্ষেত্রে,

$$\tau_1 - \tau_2 = 100$$

এবং আদর্শ গ্যাস স্কেলের ক্ষেত্রে,

$$T_1 - T_2 = 100$$

যেখানে T_1 এবং T_2 যথাক্রমে আদর্শ গ্যাস স্কেলে জলের স্ফুটনাঙ্ক এবং হিমাঙ্ক। সুতরাং আদর্শ গ্যাস স্কেলে ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{100}{T_1}$$

আবার তাপগতীয় স্কেলে ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা

$$\eta = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1} = \frac{100}{\tau_1}$$

যেহেতু কর্মক্ষমতা উভয় ক্ষেত্রেই সমান,

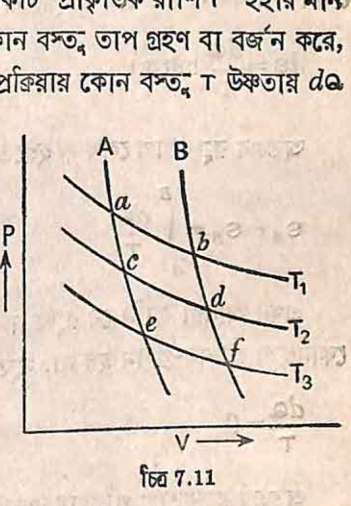
$$\frac{100}{T_1} = \frac{100}{\tau_1}$$

অর্থাৎ জলের স্ফুটনাঙ্ক এবং হিমাঙ্ক উভয় স্কেলেই সমান। সুতরাং আদর্শ গ্যাস স্কেল এবং তাপগতীয় স্কেল অভিন্ন।

7.28 এন্ট্রপি (Entropy)

আমরা জানি, সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় বস্তুর উষ্ণতা স্থির থাকে। কিন্তু রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় ক্রিয়াশীল বস্তুকে উহার অন্তর্নিহিত শক্তির বিনিময়ে কিছু কার্য করিতে হয়। ইহার ফলে উষ্ণতা এবং তাপশক্তি উভয়েই হ্রাস পায়। ক্লসিয়াস বলেন যে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ার ন্যায় রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় 'কোন কিছু' স্থির থাকে। **রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় বস্তুর যে তাপীয় ধর্ম অপরিবর্তিত থাকে তাহাকে এনট্রপি বলে।**

চাপ, আয়তন ও উষ্ণতার ন্যায় এনট্রপি একটি প্রাকৃতিক রাশি। ইহার মান বর্তমান অবস্থার উপর নির্ভর করে। যখন কোন বস্তু তাপ গ্রহণ বা বর্জন করে, তখন উহার এনট্রপি পরিবর্তিত হয়। প্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়ায় কোন বস্তু T উষ্ণতায় dQ তাপ গ্রহণ বা বর্জন করিলে উহার যে এনট্রপি পরিবর্তন হইবে তাহা $dS = \frac{dQ}{T}$।



চিত্র 7.11

7.11 চিত্রে T_1, T_2, T_3 ইত্যাদি উষ্ণতায় কয়েকটি সমোষ্ণ লেখ দেখানো হইয়াছে। উষ্ণতাগুলির মধ্যে পার্থক্য খুব কম এবং সমান। A ও B দুইটি রুদ্ধতাপ লেখ উক্ত সমোষ্ণ লেখগুলিকে যথাক্রমে a ও b, c ও d এবং e ও f বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখানে $abdc$ এবং $cdfe$ দুইটি কার্নোর চক্র। মনে করি, $abdc$ চক্রে a বিন্দু হইতে b বিন্দুতে যাইতে Q_1 তাপ শোষণ করে এবং d হইতে c বিন্দুতে যাইতে Q_2 তাপ বর্জন করে।

$$\therefore \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

অথবা $$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

অর্থাৎ $\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}$

অনুরূপে $cdfe$ কার্নোর চক্রে যদি ক্রিয়াশীল বস্তু T_2 উষ্ণতায় Q_2 তাপ শোষণ করে এবং T_3 উষ্ণতায় Q_3 তাপ বর্জন করে তবে, $\frac{Q_2}{T_2}=\frac{Q_3}{T_3}$ হইবে।

সুতরাং $\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}=\frac{Q_3}{T_3}=$ ধ্রুবক।

অতএব আমরা বলিতে পারি যে একটি রুদ্ধতাপ লেখ হইতে অপর কোন রুদ্ধতাপ লেখতে যাইতে T উষ্ণতায় Q তাপ শোষণ বা বর্জন করিলে,

$\frac{Q}{T}=$ ধ্রুবক $=S$ (মনে করি)।

এই অনুপাত S উক্ত দুই রুদ্ধতাপ রেখা যে অবস্থাদ্বয় প্রকাশ করে, তাহাদের মধ্যে এনট্রপি পরিবর্তন বোঝায়।

যদি রুদ্ধতাপ লেখ দুইটি খুবই কাছাকাছি হয় এবং T উষ্ণতায় dQ তাপ শোষণ বা বর্জন হয় তবে এনট্রপির পরিবর্তন

$dS=\frac{dQ}{T}$ হইবে।

অতএব রুদ্ধতাপ লেখ A হইতে রুদ্ধতাপ লেখ B-তে যাইতে এনট্রপির পরিবর্তন

$$S_A-S_B=\int_A^B \frac{dQ}{T} \qquad \dots \quad (7.43)$$

এখন আমরা জানি যে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় ক্রিয়াশীল বস্তুর সহিত বাহিরের তাপের কোনরূপ আদান-প্রদান হয় না, সুতরাং $dQ=0$; কাজেই এনট্রপির পরিবর্তন

$\frac{dQ}{T}=0$

অতএব রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় এনট্রপির কোন পরিবর্তন হয় না।

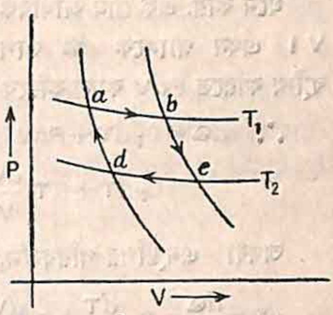
7.29 অপনেয় প্রক্রিয়ায় এনট্রপির পরিবর্তন (Change of entropy in a reversible process)

মনে করি, $abcd$ একটি অপনেয় চক্র যাহা দুইটি সমোষ্ণ লেখ ab ও cd এবং দুইটি রুদ্ধতাপ লেখ bc ও da লইয়া গঠিত (চিত্র 7.12)।

মনে করি, T_1 সমোষ্ণ লেখতে Q_1 তাপ শোষিত এবং T_2 সমোষ্ণ লেখতে Q_2 তাপ বর্জিত হয়। bc এবং da রূদ্ধতাপ লেখ হওয়ায় ঐ সময় বস্তুর এন্‌ট্রপির কোন পরিবর্তন হইবে না। ab সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় এন্‌ট্রপি বৃদ্ধি $\frac{Q_1}{T_1}$ হইবে এবং cd সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় এন্‌ট্রপি হ্রাস $\frac{Q_2}{T_2}$ হইবে।

$\therefore$ মোট এন্‌ট্রপি পরিবর্তন $=\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}$

কিন্তু আমরা জানি অপনেয় চক্রে $\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}$



চিত্র 7.12

$\therefore$ এন্‌ট্রপির নীট পরিবর্তন শূন্য হইবে। অর্থাৎ অপনেয় প্রক্রিয়ায় এন্‌ট্রপি স্থির থাকে।

7.30 অনপনেয় প্রক্রিয়ায় এন্‌ট্রপির পরিবর্তন (Change of entropy in an irreversible process)

মনে করি, কোন অনপনেয় প্রক্রিয়ায় T_1 উষ্ণতায় Q_1 তাপ শোষিত হয় এবং T_2 উষ্ণতায় Q_2 তাপ বর্জিত হয়।

এক্ষেত্রে কর্মদক্ষতা $\eta'=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}$

কিন্তু উষ্ণতায় একই সীমার মধ্যে কোন অপনেয় চক্রের দক্ষতা হইবে $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}$

এখন, কার্নোর উপপাদ্য অনুসারে $\eta>\eta'$

অর্থাৎ $\frac{T_1-T_2}{T_1}>\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}$

অথবা, $1-\frac{T_2}{T_1}>1-\frac{Q_2}{Q^1}$

অথবা, $\frac{Q_2}{Q_1}>\frac{T_2}{T_1}$

অথবা, $\frac{Q_2}{T_2}>\frac{Q_1}{T_1}$

অথবা, $\frac{Q_2}{T_2}-\frac{Q_1}{T_1}>0$

অর্থাৎ এন্‌ট্রপি বৃদ্ধি পাইবে।

7.31 আদর্শ গ্যাসের এনট্রপি পরিবর্তন (Change of entropy of a perfect gas)

মনে করি, এক গ্রাম আণবিক গ্যাসের চাপ, উষ্ণতা এবং আয়তন যথাক্রমে P, T এবং V। এখন গ্যাসকে dQ তাপ দিলে উহা P চাপের বিরুদ্ধে গ্যাসের আয়তন dV বৃদ্ধি করিতে PdV কার্য করিবে এবং গ্যাসের উষ্ণতা dT বৃদ্ধি করিবে।

$$\therefore \quad dQ = C_V dT + PdV$$

$$= C_V dT + RT\frac{dV}{V} \qquad [\because \; PV = RT]$$

অথবা এনট্রপির পরিবর্তন,

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_V\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}$$

সুতরাং P_1, V_1, T_1 অবস্থা হইতে P_2, V_2, T_2 অবস্থায় আসিতে এনট্রপির পরিবর্তন

$$S_2 - S_1 = C_V\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} + R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$$

$$= C_V \log_e\frac{T_2}{T_1} + R\log_e\frac{V_2}{V_1} \qquad \ldots (7.44)$$

আবার $C_P - C_V = R$

$$\therefore \quad S_2 - S_1 = C_V\log_e\frac{T_2}{T_1} + (C_P - C_V)\log_e\frac{V_2}{V_1}$$

$$= C_V\left[\log_e\frac{T_2}{T_1} - \log_e\frac{V_2}{V_1}\right] + C_P\log_e\frac{V_2}{V_1}$$

$$= C_V\log_e\frac{T_2V_1}{T_1V_2} + C_P\log_e\frac{V_2}{V_1}$$

$$= C_V\log_e\frac{P_2}{P_1} + C_P\log_e\frac{V_2}{V_1} \quad \left[\because \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}\right] \qquad \ldots (7.45)$$

আবার $C_V = C_P - R$ বসাইলে

$$S_2 - S_1 = C_P\log_e\frac{T_2}{T_1} - R\log_e\frac{P_2}{P_1} \qquad \ldots (7.46)$$

আদর্শ গ্যাসের এনট্রপির পরিবর্তন (7.44), (7.45) বা (7.46) সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ (Examples)

1. $15^\circ C$ উষ্ণতায় একটি মোটর-টায়ার পাম্প করিয়া উহার চাপ 2 বায়ুমণ্ডল চাপের সমান করা হইলে টায়ারটি সহসা ফাটিয়া গেল। ইহাতে উষ্ণতার হ্রাস কত হইবে ($\gamma = 1{\cdot}4$)।

(A motor tyre is pumped to a pressure of 2 atmospheres at $15^\circ C$, when it suddenly bursts. Calculate the resulting drop in temperature ($\gamma = 1{\cdot}4$).) (C. U. '51)

আমরা জানি, $T^\gamma . P^{1-\gamma} =$ ধ্রুবক

$\therefore \ T_1^\gamma . P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}$

অথবা $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\gamma = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\gamma}$

এখানে $T_1 = 273 + 15 = 288^\circ K$

$P_1 = 2$ atm

$P_2 = 1$ atm

$\therefore \ \left(\frac{288}{T_2}\right)^{1{\cdot}4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0{\cdot}4}$

$\therefore \ T_2 = 236{\cdot}2^\circ K$

$= -36{\cdot}8^\circ C$

$\therefore$ উষ্ণতা হ্রাস $= 15 - (-36{\cdot}8)$

$= 51{\cdot}8^\circ C$.

2. $27^\circ C$ উষ্ণতায় কিছু পরিমাণ গ্যাসকে হঠাৎ সংনমিত করিয়া চাপ আট গুণ করা হইল। $\gamma = 1{\cdot}5$ হইলে, উষ্ণতা বৃদ্ধি কত হইবে ?

(A perfect gas at $27^\circ C$ is suddenly compressed to 8 time its original pressure. Find the rise in temperature, if $\gamma = 1{\cdot}5$.) (C. U. '65)

আমরা জানি $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\gamma = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\gamma-1}$

এখানে $T_1 = 27^\circ C = 300^\circ K$

$\frac{P_2}{P_1} = 8$

$\gamma = 1{\cdot}5$

$\therefore \ \left(\frac{300}{T_2}\right)^{1{\cdot}5} = (8)^{-0{\cdot}5}$

$\therefore \ T_2 = 800^\circ K = 327^\circ C$

সুতরাং উষ্ণতা বৃদ্ধি $= 327 - 27$

$= 300^\circ C$ ।

3. যদি মনে করা যায় যে কোন গতিসম্পন্ন সীসার বুলেটকে সহসা থামাইলে উহার সমস্ত শক্তি তাপে পরিণত হইয়া বুলেটের উষ্ণতা 100°C বৃদ্ধি করিল, তবে উহাকে কত বেগে ছোঁড়া হইয়াছিল ? সীসার আপেক্ষিক তাপ = 0·03 ।

(Assuming that when a moving lead bullet is suddenly stopped, all its available energy heats it up to raise its temperature through 100°C, find the velocity with which the bullet must be fired. sp. heat of lead = 0·03) (C. U. '67)

বুলেটের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$

উৎপন্ন তাপ $= mst$

$= m \times 0{\cdot}03 \times 100$

$= 3m$ cal

$\therefore\ \frac{1}{2}mv^2 = m \times J \times H$

$\therefore\ v^2 = 2JH$

$= 2 \times 4{\cdot}2 \times 10^7 \times 3$

$= 25{\cdot}2 \times 10^7$

$\therefore\ v = 158{\cdot}7$ metres/second ।

4. একটি কার্নো ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা 40% ; উহার নিম্ন-উষ্ণতা আধারের উষ্ণতা 27°C হইলে উচ্চ-উষ্ণতা আধারের উষ্ণতা কত হইবে ?

(A Carnot engine has an efficiency of 40%. Its low temperature reservoir is at 27°C. Find the temperature of the high temperature reservoir.) (C. U. '68)

আমরা জানি, $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

এখানে $\eta = \frac{40}{100}$

$T_2 = 273 + 27 = 300°K$

$\therefore\ \frac{40}{100} = 1 - \frac{300}{T_1}$

অথবা $\frac{300}{T_1} = 1 - \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$\therefore\ T_1 = \frac{300 \times 5}{3} = 500°K$

$\therefore\ t_1 = 500° - 273° = 227°C$ ।

5. 27°c এবং 157°c উষ্ণতাদ্বয়ের মধ্যে ক্রিয়াশীল একটি কার্নো ইঞ্জিনে 20,000 cal তাপ সরবরাহ করা হইল। ইঞ্জিনটি কতটুকু উপযোগী কার্য করিতে সমর্থ হইবে? $1 \text{ cal}=4{\cdot}2\times10^7$ ergs।

(The heat supplied to a Carnot engine working between 27°c and 157°c is 20,000 calories. How much useful work will be done by the engine? $1 \text{ cal}=4{\cdot}2\times10^7$ ergs.) (C. U. '80)

আমরা জানি, কার্নো ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা $\eta=1-\frac{T_2}{T_1}$

এখানে $T_1=157°c=430°K$

$T_2=27°c=300°K$

$\therefore \quad \eta=1-\frac{300}{430}=\frac{13}{43}$

সরবরাহ কৃত তাপ = 20,000 cal

$\therefore$ সরবরাহ শক্তি $=4{\cdot}2\times10^7\times20{,}000$

$=8{\cdot}4\times10^{11}$ ergs

অতএব ইঞ্জিন দ্বারা কৃত কার্য

$=8{\cdot}4\times10^{11}\times\frac{13}{43}$

$=25{\cdot}39\times10^{10}$ ergs।

6. 0°c উষ্ণতার 100 grams জলের সহিত 80°c উষ্ণতার সমপরিমাণ জল মিশ্রিত করিলে এনট্রপির মোট কত বৃদ্ধি হইবে নির্ণয় কর।

(Calculate the resultant increase in entropy when 100 grams of water at 0°c are mixed with an equal mass of water at 80°c.)

আমরা জানি এনট্রপির পরিবর্তন

$$S_2-S_1=\int_{T_1}^{T_2}\frac{dQ}{T}$$

$$=ms\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}$$

$$=ms\log_e\frac{T_2}{T_1}$$

এখন মনে করি মিশ্রণের উষ্ণতা হইল t°c

$\therefore \quad 100(t-0)=100(80-t)$

অথবা $100t = 8,000 - 100t$

অথবা $t = \frac{8,000}{200} = 40°c$

100 grams জলের উষ্ণতা 0°c হইতে 40°c বৃদ্ধি পাইলে এনট্রপি বৃদ্ধি

$$= 100 \times 1 \times \log_e \frac{313}{273}$$
$$= 100 \times 2.3026 \times \log_e \frac{313}{273}$$
$$= 230.26 \times 0.0593$$

আবার 100 grams জলের উষ্ণতা 80°c হইতে 40°c-এ হ্রাস পাইলে এনট্রপি হ্রাস

$$= 100 \times 1 \times \log_e \frac{353}{313}$$
$$= 2.3026 \times 100 \times \log \frac{353}{313}$$
$$= 230.26 \times 0.0523$$

∴ এনট্রপির মোট বৃদ্ধি $= 230.26\ (0.0593 - 0.0523)$
$$= 230.26 \times 0.007$$
$$= 1.6118\ \text{cal/°c}$$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. তাপগতি বিদ্যার প্রথম সূত্র বিবৃত কর এবং ইহার তাৎপর্য সম্পূর্ণরূপে ব্যাখ্যা কর।

(State and explain fully the significance of the first law of Thermodynamics.)
(C. U. '60)

2. স্থায়ী চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ স্থায়ী আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ অপেক্ষা বেশী হয় কেন ব্যাখ্যা কর। এক গ্রাম-অণু আদর্শ গ্যাসের বেলায় উহাদের মানের যে পার্থক্য তাহা নির্ধারণ কর।

(Explain why the specific heat of a gas at constant pressure is greater than that at constant volume. Obtain an expression for the difference between the values for 1 gram/molecule of a perfect gas.)
(C. U. '62)

3 সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ভিতর পার্থক্য নির্ধারণ কর। দেখাও যে, রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে PV^γ = ধ্রুবক, প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থ বহন করিতেছে।

(Distinguish between isothermal and adiabatic changes. Show that for adiabatic changes in a perfect gas PV^γ = constant ; the notations have their usual meaning.)
(C. U. '67)

4. কোন আদর্শ গ্যাস যদি (i) সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় এবং (ii) রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সম্প্রসারিত হয় তবে কৃত কার্যের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(Calculate the amount of work done during (i) an isothermal expansion and (ii) an adiabatic expansion of a perfect gas.) (C. U. '72)

5. গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের অনুপাত সরাসরি নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর।

(Describe a method of measuring the ratio of two specific heats of a gas directly.) (C. U. '66)

6. কার্নো চক্র বর্ণনা কর। দুইটি উষ্ণতার মধ্যে একটি ক্রিয়াশীল কার্নো ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা সমীকরণটি বাহির কর।

(Describe Carnot's cycle. Deduce the expression for the efficiency of a Carnot's engine working between two temperatures.) (C. U. '77)

7. কার্নো চক্রের বিভিন্ন প্রক্রিয়া বর্ণনা কর। প্রতি পর্যায়ে কৃত কার্য নির্ণয় করিয়া চক্রের কর্মক্ষমতা বাহির কর।

(Describe clearly the operation of various stages of the Carnot's cycle. Calculate the works done at the different stages and deduce the thermal efficiency of the cycle.) (C. U. '80)

8. তাপগতি বিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি লিখ এবং ব্যাখ্যা কর। এনট্রপি কি? দেখাও যে, অপনেয় প্রক্রিয়ায় এনট্রপি স্থির থাকে।

(State and explain the second law of thermodynamics. What is entropy ? Show that entropy remains constant in a reversible cycle.) (C. U. '79)

9. প্রমাণ উষ্ণতা এবং চাপে কিছু পরিমাণ বায়ুর আয়তন রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করিয়া প্রাথমিক আয়তনের $\frac{1}{5}$ করা হইল। ইহাতে উষ্ণতা কত বৃদ্ধি পাইল, নির্ণয় কর। (বায়ুর ক্ষেত্রে $\gamma = 1{\cdot}41$)

(A quantity of air at NTP is adiabatically compressed to $\frac{1}{5}$ th of its volume. Calculate the rise of its temperature. γ for air $= 1{\cdot}41$) (C. U. '65)

[Ans. $255{\cdot}2^\circ$c]

10. 300 metre উঁচু একটি জলপ্রপাতের তলদেশ এবং শীর্ষদেশের ভিতর উষ্ণতার পার্থক্য কত হইবে, যদি মনে করা যায় যে পতনশীল জলের সমস্ত শক্তিই তাপে পরিণত হইল এবং জলের আপেক্ষিক তাপ $= 1$ cal/gram °c.

(Calculate the difference in temperature of water at the top and at the bottom of a waterfall 300 metres high, assuming all

energy to be converted into heat and retained by the water. Sp. heat of water = 1 cal/gram°c) (C. U. '65)

[Ans. 0·23°c]

11. 100°c এবং 10°c উষ্ণতার মধ্যে একটি ইঞ্জিন কার্নোচক্র অনুযায়ী কাজ করিতেছে। সমগ্র চক্রে কৃত কার্য যদি 1000 kilogram-metres হয় তবে উচ্চ উষ্ণতার আধার হইতে সে যে তাপ গ্রহণ করিবে তাহা ক্যালরিতে নির্ণয় কর। $J = 4{\cdot}18 \times 10^7$ ergs/cal.

(An engine works in a Carnot cycle between the temperatures 100°c and 0°c. If the work done in the cycle is 1000 kilogram-metres, find how much heat, measured in calories, is taken in at the higher temperature. $J = 4{\cdot}18 \times 10^7$ ergs/cal.) (C. U. '69)

[Ans. 8.7×10^4 cal]

12. 10 grams বরফ যখন 0°c উষ্ণতায় জলে পরিণত হয় তখন এনট্রপির বৃদ্ধি কত হয় নির্ণয় কর।

(Calculate the increase of entropy when 10 grams of ice at 0°c are converted into water at the same temperature.)

[Ans, 2·9 cal/°c]

অষ্টম পরিচ্ছেদ

তাপ ইঞ্জিন

(Heat Engine)

8.1 সূচনা (Introduction)

তাপ ইঞ্জিন হইল তাপশক্তিকে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত করার একটি ব্যবহারিক প্রয়োগ। একটি তাপ ইঞ্জিনে নিম্নলিখিত অংশগুলি লক্ষ্য করা যায়:

(i) উচ্চ উষ্ণতায় রক্ষিত একটি তাপাধার, যাহা তাপশক্তি সরবরাহ করে।

(ii) নিম্ন উষ্ণতায় রক্ষিত একটি তাপ-গামলা। তাপশক্তির যে অংশ কার্যে পরিণত হয় না, তাপ-গামলা তাহা গ্রহণ করে।

(iii) একটি ক্রিয়াশীল বস্তু। ইহা তাপাধার হইতে তাপশক্তি সংগ্রহ করিয়া কিছু অংশ কার্যে পরিণত করে এবং বাকী অংশ তাপ-গামলায় প্রত্যর্পণ করে।

(iv) ক্রিয়াশীল বস্তু একটি চক্রের মধ্য দিয়া চলাচল করিবে। ইহার পুনরাবৃত্তি করা চলে এবং প্রত্যেক চক্রে বস্তু কিছু বাহ্য কাজ সম্পন্ন করে।

তাপ ইঞ্জিনসমূহকে প্রধানত দুই ভাগে ভাগ করা যাইতে পারে: (i) বহির্দহন ইঞ্জিন ও (ii) অন্তর্দহন ইঞ্জিন। আমরা নিম্নে অন্তর্দহন ইঞ্জিন সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করিব।

8.2 অন্তর্দহন ইঞ্জিন (Internal combustion engine)

ডিজেল, পেট্রল প্রভৃতি জ্বালানী দহন করিয়া এই ইঞ্জিনে যে শক্তি সৃষ্ট হয় তাহাকে কাজে লাগানো হইয়া থাকে। এই দহনকার্য মূল ইঞ্জিনের ভিতরে সংঘটিত হয় বলিয়া ইহাকে অন্তর্দহন ইঞ্জিন বলা হয়।

অন্তর্দহন ইঞ্জিন দুই প্রকারের হয়: (i) অটো ইঞ্জিন ও (ii) ডিজেল ইঞ্জিন। অটো ইঞ্জিনে তাপ স্থির আয়তনে সরবরাহ হয়; অপরপক্ষে ডিজেল ইঞ্জিনে তাপ সরবরাহ হইয়া থাকে স্থির চাপে।

8.3 অটো ইঞ্জিন (Otto engine)

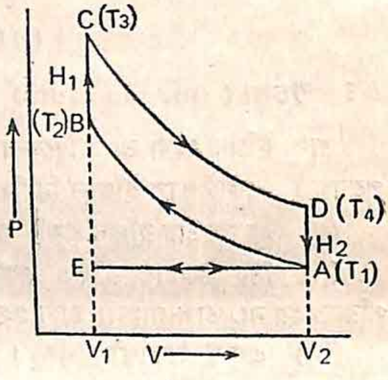
1878 খ্রীষ্টাব্দে জার্মান বিজ্ঞানী অটো এই ইঞ্জিন আবিষ্কার করেন। অটো ইঞ্জিনে বায়ু ক্রিয়াশীল বস্তু হিসাবে ও পেট্রল বাষ্প জ্বালানী হিসাবে ব্যবহৃত হয়। এই ধরণের ইঞ্জিন মোটর, এরোপ্লেন প্রভৃতি যন্ত্রে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

অটো চক্রের বিভিন্ন পর্যায়কে আমরা নিম্নোক্ত উপায়ে ভাগ করিতে পারি। চিত্র 8.1 এ অটো চক্রের সূচক দেওয়া হইল।

(i) চিত্রে E হইতে A পর্যন্ত গ্যাস গ্রহণের পর্যায় নির্দেশ করে। বায়ুমণ্ডলের সমান চাপে বায়ুর মিশ্রণ ও পেট্রল বাষ্প চোঙের ভিতর প্রবেশ করে। ধরা যাক, A অবস্থানে অন্তিম আয়তন (final volume) V_2 যখন উষ্ণতা T_1।

(ii) A হইতে B পর্যন্ত গ্যাস সংনমন পর্যায় (adiabatic compression) সূচিত করে। এখানে আয়তন V_2 থেকে V_1 এ পরিবর্তিত হয় এবং উষ্ণতা পরিবর্তিত হয় T_1 থেকে T_2 তে।

(iii) B হইতে C পর্যন্ত জ্বালন পর্যায় (ignition stage) সূচিত করে। এই সময়ে স্পার্কের দ্বারা মিশ্রণে অগ্নি সংযোগ করা হয়; ফলে চাপ 18 বায়ুমণ্ডল থেকে 80 বায়ুমণ্ডলে বৃদ্ধি পায় ও উষ্ণতা T_2 থেকে T_3 তে বৃদ্ধি পায় (500°c হইতে 2000°c)।



চিত্র 8.1

(iv) C হইতে D ক্রিয়াশীল পর্যায় (working stroke) নির্দেশ করে। এখানে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় গ্যাস প্রসারিত হয় ও ইঞ্জিন কার্য করিতে থাকে। আয়তন V_1 থেকে V_2 তে পরিবর্তিত হয়, ফলে চাপ ও উষ্ণতা উভয়েই হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

(v) D বিন্দুতে নির্গম নলের ভালভ উন্মুক্ত হয়; ইহার ফলে চাপ আবার বায়ুমণ্ডলের চাপের সমান হয়। উষ্ণতা T_4 থেকে T_1 এ পরিবর্তিত হয়। এই পরিবর্তন DA রেখা দ্বারা চিহ্নিত করা হইয়াছে।

(vi) চক্রের সর্বশেষ পর্যায়ে AE রেখা নিষ্কাশক পর্যায় (exhaust stroke) বা নিঃসরণ পর্যায় সূচিত করে।

8.3.1 অটো ইঞ্জিনের দক্ষতা (Efficiency of an Otto Engine)

মনে করি, দহনের ফলে যে তাপ সরবরাহ করা হয় তাহা Q_1 ও বস্তু যে পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহা Q_2। সুতরাং আমরা লিখিতে পারি,

$$Q_1 = C_v(T_3 - T_2) \qquad \cdots (8.1)$$

এবং $$Q_2 = C_v(T_4 - T_1) \qquad (8.2)$$

∴ ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

$$= \frac{C_v(T_3 - T_2) - C_v(T_4 - T_1)}{C_v(T_3 - T_2)}$$

$$= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \qquad \cdots (8.3)$$

যেহেতু, C ও D বিন্দুদ্বয় একই রুদ্ধতাপ রেখায় অবস্থান করে,

$$\therefore \; T_3 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_2^{\gamma-1} \qquad \cdots (8.4)$$

আবার, A ও B বিন্দুদ্বয় একই রুদ্ধতাপ রেখায় অবস্থান করে,

$$\therefore \quad T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1} \qquad \cdots \quad (8.5)$$

সমীকরণ (8.4) হইতে সমীকরণ (8.5) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$(T_4 - T_1)\, V_2^{\gamma-1} = (T_3 - T_2)\, V_1^{\gamma-1}$$

অথবা, $$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \qquad \cdots \quad (8.6)$$

সমীকরণ (8.3) ও (8.6) হইতে পাই,

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

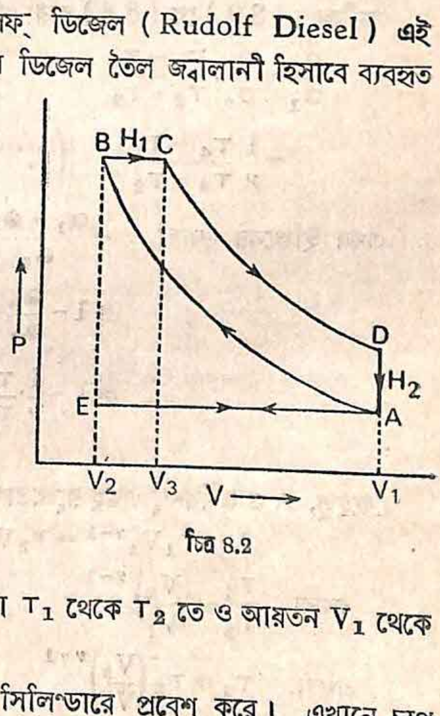
$$= 1 - \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1} \qquad \cdots \quad (8.7)$$

যেখানে রুদ্ধতাপ সংনমন অনুপাত, $\rho = \frac{V_2}{V_1}$ ।

8.4 ডিজেল ইঞ্জিন (Diesel Engine)

1892 খ্রীষ্টাব্দে জার্মান বিজ্ঞানী রুডলফ্ ডিজেল (Rudolf Diesel) এই ইঞ্জিন আবিষ্কার করেন। ডিজেল ইঞ্জিনে ডিজেল তৈল জ্বালানী হিসাবে ব্যবহৃত হয়। এই ধরনের ইঞ্জিন মোটর, এরোপ্লেন, পাম্প প্রভৃতি যন্ত্রে ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

ডিজেল চক্রের বিভিন্ন ঘাতকে আমরা নিম্নোক্ত উপায়ে ভাগ করিতে পারি। চিত্র 8.2 এ ডিজেল চক্রের সূচক দেওয়া হইল।



চিত্র 8.2

(i) চিত্রে E হইতে A পর্যন্ত অর্থাৎ EA রেখা গ্যাস গ্রহণের পর্যায় নির্দেশ করে। ধরা যাক, A অবস্থানে বায়ুর আয়তন V_1 ।

(ii) A হইতে B পর্যন্ত গ্যাস সংনমন পর্যায় সূচিত করে। এখানে বায়ু রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংনমিত হয়। ফলে উষ্ণতা T_1 থেকে T_2 তে ও আয়তন V_1 থেকে V_2 তে পরিবর্তিত হয়।

(iii) B হইতে C পর্যন্ত জ্বালানী সিলিণ্ডারে প্রবেশ করে। এখানে চাপ অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু উষ্ণতা T_2 থেকে T_3 তে ও আয়তন V_2 থেকে V_3 তে পরিবর্তিত হয়।

(iv) C হইতে D পর্যন্ত ক্রিয়াশীল পর্যায় প্রতিপন্ন করে। এখানে বায়ুর মিশ্রণ ও ডিজেল তৈলের বাষ্প রুদ্ধতাপে প্রসারিত হয়।

(v) D বিন্দুতে নিষ্কাশক ভালভ (exhaust valve) উন্মুক্ত হয় ও চাপ A বিন্দুতে নামিয়া আসে। এখানে উষ্ণতা ও চাপ হ্রাসপ্রাপ্ত হয় কিন্তু আয়তন অপরিবর্তিত থাকে।

(vi) চক্রের সর্বশেষ পর্যায়ে AE রেখা নিষ্কাশক ঘাত বা নিঃসরণ পর্যায় সূচিত করে।

8.4.1 ডিজেল ইঞ্জিনের দক্ষতা (Efficiency of a diesel engine)

মনে করি, BC রেখা বরাবর স্থির চাপে ক্রিয়াশীল বস্তু যে পরিমাণ তাপ শোষণ করে তাহা Q_1 ও DA রেখা বরাবর স্থির আয়তনে ক্রিয়াশীল বস্তু যে পরিমাণ তাপ বর্জন করে তাহা Q_2। সুতরাং আমরা লিখিতে পারি,

$$Q_1 = C_p(T_3 - T_2) \quad \cdots \quad (8.8)$$

এবং $$Q_2 = C_v(T_4 - T_1) \quad \cdots \quad (8.9)$$

যেখানে, C_p হইল স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ এবং C_v হইল স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ।

সমীকরণ (8.9) কে (8.8) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{C_v}{C_p} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad \left(\because \ \gamma = \frac{C_p}{C_v} \right) \quad \cdots \quad (8.10)$$

এখন ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

$$= 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad \cdots \quad (8.11)$$

(Q_2/Q_1 এর মান বসাইয়া)

যেহেতু, A ও B বিন্দু একই রুদ্ধতাপ রেখায় অবস্থান করে,

$$\therefore \ T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_2^{\gamma - 1} \quad \cdots \quad (8.12)$$

অথবা, $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma - 1}$$

অথবা, $$T_1 = T_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma - 1}$$

$$= T_2 \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\gamma - 1} \quad \cdots \quad (8.13)$$

যেখানে, রুদ্ধতাপ প্রসারণ অনুপাত, $\rho=\frac{V_1}{V_2}$. এখন, B ও C বিন্দু একই চাপে অবস্থিত

$$\therefore \quad \frac{T_2}{V_2}=\frac{T_3}{V_3}$$

$$\text{অথবা,} \quad T_3=T_2\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

$$=T_2 e \qquad \cdots \quad (8.14)$$

যেখানে, দহন প্রসারণ অনুপাত, $e=\frac{V_3}{V_2}$.

আবার, C ও D বিন্দু একই রুদ্ধতাপ রেখায় অবস্থান করে,

$$\therefore \quad T_3 V_3^{\gamma-1}=T_4 V_4^{\gamma-1}$$

$$\text{অথবা,} \quad T_4=T_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

$$\text{কিন্তু} \quad V_4=V_1,$$

$$\therefore \quad T_4=T_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$=T_3\left(\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$=T_3\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}\cdot\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

$$=T_3(e)^{\gamma-1}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1} \quad [\text{ সমীকরণ (8.14) হইতে }]$$

$$=T_2(e)^{\gamma}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1} \qquad \cdots \quad (8.15)$$

এক্ষণে, সমীকরণ (8.11) হইতে পাই,

$$\eta=1-\frac{1}{\gamma}\left[\frac{T_2 e\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}-T_2\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}}{T_2 e-T_2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}\frac{e^{\gamma}-1}{e-1} \qquad \cdots \quad (8.16)$$

8.5 অটো ইঞ্জিন ও ডিজেল ইঞ্জিনের তফাত (Difference between Otto engine and diesel engine)

অটো ইঞ্জিন	ডিজেল ইঞ্জিন
1. অটো ইঞ্জিনে বেশী জ্বালানী খরচ হয় ও ইহার দাম অধিক।	1. ডিজেল ইঞ্জিনে জ্বালানী খরচ অপেক্ষাকৃত কম।
2. রুদ্ধতাপ সংনমন অনুপাত ও সৃষ্ট অশ্বক্ষমতা কম।	2. রুদ্ধতাপ সংনমন অনুপাত ও সৃষ্ট অশ্বক্ষমতা বেশী।
3. এখানে তাপ সরবরাহ স্থির আয়তনে হয়।	3. এখানে তাপ সরবরাহ স্থির চাপে হয়।
4. এই ইঞ্জিনকে খুব দ্রুত চালনা করা যায়; চোঙে জ্বালানী প্রবেশ করানোর জন্যে আলাদা কোন পাম্পের দরকার হয় না।	4. এই ইঞ্জিনকে দ্রুত চালনা করা যায় না; চোঙে জ্বালানী প্রবেশ করানোর জন্যে আলাদা পাম্পের অবশ্যই দরকার।
5. অটো ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা বেশী নয়।	5. ডিজেল ইঞ্জিনের দক্ষতা অপেক্ষাকৃত বেশী।

উদাহরণ (Examples)

1. একটি অটো ইঞ্জিনের সংনমন অনুপাত 5 হইলে, উহার কর্মক্ষমতা কত হইবে নির্ণয় কর।

(If the compression ratio of an Otto engine is 5, then find its efficiency.)

আমরা জানি,

দক্ষতা, $\eta = 1-\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}$

এখানে, সংনমন অনুপাত, $\rho = 5$

এবং $\gamma = 1{\cdot}4$ (বায়ু)

$$\therefore \quad \eta = 1-\left(\frac{1}{5}\right)^{1\cdot4-1}$$

$$=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{0\cdot4}$$

$$=1-0{\cdot}5257$$

$$=0{\cdot}4743$$

$=47\%$ (প্রায়)।

2. অটো চক্রে একটি ক্রিয়াশীল গ্যাস ইঞ্জিনের ঘাতের দৈর্ঘ্য 9 inches ও সিলিণ্ডারের ব্যাস 6 inches। মোচন আয়তন 80 cubic inches হইলে ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা বাহির কর। ($\gamma=1{\cdot}4$)

(A gas engine working on the Otto cycle has a stroke of 9 inches length and the diameter of the cylinder is 6 inches. If the clearance volume is 80 cubic inches find the efficiency of the engine. Given that $\gamma=1{\cdot}4$)

পিস্টন দ্বারা সঞ্চালিত আয়তন

$$=\text{ঘাতের দৈর্ঘ্য}\times\text{পিস্টনের ক্ষেত্রফল}$$

$$=9\times\frac{\pi(6)^2}{9}=254{\cdot}6 \text{ cubic inches}$$

এখন, মোট আয়তন = সঞ্চালিত আয়তন + মোচন আয়তন

$$=254{\cdot}6+80=334{\cdot}6 \text{ cubic inches}$$

$\therefore$ সংনমন অনুপাত, $\rho=\dfrac{\text{মোট আয়তন}}{\text{মোচন আয়তন}}$

$$=\frac{334{\cdot}6}{80}=4{\cdot}18$$

$\therefore$ দক্ষতা, $\eta=1-\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}$

$$=1-\left(\frac{1}{4.18}\right)^{1\cdot4-1}$$

$$=1-0{\cdot}57$$

$$=0{\cdot}43$$

$$=43\%\text{।}$$

3. একটি অটোচক্রের দক্ষতা 52%। ইহার সংনমন অনুপাতের মান বাহির কর।

(The efficiency of an Otto cycle is 52%. Determine the value of its compression ratio.)

আমরা জানি,

দক্ষতা, $\eta=1-\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}$

এখানে, $\eta=52\%=0{\cdot}52$

$\gamma=1{\cdot}4$ (বায়ু)

$$\therefore\ 52=1-\left(\frac{1}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

$$=1-\left(\frac{1}{\rho}\right)^{0\cdot4}$$

অথবা, $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{0\cdot4} = 0\cdot48$

অথবা, $\rho = 6$ (প্রায়)।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. অটো চক্র সংক্ষেপে বর্ণনা কর। ঐ চক্র অনুযায়ী চালিত একটি ইঞ্জিনের কর্মক্ষমতা নির্ণয় কর।

(Describe briefly an Otto cycle. Calculate the efficiency of an engine performing an Otto cycle.)

2. অন্তর্দহন ইঞ্জিন কাহাকে বলে? ডিজেল চক্র বর্ণনা কর ও ঐ চক্রের কর্মক্ষমতার রাশিমালা উপপাদন কর।

(What are internal combustion engines ? Describe a diesel cycle and work out an expression for its efficiency.)

3. সংক্ষিপ্ত টীকা লিখ : অন্তর্দহন ইঞ্জিন।

(Write a short note on internal combustion engine.)

(C. U. '78)

4. অটো ইঞ্জিন ও ডিজেল ইঞ্জিনের ভিতর পার্থক্য কি কি ?

(What are the differences between an otto and a diesel engine ?)

5. একটি ডিজেল ইঞ্জিনের রুদ্ধতাপ প্রসারণ অনুপাত 13 : 1 ও দহন প্রসারণ অনুপাত 8% হইলে ইহার কর্মক্ষমতা কত হইবে ? দেওয়া আছে, $\gamma = 1\cdot4$।

(If the adiabatic compression ratio of a diesel engine is 13 : 1 and the fuel is cut off at 8% of stroke, what will be its efficiency ? Given, $\gamma = 1\cdot4$)

[Ans. 58·24%]

পরিশিষ্ট

H.A.1. কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ অবস্থার সমীকরণ (Some important Equations of State)

ভ্যান-ডার-ওয়ালসের অবস্থার সমীকরণ পরীক্ষালব্ধ ফলের সহিত পুরো মেলে না বলিয়া অন্যান্য কয়েকটি সমীকরণ বিজ্ঞানীরা উপস্থাপিত করেন। কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ সমীকরণ নিম্নে উল্লেখ করা হইল :

(i) ক্লসিয়াসের সমীকরণ (Clausius Equation)

পরীক্ষালব্ধ ফলের সহিত ভ্যান-ডার-ওয়ালসের সমীকরণ অপেক্ষা এই সমীকরণের অধিকতর মিল লক্ষ্য করা যায় না। সমীকরণটি নিম্নরূপ,

$$\left[P+\frac{a'}{T(V+c)^2}\right](V-b)=RT$$

যেখানে a', b ও c ধ্রুবক।

(ii) বার্থেলোর সমীকরণ (Berthelot's Equation)

এই সমীকরণ 5 বায়ুমন্ডলীয় চাপ পর্যন্ত পরীক্ষালব্ধ ফলকে সমর্থন করে। সমীকরণটি নিম্নরূপ,

$$\left(P+\frac{a}{TV^2}\right)(V-b)=RT$$

(iii) ডায়েটিরিসির সমীকরণ (Dieterici's Equation)

এই সমীকরণ 12 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ পর্যন্ত পরীক্ষালব্ধ ফলকে সমর্থন করে। ইহা হইতে অবস্থার পরিমিত সমীকরণ পাওয়া যায়। সমীকরণটি নিম্নরূপ,

$$P.e^{\frac{a}{RTV}}\times(V-b)=RT$$

(iv) কে. ওনেস্-এর সমীকরণ (K. Onnes Equation)

এই সমীকরণটি নিম্নরূপ,

$$PV=A+BP+CP^2+DP^3+\cdots$$

যেখানে A, B, C, D, ··· ইত্যাদি ভিরিয়াল গুণাঙ্ক। গুণাঙ্কগুলি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় ধ্রুবক কিন্তু তাপমাত্রা পরিবর্তিত হইলে ইহাদের সম্পর্ক জটিলতর হয়।

(v) সাহা ও বোসের সমীকরণ (Saha and Bose's Equation)

তাপগতিবিদ্যার সম্ভাব্য তত্ত্ব (theory of probability) হইতে সাহা ও বোস নিম্নের সমীকরণটি প্রকাশ করেন :

$$P=-\frac{RT}{2b}e^{-\frac{a}{RTV}}\log_e\left(\frac{V-2b}{V}\right)$$

এই সমীকরণ পরীক্ষালব্ধ মানকে অনেকাংশে সমর্থন করে।

H.A.2. সৌর ধ্রুবক এবং সৌর উষ্ণতা (Solar Constant and Solar Temperature)

পৃথিবীর উপর সূর্য হইতে বিকীর্ণ তাপ সর্বদা আসিয়া পড়িতেছে। প্রতি মিনিটে পৃথিবী পৃষ্ঠে একক ক্ষেত্রের উপর যে পরিমাণ বিকিরণ ঐ তলের অভিলম্ব বরাবর আপতিত হয় তাহাকে সৌর ধ্রুবক বলে।

সূর্যের কেন্দ্রস্থলে অবস্থিত উত্তপ্ত আলোকমণ্ডলের (photosphere) উষ্ণতাকে সৌর উষ্ণতা বলা হয়।

মনে করি, আলোকমণ্ডলের ব্যাসার্ধ R এবং সৌর উষ্ণতা T ; সুতরাং প্রতি মিনিটে বিকীর্ণ শক্তি হইবে,

$$E=\sigma\, 4\pi R^2 . T^4 \times 60$$

σ = ষ্টিফান ধ্রুবক।

সূর্য হইতে পৃথিবীর গড় দূরত্ব r হইলে প্রতি মিনিটে একক ক্ষেত্রের উপর আপতিত বিকীর্ণ শক্তি,

$$S=\frac{E}{4\pi r^2}=\sigma\left(\frac{R}{r}\right)^2 . T^4 \times 60 \qquad \cdots \quad (i)$$

S-কে সৌর ধ্রুবক বলা হয়।

সৌর উষ্ণতা, $T=\left[\frac{S}{60}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right]^{\frac{1}{4}}$

পরীক্ষালব্ধ ফল হইতে জানা যায় যে,

$S=1.937$ cal/cm^2 min

$\sigma=1.37\times10^{-12}$ cal/cm^2/sec/ k^4

$R=4.3\times10^5$ miles

$r=9.28\times10^7$ miles

(i) সমীকরণে উপরোক্ত মান বসাইলে পাই,

$T=5780^\circ K.$

কৃষ্ণ বিকিরণ ও সৌর বিকিরণ বর্ণালীর মধ্যে সাদৃশ্য পরিলক্ষিত হয়। কিন্তু নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কৃষ্ণ বিকিরণ ও সৌর বিকিরণের মধ্যে খুব সামান্য পার্থক্য পাওয়া যায়। বিভিন্ন পরীক্ষার সাহায্যে দেখা যায় যে গড় সৌর উষ্ণতা হইল 6080°K. কিন্তু ষ্টিফান সূত্র হইতে প্রাপ্ত উষ্ণতা T = 5080°K. আলোকমণ্ডল আদর্শ কৃষ্ণ বিকিরক নয় বলিয়াই প্রাপ্ত সৌর উষ্ণতায় এই পার্থক্য পাওয়া যায়।

H.A.3. ভিনের শক্তি বণ্টন সূত্র (Wien's distribution law)

কৃষ্ণ বিকিরণে কিভাবে বিভিন্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্যে শক্তি বণ্টন হয় তাহা ভিন তাঁহার সূত্রের সাহায্যে উপস্থাপনা করেন। সূত্রটি হইল,

$$u_\lambda d\lambda=\frac{A}{\lambda^5}f(\lambda T)d\lambda \qquad \cdots \quad (i)$$

$u_\lambda d\lambda$ হইল λ হইতে $\lambda+d\lambda$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে মোট বিকীর্ণ শক্তি, A একটি ধ্রুবক এবং $f(\lambda T)$ হইল একটি অপেক্ষক,

$$\text{এখন } u_\lambda d\lambda = \frac{AT^5}{(\lambda T)^5} f(\lambda T)d\lambda$$

$$= AT^5 \, F(\lambda T)d\lambda \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্কের সম্পর্ক হইতে জানি,

$$\nu\lambda = c$$

$$\therefore \quad d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu$$

$$\therefore \quad \left|\frac{d\lambda}{d\nu}\right| = \frac{c}{\nu^2} \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

শক্তি কখনই ঋণাত্মক রাশি হইবে না। সেইজন্য $\frac{d\lambda}{d\nu}$-এর ধনাত্মক মান লওয়া হইয়াছে।

$$\therefore \quad u_\nu d\nu = \frac{A}{\lambda^5} f(\lambda T) \; \frac{c}{\nu^2}d\nu$$

$$= B\gamma^3 \, \phi \; (\nu/T)d\nu \qquad \cdots \quad \text{(iv)}$$

$$= B\left(\frac{\nu}{T}\right)^3 . \, T^3 \, \phi(\nu/T)d\nu$$

$$= BT^3 \, \Phi\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu \qquad \cdots \quad \text{(v)}$$

সমীকরণ (i), (ii), (iv) এবং (v)-এর প্রত্যেকটিকে ভিনের শক্তি বণ্টন সূত্র বলে।

কৃষ্ণ বিকিরণের রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে λT = ধ্রুবক অর্থাৎ $\frac{\nu}{T}$ = ধ্রুবক, অতএব (i) এবং (ii) সমীকরণ হইতে পাই,

$$u_\lambda \lambda^5 = \text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad \text{(vi)}$$

$$u_\lambda T^{-5} = \text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad \text{(vii)}$$

আবার (iv) এবং (v) সমীকরণকে লেখা যায়,

$$u_\nu \nu^{-3} = \text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad \text{(viii)}$$

$$u_\nu T^{-3} = \text{ধ্রুবক} \qquad \cdots \quad \text{(ix)}$$

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে উষ্ণতা T হইতে পরিবর্তিত হইয়া T′ হইলে তরঙ্গদৈর্ঘ্যও λ হইতে পরিবর্তিত হইয়া λ' হইবে।

$$\therefore \quad \lambda T = \lambda' T'$$

$$\text{অথবা,} \qquad \lambda' = \lambda\left(\frac{T}{T'}\right)$$

(vii) সমীকরণে λ′ বসাইয়া পাই,

$$u_\lambda' T'^{-5} = u_\lambda T^{-5}$$

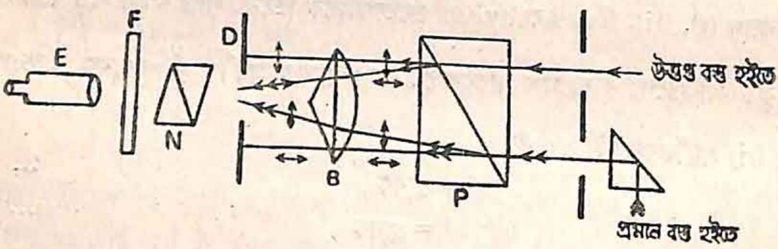
বা, $$u_\lambda' = u_\lambda \left(\frac{T'}{T}\right)^5 = u_\lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^5 \quad \cdots \quad (x)$$

(x) সমীকরণ হইতে আমরা খুব সহজেই বুঝিতে পারি যে কোন একটি নির্দিষ্ট উষ্ণতায় বর্ণালীতে শক্তির বণ্টন জানা থাকিলে উক্ত সমীকরণ হইতে অন্য যে কোন উষ্ণতায় শক্তি বণ্টন নির্ণয় করা যাইবে। চিত্র 1-এ শক্তি বণ্টন লেখ দেখানো হইয়াছে। উক্ত লেখচিত্র পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, একটি বিশেষ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের (λ_m) জন্য বর্ণালীতে বিকীর্ণ শক্তি চরম হয়। λ_m-এর মান বিকিরণ উষ্ণতা T-এর উপর নির্ভরশীল।

H.A.4. সমবর্তন পাইরোমিটার (Polarising Pyrometer)

প্রমাণ আলোক উৎস অপরিবর্তিত রাখিয়া তাপ উৎস থেকে আগত বিকিরণ নিয়ন্ত্রণ করিয়া উভয় ক্ষেত্রে বিকিরণের তীব্রতা সমান করা সম্ভব। এই নীতির উপর যে পাইরোমিটার কার্য করে তাহাকে সমবর্তন পাইরোমিটার বলে।

গঠন : চিত্র H. A. 1-এ ভেনার (Wanner) ব্যবহৃত সমবর্তন পাইরোমিটার দেখান হইয়াছে। পরীক্ষাধীন উত্তপ্ত বস্তু হইতে বিকিরণ একটি ছিদ্র দিয়া গিয়া দ্বি-প্রতিসারক ক্যালসাইট প্রিজম P-এর উপর পড়ে। প্রিজমটি পরস্পর সমকোণে নত দুইটি



চিত্র H. A. 1

সমবর্তিত আলোকরশ্মির সৃষ্টি করিবে। পরস্পর সমকোণে নত সমবর্তিত আলোক-রশ্মিদ্বয় নিকল প্রিজম N-এর উপর পড়ে এবং একটি নীল কাচ F-এর মধ্য দিয়া যায়। পর্যবেক্ষক অভিনেত্র E-এর মধ্য দিয়া লক্ষ্য করিলে দুইটি পাশাপাশি অবস্থিত অর্ধ-বৃত্তাকার আলোর প্রতিবিম্ব দেখিতে পাইবে।

কার্যপ্রণালী : মনে করি, কোন অজ্ঞাত উষ্ণতা T-তে পরীক্ষাধীন বস্তু দ্বারা লাল আলোকের বিকিরণের তীব্রতা E_λ ও প্রমাণ বস্তু দ্বারা লাল আলোকের বিকিরণের তীব্রতা S_λ। নিকল প্রিজমটিকে প্রথম স্থান হইতে সমভাবে উজ্জ্বল স্থানের দিকে

ঘোরাইলে যদি ϕ কোণের উৎপত্তি হয় তবে আলোক তত্ত্ব (optical theory) অনুযায়ী লেখা যায়,

$$\frac{E_\lambda}{S_\lambda}=\tan^2\phi \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

পরীক্ষাটি একটি জ্ঞাত উষ্ণতা T′-তে অপর একটি বস্তুর দ্বারা পুনরায় করিতে হইবে। ধরা যাক, এখন,

তীব্রতা $=E_\lambda'$ এবং প্রথম স্থান হইতে সমভাবে উজ্জ্বল স্থানের পর্যবেক্ষিত কোণ $=\phi'$

$$\therefore \quad \frac{E_\lambda'}{S_\lambda}=\tan^2\phi' \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হইতে পাই,

$$\frac{E_\lambda}{E_\lambda'}=\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi'} \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

ভাইনের সূত্রানুযায়ী লেখা যায়,

$$E_\lambda=C_1\lambda^{-5}e^{-C_2/\lambda T}$$

এবং $$E_\lambda'=C_1\lambda^{-5}e^{-C_2/\lambda T'}$$

এখানে C_1 ও C_2 দুইটি ধ্রুবক

$$\therefore \quad \frac{E_\lambda}{E_\lambda'}=e^{\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)}$$

বা, $$\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi'}=e^{\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)}$$ [সমীকরণ (iii) হইতে]

বা, $$\log\left(\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\phi'}\right)=\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right)$$

বা, $$2(\log\tan\phi-\log\tan\phi')=\frac{C_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T}\right) \qquad \cdots \quad \text{(iv)}$$

সমীকরণ (iv)-কে এইরূপে প্রকাশ করা যায়,

$$\log\tan\phi=a+\frac{b}{T} \qquad \cdots \quad \text{(v)}$$

যেখানে a ও b ধ্রুবক।

ϕ এবং a ও b নির্ণয় করিয়া প্রদত্ত বস্তুর উষ্ণতা T সমীকরণ (v) হইতে পরিমাপ করা যায়।

সমবর্তন পাইরোমিটারের সাহায্যে 700° হইতে 1400°C পর্যন্ত উষ্ণতা পরিমাপ করা সম্ভব। আপতিত বিকিরণের পথে শোষক কাচ (absorption glass) ব্যবহার করিয়া 4000°C পর্যন্ত উষ্ণতা এই পাইরোমিটার দ্বারা পরিমাপ করা যায়।

হ্রস্বোত্তর প্রশ্নাবলী

থার্মোমিতি, ক্যালরিমিতি ও প্রসারণ সংক্রান্ত :

Q. 1. গ্যাস স্কেল, প্লাটিনাম রোধ স্কেল, উষ্ণতার পারদ স্কেলের মধ্যে কোন্‌টি উষ্ণতার পরম স্কেল এবং কেন ?

Q. 2. আদর্শ গ্যাসের স্থির আয়তন থার্মোমিটারের স্কেল স্থির চাপ থার্মোমিটার স্কেলের সমান হয় কেন ?

Q. 3. থার্মোমিটারে পারদ অপেক্ষা স্থায়ী গ্যাস ব্যবহারে সুবিধা কি ?

Q. 4. উষ্ণতার আন্তর্জাতিক স্কেলের নাম কি ?

Q. 5. গ্যাসের দুইটি আপেক্ষিক তাপ কেন ? ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি বড় এবং কেন ?

Q. 6. C_p ও C_v এর সহিত R-এর সম্পর্ক কি ? C_p ও C_v এর মানের পার্থক্য কত ?

Q. 7. কোন জলাশয়ের উপরতল dx গভীরতায় জমিয়া বরফ হইলে কত তাপ বর্জন করিবে ? জলাশয়ের উপরতলের ক্ষেত্রফল A, জলের ঘনত্ব ρ এবং বরফ গলনের লীনতাপ L দেওয়া আছে।

Q. 8. কোন্ উষ্ণতায় জলের আপেক্ষিক আয়তন ন্যূনতম হইবে ?

Q. 9. গোল ছিদ্রের একটি ধাতব টুকরাকে উত্তপ্ত করিলে ঐ ছিদ্রের ব্যাসের কিরূপ পরিবর্তন হইতে পারে ?

অবস্থার সমীকরণ সংক্রান্ত :

Q. 10. আদর্শ গ্যাসের সহিত বাস্তব গ্যাসের প্রভেদ কি ?

Q. 11. ভ্যান্-ডার-ওয়াল্‌সের সমীকরণে গুণাংক a ও b এর একক নির্দেশ কর।

Q. 12. ক্রান্তিক উষ্ণতার ভিত্তিতে গ্যাস ও বাষ্পের পরিচয় দাও।

Q. 13. CO_2-এর ক্রান্তিক উষ্ণতা 31·4°C, 25°C উষ্ণতায় কি ইহাকে গ্যাস বলা যায় ?

Q. 14. বয়েল উষ্ণতা কি ?

Q. 15. বাস্তব গ্যাসের অবস্থার সাধারণ সমীকরণ ও অবস্থার হ্রস্বীকৃত সমীকরণের মধ্যে তফাৎ কি ?

গ্যাসের গতিতত্ত্ব সংক্রান্ত :

Q. 16. 'পরমশূন্য উষ্ণতায় গ্যাসের অণুগুলির বেগ শূন্য হয়'—উক্তির সত্যতা বিচার কর।

Q. 17. আদর্শ গ্যাসের অন্তর্নিহিত শক্তি কোন্ রাশির উপর নির্ভরশীল ?

Q. 18. গড় মুক্তপথের সহিত গ্যাসের সম্পর্ক কি ?

Q. 19. গতিতত্ত্বের সাহায্যে উষ্ণতার ব্যাখ্যা কর।

Q. 20. দ্বি পারমাণবিক গ্যাসের অণুর ক্ষেত্রে স্বাধীনতার মাত্রা কত ?

Q. 21. সকল গ্যাসের জন্য দুই আঃ তাপের অনুপাত কি সমান ?

তাপের পরিবহণ সংক্রান্ত :

Q. 22. রূপার তাপ-পরিবাহিতা 1·01 C. G. S. একক বলিতে কি বোঝায় ?

Q. 23. তাপীয় রোধাঙ্ক কি ? তাপ-পরিবাহিতার সহিত ইহার সম্পর্ক কি ?

Q. 24. একই দৈর্ঘ্য ও ব্যাসার্ধ এবং দুই প্রান্ত একই উষ্ণতার পার্থক্যে আছে এইরূপ তিনটি ভিন্ন ধাতুর দণ্ডের ভিতর দিয়া কোন নির্দিষ্ট সময়ে কি একই পরিমাণ তাপ পরিবাহিত হইবে ?

Q. 25. তরল বা গ্যাসীয় পদার্থের তাপ-পরিবাহিতা নির্ণয়ে কি কি অসুবিধা দেখা দেয় ?

Q. 26. চুল্লীর পার্শ্বে গরম এবং বড় বরফের চাঁই-এর পার্শ্বে দাঁড়াইলে ঠাণ্ডা অনুভব করি কেন ?

Q. 27. শীতপ্রধান দেশে লেকে যত বেশী বরফ জমে, বরফ জমিবার হার ততই হ্রাস পায় কেন ?

Q. 28. কাষ্ঠ অপেক্ষা উহার গুঁড়া তাপের বেশী কুপরিবাহী কেন ?

Q. 29. ঘর ধাতুর না হইয়া ইটের তৈরী করে কেন ?

Q. 30. শীতকালে প্রাণীদেহের লোমের আচ্ছাদন কি সাহায্য করে ?

Q. 31. চুল্লী হইতে ভুষা কালি উপরে উঠিয়া গিয়া পরে পাত্রের তলায় না জমিয়া পাত্রের গায়ে জমে কেন ?

Q. 32. গাছের মধ্য দিয়া বজ্রপাত হইলে গাছ পুড়িয়া যায় কেন ?

বিকিরণ সংক্রান্ত :

Q. 33. কোনটি সর্বাধিক তাপ বিকিরণ করে—(i) শ্বেত অমসৃণ তল, (ii) শ্বেত মসৃণ তল, (iii) কৃষ্ণ মসৃণ তল, (iv) কৃষ্ণ অমসৃণ তল।

Q. 34. 'উত্তম বিকিরক বিকিরণের উত্তম শোষক হয়'—ব্যাখ্যা কর।

Q. 35. 0°C উষ্ণতায় বস্তুসকল কি তাপ বিকীর্ণ করে ?

Q. 36. সূর্যকে আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু হিসাবে বিবেচনা করা যায় কি ? যুক্তি দাও।

Q. 37. চায়ের পাত্র সাদা ও পালিস করা থাকে কেন ?

তাপগতিবিদ্যা সংক্রান্ত :

Q. 38. কার্নো ইঞ্জিনের বাস্তব রূপায়ণ সম্ভব কি ?

Q. 39. যদি কার্নো ইঞ্জিনের তাপ ভাণ্ডার হইতে তাপ গ্রহণ করা হয় তবে উহার উষ্ণতা হ্রাস পাইবে কি ?

Q. 40. আদর্শ প্রত্যাবর্তক ইঞ্জিনের কার্যদক্ষতা ইহার কার্যকারক বস্তুর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না কেন ?

Q. 41. আবর্ত প্রক্রিয়ায় অন্তর্নিহিত শক্তির কিরূপ পরিবর্তন হয় ?

Q. 42. এন্ট্রপির ভৌত তাৎপর্য কি ?

Q. 43. প্রত্যাবর্তক ও অপ্রত্যাবর্তক প্রক্রিয়ায় এন্ট্রপির কিরূপ পরিবর্তন হয় ?

Q. 44. উৎক্রমণীয় ও অনুৎক্রমণীয় প্রক্রিয়ার একটি করিয়া উদাহরণ দাও ।

Q. 45. রুদ্ধতাপ রেখাকে (P-V সূচক চিত্রে) কেন সম-এন্ট্রপি রেখা বলে ?

Q. 46. ঋণাত্মক জুল-টমসন ফল কখন হয় ?

Q. 47. জুল-টমসন প্রসারণে গ্যাসে শীতলতার সৃষ্টি হইবে কিনা তাহা কোন্ রাশি দ্বারা স্থির হয় ?

Q. 48. জুল-টমসন প্রক্রিয়ায় সাধারণ ঘরের উষ্ণতায় সকল গ্যাসই যখন শীতল হয় তখন হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম উত্তপ্ত হয় কেন ? কোন্ অবস্থায় এই দুই গ্যাসও শীতল হইতে পারে ?

Q. 49. 10 gm জল 0°C-এ যদি বরফে পরিণত হয় তবে এন্ট্রপির হ্রাস কত ?

Q. 50. 10 gm বরফ 0°C-এ জলে পরিণত হইলে এন্ট্রপির পরিবর্তন কত ? বরফ গলনের লীনতাপ 80 cal/gm । ইহা এন্ট্রপির বৃদ্ধি কি হ্রাস নির্দেশ করে ?

জ্যামিতিক
আলোক বিজ্ঞান
(GEOMETRICAL OPTICS)

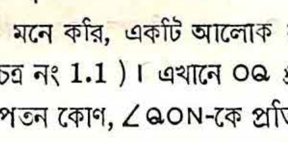
প্রথম পরিচ্ছেদ

সমতলে আলোর প্রতিফলন ও প্রতিসরণ
(Reflection and refraction of light at a plane surface)

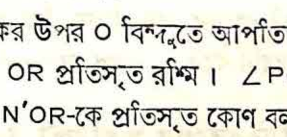
1.1 সূচনা (Introduction)

যে কোন সমসত্ত্ব মাধ্যমে (homogeneous media) আলোক রশ্মি সরলরেখায় চলাচল করে। কিন্তু দুইটি মাধ্যমের বিভেদ তলে আলোক রশ্মি আপতিত হইলে ঐ আলোর কিছু অংশ প্রথম মাধ্যমে ফিরিয়া আসে, কিছু অংশ দ্বিতীয় মাধ্যমে অন্য সরলরেখায় চলিয়া যায় এবং কিছু অংশ মাধ্যম কর্তৃক শোষিত হয়। পরীক্ষা করিয়া দেখা গিয়াছে যে আলোক রশ্মি বায়ু হইতে কাচে লম্বভাবে আপতিত হইলে ঐ রশ্মির 5% প্রথম মাধ্যমে ফিরিয়া আসে, 4% মাধ্যম কর্তৃক শোষিত হয় এবং বাকী 91% দ্বিতীয় মাধ্যমে গমন করে। কিন্তু সমতল দর্পণে আলো পড়িলে 80% প্রথম মাধ্যমে ফিরিয়া আসে। আলোর দুই মাধ্যমের বিভেদ তল হইতে পুনরায় প্রথম মাধ্যমে ফিরিয়া আসাকে প্রতিফলন বলা হয়। আলোক রশ্মির কিয়দংশ বিভেদ তল অতিক্রম করার পর গতির অভিমুখ পরিবর্তন করে। এই পরিবর্তনকে প্রতিসরণ বলা হয়।

মনে করি, একটি আলোক রশ্মি PO কাচের ব্লকের উপর O বিন্দুতে আপতিত হইল (চিত্র নং 1.1)। এখানে OQ প্রতিফলিত রশ্মি এবং OR প্রতিসৃত রশ্মি। ∠PON-কে আপতন কোণ, ∠QON-কে প্রতিফলন কোণ এবং ∠N′OR-কে প্রতিসৃত কোণ বলা হয়।



চিত্র 1.1

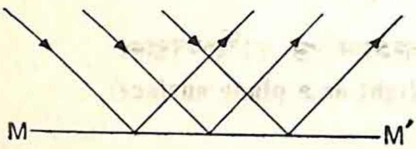


চিত্র 1.2

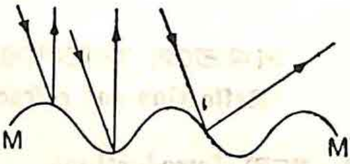
আলোক রশ্মি লঘু মাধ্যম হইতে ঘন মাধ্যমে প্রবেশ করিলে অভিলম্বের নিকট সরিয়া আসে (চিত্র নং 1.1); কিন্তু ঘন মাধ্যম হইতে লঘু মাধ্যমে প্রবেশ করিলে অভিলম্ব হইতে দূরে সরিয়া যায় (চিত্র নং 1.2)।

1 (আ.)

মাধ্যমের প্রকৃতি অনুসারে আলোর প্রতিফলন দুই প্রকারের হয়—(a) নিয়মিত প্রতিফলন (চিত্র নং 1.3) এবং (b) বিক্ষিপ্ত প্রতিফলন (চিত্র নং 1.4)। নিয়মিত



চিত্র 1.3



চিত্র 1.4

প্রতিফলনে সমান্তরাল আলোক রশ্মি প্রতিফলনের পরও সমান্তরাল থাকে, কিন্তু বিক্ষিপ্ত প্রতিফলন এইরূপ কোন নিয়ম মানিয়া চলে না।

1.2 প্রতিফলনের সূত্রাবলী (Laws of reflection)

বিক্ষিপ্ত প্রতিফলন কোন সূত্র মানিয়া চলে না। নিয়মিত প্রতিফলন দুইটি সূত্রানুযায়ী হইয়া থাকে :

(a) আপতিত রশ্মি, প্রতিফলিত রশ্মি এবং আপতন বিন্দুতে প্রতিফলকের উপর অংকিত অভিলম্ব একই সমতলে থাকে।

(b) আপতন কোণ = প্রতিফলন কোণ।

(1.1) নং চিত্রে আপতিত রশ্মি PO, প্রতিফলিত রশ্মি OQ এবং অভিলম্ব ON একই তলে অবস্থান করে। আপতন কোণ ∠PON = প্রতিফলন কোণ ∠QON।

1.3 প্রতিসরণের সূত্রাবলী (Laws of refraction)

প্রতিফলনের ন্যায় প্রতিসরণও দুইটি সূত্র মানিয়া চলে।

(a) আপতিত রশ্মি, প্রতিসৃত রশ্মি এবং আপতন বিন্দুতে অংকিত অভিলম্ব একই সমতলে থাকে।

(b) আপতন কোণের সাইন ও প্রতিসরণ কোণের সাইনের অনুপাত ধ্রুবক হয়। ইহা স্নেলের সূত্র নামে পরিচিত। এই ধ্রুবককে μ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\mu = \frac{\sin i}{\sin r} \qquad \cdots(1.1)$$

μ-কে প্রথম মাধ্যমের সাপেক্ষে দ্বিতীয় মাধ্যমের প্রতিসরাংক বলা হয়। ইহার মান মাধ্যমদ্বয়ের প্রকৃতি এবং আলোক রশ্মির বর্ণের উপর নির্ভর করে।

1.4 আলোক পথ (Optical path)

কোন মাধ্যমে একটি নির্দিষ্ট সময়ে আলো যে পথ অতিক্রম করে তাহার আলোক পথ বলিতে ঐ সময়ে আলো শূন্যে যে পথ অতিক্রম করিবে তাহাই বুঝায়।

মনে করি, t সময়ে আলোক রশ্মি v_1 বেগে কোন মাধ্যমের s_1 পথ এবং ঐ সময়েই v_0 বেগে শূন্যে s_2 পথ অতিক্রম করিল। মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ হইলে

$$\mu = \frac{v_0}{v_1} \qquad \cdots(1.2)$$

আবার $t = \frac{v_1}{s_1} = \frac{v_0}{s_2}$

$$\therefore \quad s_2 = \frac{v_0}{v_1} \cdot s_1$$

$$= \mu s_1 \quad \left(\because \quad \mu = \frac{v_0}{v_1}\right) \qquad \cdots(1.3)$$

1.5 ফার্মার নীতি (Fermat's principle)

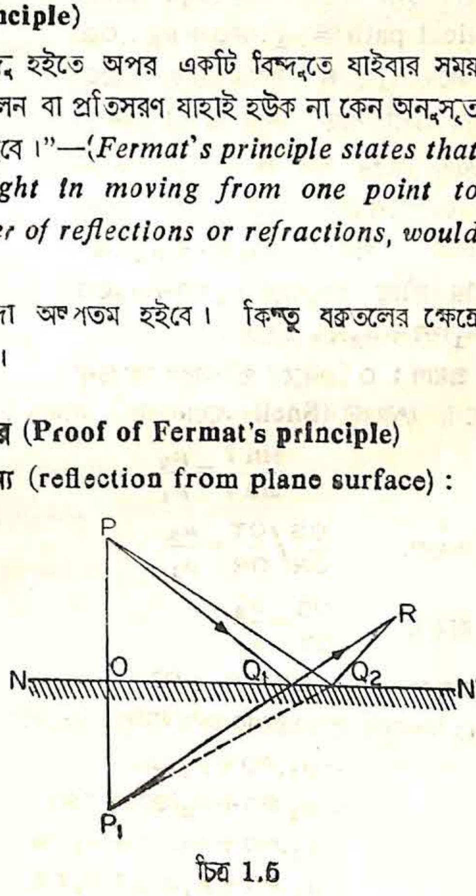
ফার্মার নীতি হইতেছে "এক বিন্দু হইতে অপর একটি বিন্দুতে যাইবার সময় আলোক রশ্মির যে কোন সংখ্যক প্রতিফলন বা প্রতিসরণ যাহাই হউক না কেন অনুসৃত পথ সর্বদাই অচল (stationary) হইবে।"—(*Fermat's principle states that the path followed by a ray of light in moving from one point to another point after any number of reflections or refractions, would always be stationary.*)

সমতলের ক্ষেত্রে অনুসৃত পথ সর্বদা অল্পতম হইবে। কিন্তু বক্রতলের ক্ষেত্রে এই পথ অল্পতম বা বৃহত্তম হইতে পারে।

1.6 ফার্মার নীতির সত্যতা বিচার (Proof of Fermat's principle)

(a) **সমতল পৃষ্ঠে প্রতিফলনের জন্য** (reflection from plane surface) :

মনে করি, P বিন্দু হইতে আলোক রশ্মি NN′ দর্পণ কর্তৃক Q_1 বিন্দুতে প্রতিফলিত হইয়া R বিন্দুতে পেঁছাইল (চিত্র নং 1.5)। Q_2 অপর যে কোন একটি বিন্দু। ফার্মার নীতি অনুসারে $(PQ_1+Q_1R) < (PQ_2+Q_2R)$ হইতে হইবে।



চিত্র 1.5

প্রমাণ : P_1 বিন্দু হইল P বিন্দুর প্রতিবিম্ব।

$$\therefore \quad OP = OP_1 \qquad \cdots(1.4)$$

এবং $PQ_1 = P_1Q_1 \qquad \cdots(1.5)$

এখন $PQ_1+Q_1R = P_1Q_1+Q_1R = P_1R$

$\triangle P_1RQ_2$ হইতে আমরা লিখতে পারি

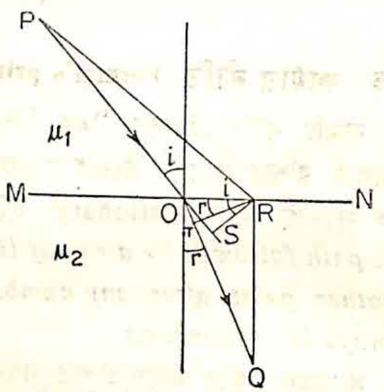
$$P_1Q_2+Q_2R > P_1R$$
$$> PQ_1+Q_1R$$
$$\therefore \quad PQ_1+Q_1R < P_1Q_2+Q_2R$$
$$< PQ_2+Q_2R \qquad \cdots(1.6)$$

অর্থাৎ প্রতিফলিত পথই ক্ষুদ্রতম।

(b) **সমতল পৃষ্ঠে প্রতিসরণের জন্য** (refraction from plane surface) :

মনে করি, P বিন্দু হইতে একটি আলোক রশ্মি O বিন্দুতে প্রতিসৃত হইয়া Q বিন্দুতে পেঁছাইল (চিত্র নং 1.6)। আপতন ও প্রতিসরণ কোণ যথাক্রমে $\angle i$ ও $\angle r$। আলোক রশ্মি যে পথ অনুসরণ করিল, তাহার তুল্য আলোক পথ (equivalent optical path) $=\mu_1 . PO+\mu_2 . OQ$.

মনে করি, R মাধ্যমদ্বয়ের বিভেদ তলের উপরিস্থিত অপর একটি বিন্দু। আলোক রশ্মি যদি R বিন্দু দিয়া Q বিন্দুতে পেঁছায় তবে উহার তুল্য আলোক পথ $=\mu_1 PR+\mu_2 RQ$। ফার্মার নীতি অনুসারে $\mu_1 PO+\mu_2 OQ < \mu_1 PR+\mu_2 RQ$ হইবে।



চিত্র 1.6

প্রমাণ : O বিন্দুতে প্রতিসরণ বিবেচনা করিলে, স্নেলের (Snell) সূত্রানুযায়ী আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\mu_2}{\mu_1} \qquad \cdots(1.7)$$

অথবা, $$\frac{OS}{OR}\Big/\frac{OT}{OR}=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

অথবা, $$\frac{OS}{OT}=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

অথবা, $$\mu_1 . OS=\mu_2 . OT \qquad \cdots(1.8)$$

O বিন্দুতে প্রতিসরণের জন্য সমতুল্য আলোক পথ

$$=\mu_1.PO+\mu_2.OQ$$
$$=\mu_1.PO+\mu_2(OT+TQ)$$
$$=\mu_1.PO+\mu_2.OT+\mu_2 TQ$$
$$=\mu_1.PO+\mu_1.OS+\mu_2 TQ \qquad (\because \ \mu_2.OT=\mu_1.OS)$$
$$=\mu_1 (PO+OS)+\mu_2 TQ$$
$$=\mu_1 PS+\mu_2 TQ \qquad \cdots(1.9)$$

আবার, R বিন্দুতে অনিয়মিত প্রতিসরণের জন্য সমতুল্য আলোক পথ

$$=\mu_1 PR+\mu_2 RQ \quad \ldots(1.10)$$

(1.6) নং চিত্র হইতে দেখা যায়

$PS<PR$ (∵ PR এবং RQ, যথাক্রমে ΔPRS এবং

এবং $TQ<RQ$ ΔTRQ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু)

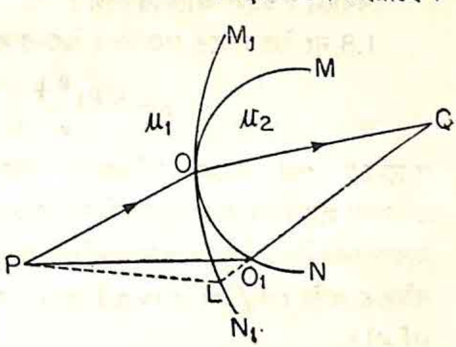
সুতরাং, $\mu_1 . PS+\mu_2 TQ<\mu_1 PR+\mu_2 RQ$

$$\therefore \quad \mu_1 PO+\mu_2 OQ<\mu_1 PR+\mu_2 RQ \quad \ldots(1.11)$$

অতএব নিয়মিত প্রতিসরণের জন্য আলোক রশ্মি যে পথ অনুসরণ করে তাহাই ক্ষুদ্রতম।

(c) **গোলীয় পৃষ্ঠে প্রতিসরণের জন্য (refraction at a spherical surface):**

মনে করি, MON একটি গোলীয় তল (চিত্র নং 1.7)। একটি আলোক রশ্মি PO প্রতিসরণের সূত্রানুযায়ী O বিন্দুতে প্রতিসরণের পর Q বিন্দুতে পৌঁছিয়াছে। ফার্মার নীতি অনুসারে আলোক পথ POQ যে কোন আলোক পথ PO_1Q অপেক্ষা বড় হইবে। M_1ON_1 একটি ঈপলেনেটিক তল (aplanatic surface) যাহা গোলীয় তলকে O বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। P এবং Q হইল M_1ON_1 তলের অবিপথী বা ঈপলেনেটিক ফোকস বিন্দুদ্বয়। P এবং Q বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে যে কোন আলোক পথ যাহা M_1ON_1 তলের মধ্য দিয়া যাইবে, সর্বদা সমান হইবে।



চিত্র 1.7

∴ আলোক পথ POQ = আলোক পথ PLQ

$$\therefore \quad \mu_1 PO+\mu_2 OQ=\mu_1 PL+\mu_2 LQ \quad \cdots(1.12)$$

এখন, আলোক পথ POQ − আলোক পথ PO_1Q

$$=(\mu_1 PO+\mu_2 OQ)-(\mu_1 PO_1+\mu_2 O_1Q)$$
$$=(\mu_1 PL+\mu_2 LQ)-(\mu_1 PO_1+\mu_2 O_1Q)$$
$$=\mu_2(LQ-O_1Q)-\mu_1(PO_1-PL)$$
$$=\mu_2 LO_1-\mu_1(PO_1-PL) \quad \cdots(1.13)$$

মনে করি, $\mu_1<\mu_2$

ΔPLO_1 হইতে পাই, $PO_1-PL<LO_1$

∴ আলোক পথ POQ > আলোক পথ PO_1Q

সুতরাং গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ ফার্মার নীতি অনুসারে হয়।

1.7 ফার্মার নীতি ও প্রতিফলনের সূত্রাবলী (Fermat's principle and Laws of reflection)

মনে করি, PO রশ্মি প্রতিফলক দ্বারা O বিন্দু হইতে প্রতিফলিত হইয়া Q বিন্দুতে পৌঁছাইল। P ও Q বিন্দু হইতে প্রতিফলক তলের উপর যথাক্রমে PM_1 এবং QM_2 লম্ব টানা হইল। P এবং Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হওয়ায় M_1 ও M_2-ও দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে।

সুতরাং $M_1M_2 = s =$ ধ্রুবক

মনে করি, $OM_1 = x$

$\therefore \quad OM_2 = s - x$

P বিন্দু হইতে Q বিন্দুতে পৌঁছাইতে আলোক রশ্মির মোট t সময় লাগিলে

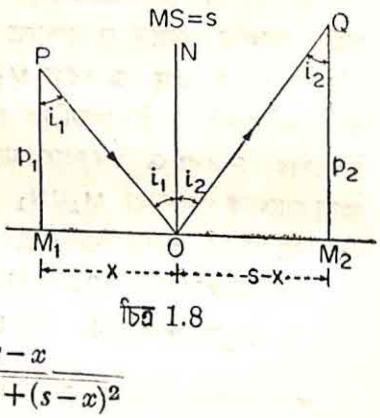
$$t = \frac{PO}{v} + \frac{QO}{v} \qquad \cdots(1.14)$$

যেখানে v হইল আলোর বেগ।

1.8 নং চিত্র হইতে PO এবং QO-র মান (1.14) সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$t = \frac{\sqrt{p_1{}^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{p_2{}^2 + (s-x)^2}}{v} \qquad \cdots(1.15)$$

আলোক পথ POQ অতিক্রমের জন্য যে সময় লাগে তাহা আপতন বিন্দু O-এর অবস্থানের উপর নির্ভর করে অর্থাৎ আমরা বলিতে পারি $t = f(x)$ (**t is a function of x**)।



চিত্র 1.8

(1.13) সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে (**with respect to x**) অবকলন করিয়া পাই

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v\sqrt{p_1{}^2 + x^2}} - \frac{s-x}{v\sqrt{p_2{}^2 + (s-x)^2}}$$

অথবা, $$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin i_1}{v} - \frac{\sin i_2}{v} \qquad \ldots(1.16)$$

(a) প্রতিফলনের সূত্র হইতে ফার্মার নীতি :

যদি PO রশ্মি O বিন্দুতে প্রতিফলিত হইয়া Q বিন্দুতে পৌঁছায় তবে $i_1 =$ আপতন কোণ এবং $i_2 =$ প্রতিফলন কোণ হইবে।

প্রতিফলনের সূত্রানুযায়ী $i_1 = i_2$ (1.16) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

অতএব, আমরা যদি প্রতিফলনের সূত্র ঠিক মানিয়া লই তবে বলিতে পারি আলোক পথ POQ অতিক্রম করিতে যে সময়ের দরকার তাহা অল্পতম বা বৃহত্তম either minimum or maximum) হইবে অর্থাৎ আলোক পথ POQ অবম বা চরম দৈর্ঘ্যের পথ (stationary) হইবে। ইহাই ফার্মার নীতি।

(b) **ফার্মার নীতি হইতে প্রতিফলনের সূত্রাবলী :**

ফার্মার নীতি অনুসারে P বিন্দু হইতে আলোক রশ্মি O বিন্দুতে প্রতিফলনের পর Q বিন্দুতে গমন করিতে যে সময়ের প্রয়োজন তাহা অল্পতম বা বৃহত্তম হইবে।

অর্থাৎ $\frac{dt}{dx}=0$ হইবে।

(1.16) সমীকরণে $\frac{dt}{dx}=0$ বসাইলে পাই

$\sin i_1=\sin i_2$

অর্থাৎ $i_1=i_2$

$\therefore$ আপতন কোণ $(i_1)=$ প্রতিফলন কোণ (i_2)

কাজেই ফার্মার নীতি হইতে প্রতিফলনের দ্বিতীয় সূত্র পাওয়া যায়।

আবার PO এবং OQ সরলরেখা সবসময়ে একই তলে থাকিবে। কিন্তু যদি আলোক পথ POQ অল্পতম হয় তবে এই তল, প্রতিফলক তল M_1M_2-র উপর লম্ব হইবে। অভিলম্ব ON সর্বদাই PO এবং OQ-এর সহিত একই তলে থাকিবে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি আপতিত রশ্মি PO, প্রতিফলিত রশ্মি OQ এবং অভিলম্ব ON একই তলে অবস্থান করিবে। কাজেই ফার্মার নীতি হইতে প্রতিফলনের প্রথম সূত্রও পাওয়া যায়।

1.8 ফার্মার নীতি ও প্রতিসরণের সূত্রাবলী (Fermat's principle and Laws of refraction)

মনে করি, PO রশ্মি বিভেদ তল M_1M_2-র O বিন্দুতে প্রতিসৃত হইয়া Q বিন্দুতে পেঁছাইল। M_1M_2 তল দুইটি মাধ্যম যাহাদের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে μ_1 ও μ_2 কে আলাদা করিয়াছে $(\mu_2>\mu_1)$। P এবং Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হওয়ায় M_1 ও M_2-ও দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে।

সুতরাং, $M_1M_2=s=$ ধ্রুবক।

মনে করি, $M_1O=x$ $\therefore$ $OM_2=s-x$

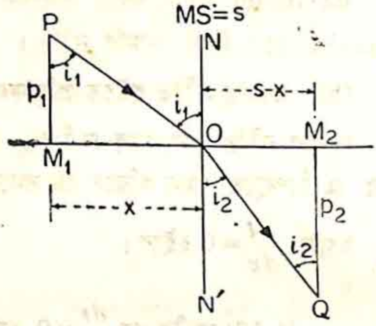
P বিন্দু হইতে Q বিন্দুতে পেঁছাইতে আলোক রশ্মির মোট t সময় লাগিলে

$$t=\frac{PO}{v_1}+\frac{OQ}{v_2} \qquad \cdots(1.17)$$

যেখানে v_1 এবং v_2 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় মাধ্যমে আলোক রশ্মি বেগ।

চিত্র নং 1.9 হইতে PO এবং OQ-র মান (1.17) সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$t = \frac{\sqrt{p_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{p_2^2 + (s-x)^2}}{v_2} \quad \cdots(1.18)$$



চিত্র 1.9

আলোক রশ্মির POQ পথ অতিক্রম করিতে যে সময় লাগে তাহা আপতন বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি t-র মান x-এর উপর নির্ভরশীল; অর্থাৎ, $t = f(x)$ (t is a function of x)।

(1.18) সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন (differentiate) করিয়া পাই

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{p_1^2 + x^2}} - \frac{s-x}{v_2\sqrt{p_2^2 + (s-x)^2}}$$

$$= \frac{\sin i_1}{v_1} - \frac{\sin i_2}{v_2}$$

$$= \frac{1}{v_0}\left[\frac{v_0}{v_1}\sin i_1 - \frac{v_0}{v_2}\sin i_2\right]$$

যেখানে v_0 হইল শূন্য মাধ্যমে আলোর গতিবেগ।

এখন $\frac{v_0}{v_1} = \mu_1 =$ প্রথম মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক

এবং $\frac{v_0}{v_2} = \mu_2 =$ দ্বিতীয় মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক

$$\therefore \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_0}\left[\mu_1 \sin i_1 - \mu_2 \sin i_2\right] \quad \cdots(1.19)$$

(a) **প্রতিসরণের সূত্রাবলী হইতে ফার্মার নীতি :**

PO আলোক রশ্মি O বিন্দুতে প্রতিসৃত হইয়া Q বিন্দুতে পৌঁছিয়াছে। $\angle PON = i_1 =$ আপতন কোণ ও $\angle QON = i_2 =$ প্রতিসরণ কোণ

∴ স্নেলের সূত্রানুযায়ী, $\mu_1 \sin i_1 = \mu_2 \sin i_2$ হইবে। ইহা (1.19) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই $\frac{dt}{dx} = 0$

অতএব, প্রতিসরণের সূত্র ঠিক মানিয়া লইলে আমরা বলিতে পারি আলোক পথ POQ অল্পতম বা বৃহত্তম হইবে, অর্থাৎ আলোক পথ POQ অবম বা চরম দৈর্ঘ্যের পথ (stationary) হইবে। ইহাই ফার্মার নীতি।

(b) ফার্মার নীতি হইতে প্রতিসরণের সূত্রাবলী।

ফার্মার নীতি অনুসারে আলোক পথ POQ অবম বা চরম দৈর্ঘ্যের পথ (stationary) হইবে।

অর্থাৎ $\frac{dt}{dx}=0$। এই শর্ত (1.19) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই

$$\mu_1 \sin i_1 = \mu_2 \sin i_2$$

ইহাই প্রতিসরণের দ্বিতীয় সূত্র বা স্নেলের সূত্র। সুতরাং ফার্মার নীতি হইতে স্নেলের সূত্র বাহির (deduce) করা যায়।

আবার, PO এবং OQ সরলরেখাদ্বয় একই তলে অবস্থান করিবে। ফার্মার নীতি অনুসারে POQ পথ অল্পতর হইবে। সুতরাং এই তল প্রতিসারক তল M_1M_2-র উপর লম্ব হইবে। O বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব NN′ সর্বদাই PO এবং OQ-এর সহিত একই তলে থাকিবে। সুতরাং আপতিত রশ্মি PO, প্রতিফলিত রশ্মি OQ এবং অভিলম্ব NN′ একই তলে থাকিবে। অতএব, ফার্মার নীতি হইতে প্রতিসরণের প্রথম সূত্র পাওয়া যায়।

উদাহরণ (Examples)

1. দুইটি সমান্তরাল দর্পণ M এবং N-এর মধ্যে একটি মোমবাতি P রাখা আছে ; দর্পণদ্বয়ের দূরত্ব 3 cm এবং প্রথম দর্পণ M হইতে মোমবাতির দূরত্ব 2 cm হইলে M এর পশ্চাতে তৃতীয় প্রতিবিম্ব এবং N-এর পশ্চাতে তৃতীয় প্রতিবিম্ব কোথায় গঠিত হইবে ?

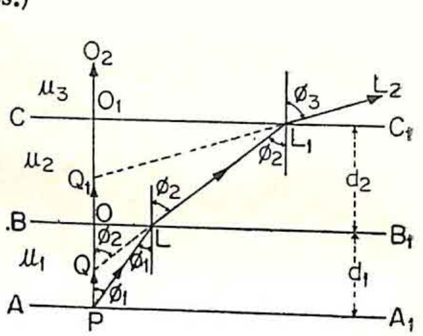
(A candle P is placed between two plane parallel mirrors M and N. Where the third image behind M and the third image behind N will be formed if the mirrors are 3 cm apart and the distance of P from the first mirror M is 2 cm ?)

M দর্পণের পশ্চাতে গঠিত তৃতীয় প্রতিবিম্বের মোমবাতি P হইতে দূরত্ব
$$=2(d+a)=2(3+2)=10 \text{ cm.}$$
N দর্পণের পশ্চাতে গঠিত তৃতীয় প্রতিবিম্বের মোমবাতি P হইতে দূরত্ব
$$=2(d+b)=2(3+1)=8 \text{ cm.}$$

2. দুইটি স্বচ্ছ প্লেটের মধ্য দিয়া আনুক্রমিক প্রতিবিম্বের দূরত্ব বাহির কর ।

(Find the distance of the image formed by successive refractions through two transparent plates.)

মনে করি, বস্তু P নিচের মাধ্যমে রাখা আছে। আলোক রশ্মি PO অভিলম্ব-ভাবে মাধ্যমদ্বয়ের মধ্য দিয়া অবিচ্যুতভাবে নির্গত হইবে। কিন্তু তির্যক রশ্মি PL, L এবং L_1 বিন্দুতে প্রতিসৃত হইবে (চিত্র নং 1.10) এবং Q ও Q_1 প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। মাধ্যমদ্বয়ের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে μ_1 এবং μ_2. উহাদের বেধ (thickness) d_1 এবং d_2.



চিত্র 1.10

স্নেলের সূত্র অনুসারে L বিন্দুতে প্রতিসরণ বিবেচনা করিলে আমরা লিখিতে পারি
$$\mu_1 \sin\phi_1=\mu_2 \sin\phi_2$$
অথবা, $$\mu_1 \frac{OL}{PL}=\mu_2\frac{OL}{QL}$$
অথবা, $$\frac{\mu_1 \cos\phi_1}{PL\cos\phi_1}=\frac{\mu_2\cos\phi_2}{QL\cos\phi_2}$$
অথবা, $$\frac{\mu_1\cos\phi_1}{OP}=\frac{\mu_2\cos\phi_2}{OQ}$$

অথবা, $a_1 = d_1 \frac{\mu_2 \cos\phi_2}{\mu_1 \cos\phi_1}$ যেখানে $OQ = a_1$ এবং $OP = d_1$

L_1 বিন্দুতে প্রতিসরণ বিবেচনা করিলে আমরা লিখিতে পারি,

$$a_2 = d_3 \frac{\mu_3 \cos\phi_3}{\mu_2 \cos\phi_2} \quad \text{যেখানে } O_1Q = d_3 \text{ এবং } O_1Q_1 = a_2$$

$$= (a_1 + d_2)\frac{\mu_3 \cos\phi_3}{\mu_2 \cos\phi_2}$$

$$= \mu_3 \cos\phi_3 \left(\frac{a_1}{\mu_2 \cos\phi_2} + \frac{d_2}{\mu_2 \cos\phi_2}\right)$$

$$= \mu_3 \cos\phi_3 \left(\frac{d_1\mu_2 \cos\phi_2}{\mu_1 \cos\phi_1} \times \frac{1}{\mu_2 \cos\phi_2} + \frac{d_2}{\mu_2 \cos\phi_2}\right)$$

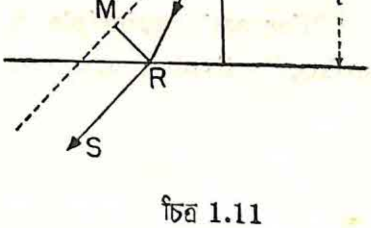
$$= \mu_3 \cos\phi_3 \left(\frac{d_1}{\mu_1 \cos\phi_1} + \frac{d_2}{\mu_2 \cos\phi_2}\right)$$

3. দেখাও যে, তির্যক রশ্মি কোন স্বচ্ছ প্লেটের মধ্য দিয়া প্রতিসৃত হইলে রশ্মির পার্শ্বীয় পরিবর্তন $l = t \sin\phi_1 \left(1 - \frac{\mu_1 \cos\phi_1}{\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 \sin^2\phi_2}}\right)$ হইবে।

(Show that the lateral displacement of an oblique ray passes through a transparent plate will be

$$l = t \sin\phi_1 \left(1 - \frac{\mu_1 \cos\phi_1}{\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2 \sin\phi_2}}\right)$$

1.11 নং চিত্রে PQRS হইল স্বচ্ছ প্লেটের মধ্য দিয়া আলোক রশ্মির সমগ্র পথ। মনে করি, প্লেটের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ_2 এবং পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক হইল $\mu_1 (\mu_1 < \mu_2)$



চিত্র 1.11

পার্শ্বীয় পরিবর্তন $l = MR$

$$= QR \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= \frac{t}{\cos\phi_2} \times \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= \frac{t}{\cos\phi_2} (\sin\phi_1 \cos\phi_2 - \cos\phi_1 \sin\phi_2)$$

$$= t \sin\phi_1 - t\frac{\cos\phi_1 \sin\phi_2}{\cos\phi_2}$$

কিন্তু $\angle R + \angle Q = 180^\circ$ ($\because$ $QO \perp AB$ এবং $RO \perp AC$)

$\therefore$ $\angle A + \angle O = 180^\circ$

আবার, ΔQRO-এ $r_1 + r_2 + \angle O = 180^\circ$ ...(2.2)

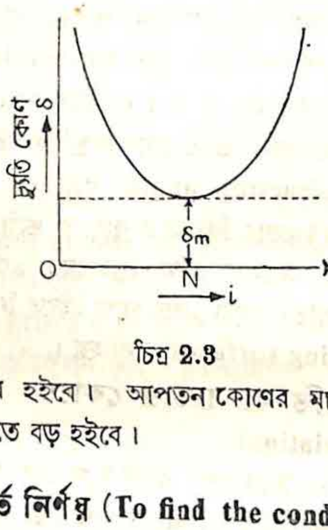
$\therefore$ $\angle A = r_1 + r_2$ ...(2.3)

কাজেই আমরা লিখিতে পারি

$$\delta = i_1 + i_2 - \angle A \quad \cdots(2.4)$$

2.3 অবম বা অল্পতম চ্যুতি কোণ (Angle of minimum deviation)

কোন নির্দিষ্ট প্রিজমের ক্ষেত্রে চ্যুতি কোণ আলোক রশ্মির আপতন কোণের উপর নির্ভরশীল। আপতন কোণ $\angle i_1$-কে খুব ছোট হইতে আরম্ভ করিয়া যদি ক্রমাগত বাড়ানো যায় তাহা হইলে দেখা যায় যে একটি নির্দিষ্ট আপতন কোণে চ্যুতি কোণ অল্পতম (minimum) হয়। আপতন কোণ উহার বেশী বা কম হইলে চ্যুতি কোণ অল্পতম মান অপেক্ষা বেশী হয়। $\angle i_1$ এবং $\angle \delta$-এর মানকে যথাক্রমে ভুজ ও কোটি ধরিয়া লেখচিত্র আঁকিলে 2.3 নং চিত্রের ন্যায় লেখ (graph) পাওয়া যাইবে। লেখচিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে আপতন কোণের মান ON হইলে আলোক রশ্মির চ্যুতি অল্পতম হইবে। আপতন কোণের মান ON অপেক্ষা বেশী বা কম হইলে চ্যুতি কোণ δ_m হইতে বড় হইবে।



চিত্র 2.3

2.4 অল্পতম বা অবম চ্যুতি কোণের শর্ত নির্ণয় (To find the condition for minimum deviation)

প্রিজমের মধ্য দিয়া আলোক রশ্মি প্রতিসৃত হইলে, উহার চ্যুতি কোণ

$$\delta = i_1 + i_2 - A \quad \cdots(2.5)$$

এবং প্রতিসারক কোণ $A = r_1 + r_2$ ...(2.6)

(2.6) সমীকরণকে অবকলন করিয়া (differentiate) পাই,

$$\frac{dr_1}{dr_2} = -1 \quad (\because \text{ A একটি ধ্রুবক কোণ, } dA = 0) \quad \cdots(2.7)$$

আবার, (2.5) সমীকরণ হইতে পাই,

$$\frac{di_1}{di_2} = 0 \quad (\because \text{ অল্পতম চ্যুতির ক্ষেত্রে } d(\delta) = 0) \quad \cdots(2.8)$$

মনে করি, প্রিজমের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক μ.

এখন স্নেলের সূত্রানুযায়ী,

$$\left.\begin{aligned}\sin i_1 = \mu \sin r_1\\ \sin i_2 = \mu \sin r_2\end{aligned}\right\} \quad \cdots(2.9)$$

উভয় ক্ষেত্রে অবকলন করিয়া পাই,

$$\cos i_1\, di_1 = \mu \cos r_1\, dr_1$$

$$\cos i_2\, di_2 = \mu \cos r_2\, dr_2$$

$$\therefore \quad \frac{\cos i_1}{\cos i_2}\cdot\frac{di_1}{di_2} = \frac{\cos r_1}{\cos r_2}\cdot\frac{dr_1}{dr_2}$$

অথবা, $\dfrac{\cos i_1}{\cos i_2} = \dfrac{\cos r_1}{\cos r_2}$ $\left(\because \dfrac{di_1}{di_2} = -1 \text{ এবং } \dfrac{dr_1}{dr_2} = -1\right)$

বর্গ করিয়া, $\dfrac{\cos^2 i_1}{\cos^2 i_2} = \dfrac{\cos^2 r_1}{\cos^2 r_2}$

অথবা, $\dfrac{1-\sin^2 i_1}{1-\sin^2 i_2} = \dfrac{1-\sin^2 r_1}{1-\sin^2 r_2}$

অথবা, $\dfrac{1-\mu^2\sin^2 r_1}{1-\mu^2\sin^2 r_2} = \dfrac{1-\sin^2 r_1}{1-\sin^2 r_2}$ $\left(\begin{aligned}\because \sin i_1 = \mu \sin r_1\\ \text{এবং } \sin i_2 = \mu \sin r_2\end{aligned}\right)$

$$= \frac{(1-\mu^2\sin^2 r_1)-(1-\sin^2 r_1)}{(1-\mu^2\sin^2 r_2)-(1-\sin^2 r_2)}$$

$$= \frac{\sin^2 r_1}{\sin^2 r_2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin^2 r_1}{\sin^2 r_2} = \frac{1-\sin^2 r_1}{1-\sin^2 r_2} = \frac{\sin^2 r_1 + (1-\sin^2 r_1)}{\sin^2 r_2 + (1-\sin^2 r_2)} = 1$$

$$\therefore \quad \sin r_1 = \sin r_2$$

অথবা, $r_1 = r_2$ $\cdots(2.10)$

এখন, (2.9) সমীকরণে $r_1 = r_2$ বসাইয়া পাই,

$$i_1 = i_2 \quad \cdots(2.11)$$

সুতরাং $i_1 = i_2$ এবং $r_1 = r_2$ হইলে রশ্মির চ্যুতি কোণ অল্পতম হইবে।

2.5 প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক (Refractive index of the material of a prism)

আমরা 2.2 অনুচ্ছেদে দেখিয়াছি চ্যুতি কোণ, $\delta = i_1 + i_2 - A$

এবং প্রতিসারক কোণ, $A = r_1 + r_2$

কিন্তু চ্যুতি কোণ অল্পতম হইলে $r_1 = r_2$ এবং $i_1 = i_2$

Q বিন্দুতে (2.2 নং চিত্র) প্রতিসরণ বিবেচনা করিলে, স্নেলের সূত্রানুযায়ী আমরা লিখিতে পারি,

$$\mu=\frac{\sin i_1}{\sin r_1}=\frac{\sin\frac{\delta_m+A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \quad \cdots(2.12)$$

প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ জানা থাকিলে, অল্পতম চ্যুতি কোণ পরিমাপ করিয়া আমরা প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক μ নির্ণয় করিতে পারি।

2.6 পাতলা প্রিজম দ্বারা চ্যুতি (Deviation produced by thin prism)

পাতলা প্রিজ্‌ম বলিতে অল্প প্রতিসারক কোণ ($<10°$) বিশিষ্ট প্রিজ্‌মকে বুঝায়।

মনে করি, আলোক রশ্মি BAC-র উপর খুব ছোট আপতন কোণে আপতিত হইয়াছে (চিত্র নং 2.4a)। এখন AB ও AC তলে প্রতিসরণ বিবেচনা করিলে স্নেলের সূত্রানুসারে,

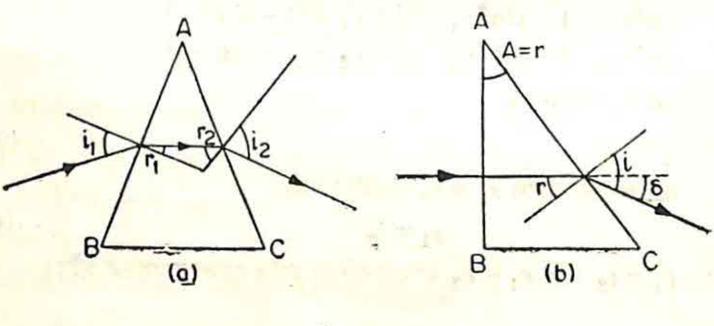
$$\sin i_1=\mu \sin r_1$$
$$\sin i_2=\mu \sin r_2$$

কিন্তু কোণগুলি ছোট হইলে কোণের মান সাইন কোণের বৃত্তীয় (radian) মানের সমান হয়

$\therefore \quad i_1=\mu r_1$ এবং $i_2=\mu r_2$

সুতরাং $i_1+i_2=\mu(r_1+r_2)$

$$=\mu A \qquad (\because\ r_1+r_2=A) \quad \cdots(2.13)$$



চিত্র 2.4

কিন্তু চ্যুতি কোণ δ হইলে

$$\delta=i_1+i_2-A$$

$\therefore$ সমীকরণ (2.13) হইতে আমরা পাই,

$$\delta=(\mu-1)A \quad \cdots(2.14)$$

যদি আপতন কোণ 90° হয়, তাহা হইলে উহা AB-তলের ভিতর দিয়া অবিচ্যুত-ভাবে (**undeviated**) চলিয়া যাইবে। AC-তলে আপতন ও প্রতিসৃত কোণ যথাক্রমে i এবং r হইলে দেখা যাইবে $A = r$

2.4(b) নং চিত্র হইতে আমরা পাই,

$$\delta = i - r$$
$$= i - A \qquad \cdots(2.15)$$

সুতরাং প্রিজ্‌মের প্রতিসরাঙ্ক, $\mu = \dfrac{\sin i}{\sin r}$

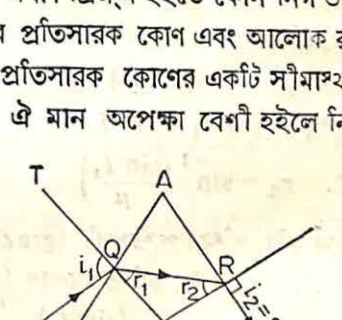
$$= \frac{\sin(A+\delta)}{\sin A}$$
$$= \frac{A+\delta}{A} \qquad \text{(A ক্ষুদ্র বলিয়া)}$$

অথবা, $\delta = (\mu - 1)\,A \qquad \cdots(2.16)$

আলোক রশ্মি কোন প্রিজ্‌মের উপর লম্বভাবে আপতিত হইলে (2.16) সমীকরণ হইতে চ্যুতি কোণ নির্ণয় করা যায়।

2.7 প্রিজ্‌মে আলোক রশ্মি নির্গত হইবার শর্ত (Condition of emergent ray through a prism)

কোন প্রিজ্‌ম কর্তৃক নির্গত আলোক রশ্মি অর্থাৎ প্রিজ্‌ম হইতে কোন নির্গত রশ্মি পাওয়া যাইবে কী যাইবে না তাহা প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ এবং আলোক রশ্মির আপতন কোণের উপর নির্ভর করে। প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণের একটি সীমাস্থ মান (**limiting value**) আছে। প্রতিসারক কোণ ঐ মান অপেক্ষা বেশী হইলে নির্গত রশ্মি পাওয়া যায় না। আবার কোন নির্দিষ্ট প্রিজ্‌মের ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট আপতন কোণ পাওয়া যায়, যে পর্যন্ত রশ্মি প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত হয়। আপতন কোণ ইহা অপেক্ষা বেশী হইলে আলোক রশ্মি আর প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত হইবে না।



চিত্র 2.5

মনে করি, ABC প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া আপতিত রশ্মি এবং নির্গত রশ্মি যথাক্রমে PQ এবং RS। নির্গত RS রশ্মি (চিত্র নং 2.5) প্রিজ্‌মের AC তল স্পর্শ করিয়া বাহির হইয়াছে। AC তলে প্রতিসৃত কোণ i_2 অপেক্ষা বেশী হইলে রশ্মি প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত হইবে না। সুতরাং আমরা বলিতে পারি আপতন কোণ ∠PQT, i_1 অপেক্ষা কম হইলে আলোক রশ্মি AC তলে অভ্যন্তরীণ পূর্ণ প্রতিফলিত হইবে।

নির্গম রশ্মি AC তল ঘেঁষিয়া নির্গত হওয়ায়

$r_2 = \theta_c$ (প্রিজ্‌মের কাচের ক্রান্তিক বা সংকট কোণ) এবং $i_2 = 90°$

$$\therefore \quad \sin \theta_c = \frac{1}{\mu}; \qquad \therefore \quad \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

AB তলে প্রতিসরণ বিবেচনা করিলে স্নেলের সূত্রানুসারে আমরা লিখিতে পারি

$$\sin i_1 = \mu \sin r_1$$

$$= \mu \sin (A - \theta_c) \qquad (\because A = r_1 + r_2 = r_1 + \theta_c)$$

$$= \mu \sin A \cos \theta_c - \mu \cos A \sin \theta_c$$

$$= \mu \sin A \sqrt{1 - \sin^2\theta_c} - \mu \cos A \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$= \mu \sin A \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}} - \cos A$$

$$= \mu \sin A \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu} - \cos A$$

$$= \sqrt{\mu^2 - 1} . \sin A - \cos A \qquad \cdots(2.17)$$

কোন নির্দিষ্ট প্রিজ্‌মের ক্ষেত্রে প্রতিসারক কোণ A এবং মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ জানা থাকিলে (2.17) সমীকরণ হইতে আপতন কোণের সীমাস্থ মান (limiting value) যাহার কম হইলে প্রিজ্‌ম হইতে কোন নির্গত রশ্মি পাওয়া যাইবে না তাহা নির্ধারণ করিতে পারা যায়।

আবার, $\quad A = r_1 + r_2$

কিন্তু $\mu \sin r_1 = \sin i_1$

$$\therefore \quad r_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin i_1}{\mu}\right) \qquad \cdots(2.18)$$

মনে করি, রশ্মির পৃষ্ঠস্পর্শী (grazing) নির্গমন হইয়াছে

$\therefore \quad r_2 = \theta_c$, ক্রান্তিক কোণ (critical angle)

সুতরাং $A = \sin^{-1}\left(\frac{\sin i_1}{\mu}\right) + \theta_c$

(i) আলোক রশ্মি 90° কোণে AB তলে আপতিত হইলে

$$i_1 = 90°$$

এবং তখন $A = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \theta_c$

$$= 2\theta_c \qquad \cdots(2.19)$$

(ii) আপতিত রশ্মি PQ অভিলম্বভাবে AB তলে আপতিত হইলে

$$i_1 = 0$$

$$\therefore \quad A = \theta_c \qquad \cdots(2.20)$$

অতএব, আলোক রশ্মি অভিলম্বভাবে আপতিত হইলে, প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ যদি প্রিজ্‌মের মাধ্যম ও বায়ুর ক্রান্তিক কোণ অপেক্ষা বেশী হয় তবে কোন নির্গম রশ্মি (emergent ray) পাওয়া যাইবে না।

আবার, আলোক রশ্মি AB তল ঘেঁষিয়া আপতিত হইলে প্রিজ্‌মের কোণ যদি $2\theta_c$ অপেক্ষা বেশী হয়, কোন রশ্মি প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত হইবে না।

2.8 আলোকের বর্ণবিচ্ছুরণ (Dispersion of light)

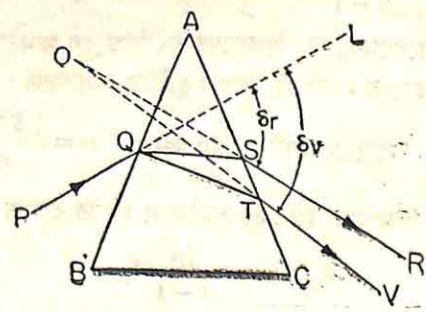
এক বর্ণের আলোক রশ্মি (monochromatic ray) প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া বাহির হইলে, রশ্মি উহার পথ হইতে বিচ্যুত হয়। বর্ণালি হইতে সহজেই বোঝা যায় যে বিভিন্ন বর্ণের চ্যুতি বিভিন্ন। যে বর্ণের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য যত বেশী তাহার গতিপথের চ্যুতি তত অল্প। লাল বর্ণের আলোর তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বেগুনী বর্ণ অপেক্ষা বেশী হওয়ায় উহার চ্যুতি বেগুনী বর্ণ অপেক্ষা অল্প। সুতরাং কোন যৌগিক আলো প্রিজ্‌মের উপর আপতিত হইলে বিভিন্ন বর্ণে বিভক্ত হইবে। সূর্য রশ্মি কাচের প্রিজ্‌মের উপর পড়িলে সাতটি বর্ণে বিভক্ত হয়। সহজেই দেখা যায় যে, লাল বর্ণের চ্যুতি সবচেয়ে অল্প এবং বেগুনী বর্ণের চ্যুতি বৃহত্তম। হলুদ বর্ণের চ্যুতি লাল ও বেগুনীর মধ্যবর্তী হওয়ায় উহাকে মধ্যবর্তী রশ্মি (mean ray) বলা হয়।

সাদা আলো প্রিজ্‌মের উপর পড়িলে উহা সাতটি বর্ণে বিভক্ত হয়। এই প্রণালীকে আলোকের বিচ্ছুরণ বলা হয়।

প্রত্যাশিত বর্ণবিক্ষেপণে (normal dispersion) আলোকের বিচ্ছুরণ এমন হয় যে রশ্মির চ্যুতি উহার তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সহিত হ্রাস পায়। বিচ্ছুরণ এই নিয়মে না হইলে তাহাকে বলা হয় ব্যতিক্রান্ত বা অনিয়ত বর্ণবিচ্ছুরণ (anomalous dispersion)।

2.9 কৌণিক বর্ণবিচ্ছুরণ এবং বর্ণবিক্ষেপণ ক্ষমতা (Angular dispersion and dispersive power)

মনে করি, যৌগিক আলোক রশ্মি ABC প্রিজ্‌মের উপর আপতিত হইল। প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত হওয়ার পর উহা বিভিন্ন বর্ণে বিভক্ত হইবে। সাদা আলো আপতিত হইলে উহা সাতটি বর্ণে বিভক্ত হইয়া যে বর্ণালি তৈয়ার করিবে তাহার এক প্রান্তে লাল এবং অপর প্রান্তে বেগুনী বর্ণ থাকিবে। 2.6 নং চিত্রে প্রান্তিক (extreme) বর্ণ দুইটি দেখানো হইয়াছে। অপর বর্ণগুলি উহাদের মধ্যে অবস্থিত হইবে।



চিত্র 2.6

পাতলা প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া কোন এক বর্ণের রশ্মি নির্গত হইলে উহার চ্যুতি

$$\delta = (\mu - 1)\,A$$

এক্ষেত্রে হলুদ রশ্মি লাল ও বেগুনী রশ্মি মধ্যবর্তী হওয়ায় উহার চ্যুতি

$$\delta_m = (\mu - 1)\ A \qquad \cdots(2.21)$$

যেখানে, δ_m = হলুদ রশ্মির চ্যুতি

μ = হলুদ রশ্মির জন্য প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক

এবং A = প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ

প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত বেগুনী রশ্মি TV এবং লাল রশ্মি SR যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাই কৌণিক বর্ণবিচ্ছুরণ। এক্ষেত্রে ∠ROV হইবে বেগুনী এবং লাল বর্ণের ভিতর কৌণিক বর্ণ বিচ্ছুরণ।

$$\therefore \text{ কৌণিক বর্ণবিচ্ছুরণ } \delta = \delta_v - \delta_r \qquad \cdots(2.22)$$

মনে করি, ABC একটি পাতলা প্রিজ্‌ম। সুতরাং লাল এবং বেগুনী রশ্মির চ্যুতি যদি δ_r এবং δ_v হয়, তাহা হইলে আমরা লিখিতে পারি

$$\delta_r = (\mu_r - 1)\ A$$
$$\delta_v = (\mu_v - 1)\ A$$

এখানে, μ_r = লাল আলোর ক্ষেত্রে প্রিজ্‌মের প্রতিসরাঙ্ক

এবং μ_v = বেগুনী বর্ণের ক্ষেত্রে প্রিজ্‌মের প্রতিসরাঙ্ক

$$\therefore \text{ কৌণিক বর্ণবিচ্ছুরণ } \delta = \delta_v - \delta_r$$
$$= (\mu_v - \mu_r).\ A$$
$$= \frac{\mu_v - \mu}{\mu - 1} \cdot A(\mu - 1)$$
$$= \frac{\mu_v - \mu_r}{\mu - 1} . \delta_m \qquad [\because \ \delta_m = (\mu - 1)A]$$

$$\therefore \quad \frac{\delta_v - \delta_r}{\delta_m} = \frac{\mu_v - \mu_r}{\mu - 1} = \frac{d\mu}{\mu - 1} \qquad \cdots(2.23)$$

$\dfrac{d\mu}{\mu - 1}$ রাশিকে বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা বলা হয়। সুতরাং দুইটি নির্দিষ্ট বর্ণের রশ্মির সাপেক্ষে কোন প্রিজ্‌মের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা হইল ঐ দুই বর্ণের কৌণিক বিচ্ছুরণ এবং উহাদের মধ্যবর্তী বর্ণের চ্যুতির অনুপাত।

$$\text{সুতরাং বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা } \omega = \frac{\text{দুইটি বর্ণের ভিতর কৌণিক বিচ্ছুরণ}}{\text{উহাদের মধ্যবর্তী বর্ণের চ্যুতি}}$$

আবার, (2.23) সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$\delta_v - \delta_r = \frac{d\mu}{\mu - 1} . \delta_m$$
$$= \omega \times \delta_m$$
$$\therefore \quad \delta = \omega \times \delta_m \qquad \cdots(2.24)$$

অর্থাৎ, **কৌণিক বর্ণবিচ্ছুরণ = বর্ণবিচ্ছুরণক্ষমতা × মধ্যবর্তী বর্ণের চ্যুতি।**

2.10 প্রিজ্‌ম সমাবন্ধ বা সমবায় (Combination of prisms)

প্রিজ্‌ম-সমাবন্ধ দুই প্রকারের হয় ঃ (*a*) বর্ণবিচ্ছুরণহীন বিচ্যুতি (**deviation without dispersion**) এবং (*b*) বিচ্যুতিহীন বর্ণবিচ্ছুরণ (**dispersion without deviation**)।

(*a*) **বর্ণবিচ্ছুরণহীন বিচ্যুতি ঃ** এক্ষেত্রে ভিন্ন উপাদানের তৈরী দুইটি প্রিজ্‌মকে এমনভাবে সমবায় (**combined**) করা হয়, যাহার ভিতর দিয়া সাদা আলো নির্গত হইলে রশ্মির বিচ্যুতি হইবে কিন্তু বর্ণবিক্ষেপণ হইবে না। এইরূপ সমাবন্ধকে অবার্ণ সমবায় (**achromatic combination**) বলা হয়।

মনে করি, দুইটি প্রিজ্‌মের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে μ_1 ও μ_2 ; প্রতিসারক কোণদ্বয় A_1 ও A_2 এবং উৎপন্ন বিচ্যুতি δ_1 ও δ_2. এক্ষেত্রে অনায়াসেই লেখা যায়

$$\delta_1 = (\mu_1 - 1)A_1 \qquad \cdots(2.25)$$

$$\delta_2 = (\mu_2 - 1)A_2 \qquad \cdots(2.26)$$

দুইটি প্রিজ্‌মের বিচ্ছুরণ $d\delta_1$ এবং $d\delta_2$ হইলে

$$d\delta_1 = A_1.d\mu_1 \qquad \cdots(2.27)$$

$$d\delta_2 = A_2.d\mu_2 \qquad \cdots(2.28)$$

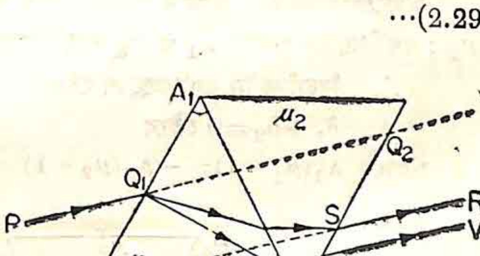
কিন্তু প্রিজ্‌মদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন মোট বর্ণবিচ্ছুরণ শূন্য হইলে

$d\delta_1 + d\delta_2 = 0$ হইবে

অর্থাৎ $A_1 d\mu_1 + A_2 d\mu_2 = 0$

অথবা $A_1 d\mu_1 = -A_2 d\mu_2 \qquad \cdots(2.29)$

সমীকরণ (2.29) হইতে বর্ণবিচ্ছুরণ-হীন প্রিজ্‌ম-সমাবন্ধ পাওয়া যায়। সুতরাং এইরূপ সমাবন্ধে দুইটি প্রিজ্‌মকে পরস্পর উল্টাভাবে সংলগ্ন (**connect**) করিতে হইবে (চিত্র নং 2.7)।



চিত্র 2.7

(2.29) সমীকরণে আমরা দেখিতে পাই,

$$A_1 d\mu_1 = -A_2 d\mu_2$$

অথবা $\dfrac{d\mu_1}{\mu_1 - 1} A_1(\mu_1 - 1) = -\dfrac{d\mu_2}{\mu_2 - 1} \cdot A_2(\mu_2 - 1)$

অথবা $\omega_1 \delta_1 = -\omega_2 \delta_2 \qquad \cdots(2.30)$

যেখানে $\omega_1 =$ প্রথম প্রিজ্‌মের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা $= \dfrac{d\mu_1}{\mu_1 - 1}$

$\omega_2 =$ দ্বিতীয় প্রিজ্‌মের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা $= \dfrac{d\mu_2}{\mu_2 - 1}$

সুতরাং দুইটি প্রিজ্‌মের অবার্ণ সমাবন্ধের জন্য (2.30) শর্ত পূর্ণ হইতে হইবে। ঋণাত্মক চিহ্ন বুঝাইতেছে যে প্রিজ্‌ম দুইটির প্রতিসারক কোণ বিপরীতমুখী হইবে।

প্রিজ্‌ম দুইটি বিপরীতমুখী হওয়ায় উহাদের দ্বারা উৎপন্ন বিচ্যুতি বিপরীতমুখী হইবে। উহাদের দ্বারা উৎপন্ন মোট বিচ্যুতির পরিমাণ হইবে ঃ

$$\text{মোট চ্যুতি} = A_1(\mu_1-1)+A_2(\mu_2-1)$$

$$= A_1(\mu_1-1) - A_1\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(\mu_2-1) \quad [\text{ (2.29) সমীকরণের সাহায্যে }]$$

$$= A_1 d\mu_1\left[\frac{\mu_1-1}{d\mu_1}-\frac{\mu_2-1}{d\mu_2}\right]$$

$$= A_1 d\mu_1\left[\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right] \quad \cdots(2.31)$$

এখানে ω_1 এবং ω_2 যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রিজ্‌মের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা।

প্রিজম দুইটি বিভিন্ন উপাদানে গঠিত হওয়ায় ω_1 এবং ω_2 সমান হইতে পারে না। সুতরাং মোট চ্যুতি শূন্য নয়।

কিন্তু যদি প্রিজ্‌ম দুইটি একই উপাদানে তৈয়ারী হয়, অর্থাৎ $\omega_1=\omega_2$ হইলে মধ্যবর্তী বর্ণের কোন চ্যুতি হইবে না।

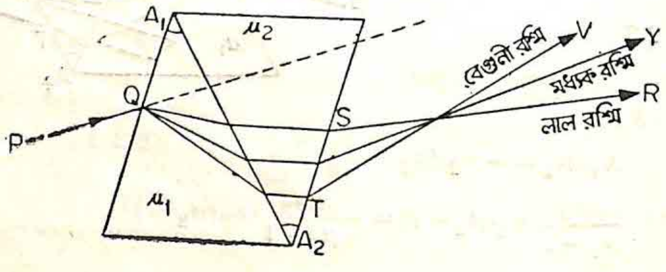
(b) **বিচ্যুতিহীন বর্ণবিচ্ছুরণ ঃ** এক্ষেত্রে দুইটি প্রিজ্‌মকে এমনভাবে সমাবন্ধ করা হয় যাহাতে বর্ণবিচ্ছুরণ হইবে কিন্তু কোন বিচ্যুতি হইবে না।

এক্ষেত্রেও মনে করি, প্রিজ্‌ম দুইটির কোণ যথাক্রমে A_1 ও A_2 ; প্রতিসরাঙ্ক μ_1 ও μ_2 ; বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা ω_1 ও ω_2 এবং উৎপন্ন বিচ্যুতি δ_1 ও δ_2.

∴ বিচ্যুতিহীন বর্ণবিচ্ছুরণ হইলে

$\delta_1+\delta_2=0$ হইবে

অর্থাৎ $A_1(\mu_1-1)=-A_2(\mu_2-1)$ $\cdots(2.32)$



চিত্র 2.8

ইহাই বিচ্যুতিহীন বর্ণবিচ্ছুরণের শর্ত। আমরা জানি $\mu_1>1$ এবং $\mu_2>1$। সুতরাং (2.32) শর্ত পালনের জন্য A_1 এবং A_2-র মান বিপরীত হওয়া প্রয়োজন। এক্ষেত্রেও প্রিজ্‌মদ্বয়কে পরস্পর বিপরীতমুখী করিয়া সংযোগ করা হয় (চিত্র নং 2.8)।

এখানে মোট বর্ণবিচ্ছুরণ $= A_1 d\mu_1 + A_2 d\mu_2$

$$= A_1 d\mu_1 - A_1 \frac{\mu_1 - 1}{\mu_2 - 1} \cdot d\mu_2$$

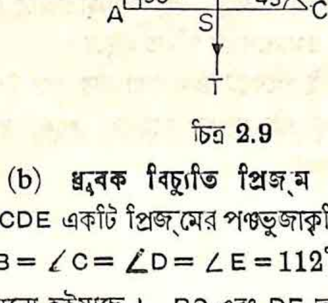
$$= A_1(\mu_1 - 1)\left[\frac{d\mu_1}{\mu_1 - 1} - \frac{d\mu_2}{\mu_2 - 1}\right]$$

$$= A_1(\mu_1 - 1)(\omega_1 - \omega_2)$$

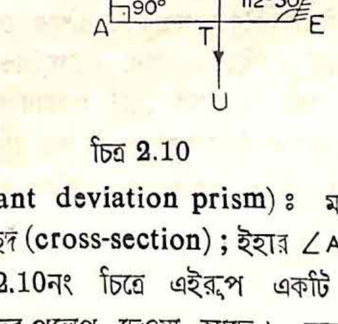
যেহেতু $\omega_1 \neq \omega_2$, অতএব মোট বর্ণবিচ্ছুরণ শূন্য হইবে না। কিন্তু যদি প্রিজ্‌মদ্বয় একই উপাদানে গঠিত হয় তাহা হইলে লব্ধ বিচ্ছুরণ শূন্য হইবে।

2.11 আলোক যন্ত্র হিসাবে ব্যবহৃত প্রিজ্‌ম (Prism used as optical instruments)

(a) **পূর্ণ প্রতিফলন প্রিজ্‌ম (Total reflection prism)ঃ** এই প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ $A = 90°$ এবং $AB = AC$ (চিত্র নং 2.9)। প্রিজম্‌টি সাধারণত ক্রাউন কাচের দ্বারা গঠিত হয়। ক্রাউন কাচের ক্রান্তিক কোণ $41°$ হওয়ায় PQ আলোক রশ্মি AB তলে লম্বভাবে আপতিত হইলে BC ভূমি হইতে প্রতিসৃত না হইয়া পূর্ণ প্রতিফলন ঘটাইবে এবং ST পথে নির্গত হইবে। এক্ষেত্রে মোট বিচ্যুতি হইবে $90°$।



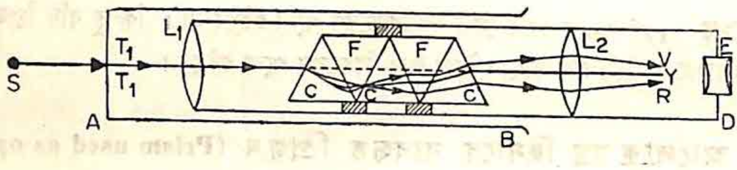
চিত্র 2.9



চিত্র 2.10

(b) **ধ্রুবক বিচ্যুতি প্রিজ্‌ম (Constant deviation prism)ঃ** মনে করি, ABCDE একটি প্রিজ্‌মের পঞ্চভুজাকৃতি প্রস্থচ্ছেদ (cross-section); ইহার $\angle A = 90°$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 112° 30'$. 2.10নং চিত্রে এইরূপ একটি প্রিজ্‌ম দেখানো হইয়াছে। BC এবং DE তলে পারদের প্রলেপ দেওয়া আছে। সুতরাং BC এবং DE তলে রশ্মি বেশীর ভাগ অংশই প্রতিফলিত হইবে। কোন প্রতিসরণ হইবে না। PQ রশ্মি অভিলম্বভাবে AB তলের Q বিন্দুতে আপতিত হইলে, উহা R এবং S বিন্দুতে প্রতিফলনের পর TU পথে নির্গত হইবে। এক্ষেত্রে রশ্মির বিচ্যুতি $= 90°$। এই বিচ্যুতি আলোক রশ্মির বর্ণের উপর নির্ভর না করায় চ্যুতি সবসময় একই থাকিবে।

(c) **সমাক্ষ বর্ণালিবীক্ষণ** (**Direct vision spectroscope**)ঃ এই যন্ত্র বিচ্যুতিহীন বর্ণবিচ্ছুরণ শর্ত মানিয়া চলে, অর্থাৎ এখানে প্রিজ্‌মগুলিকে এমনভাবে সমাবন্ধ করা হয়, যাহাতে মধ্যবর্তী রশ্মির কোন চ্যুতি হইবে না। এইজন্য বর্ণালি আপতিত রশ্মির অভিমুখেই গঠিত হয়। **2.11** নং চিত্রে একটি সমাক্ষ বর্ণালিবীক্ষণ যন্ত্র দেখানো হইয়াছে।



চিত্র 2.11

এই যন্ত্রে একটি চোঙ CD-র ভিতরে তিনটি ক্রাউন কাচের তৈয়ারী প্রিজ্‌ম (c) ও দুইটি ফ্লিন্ট কাচের প্রিজ্‌ম (F) দ্বারা গঠিত একটি প্রিজ্‌ম সমাবন্ধ রাখা হয়। C-প্রিজ্‌মগুলির শীর্ষ এবং F-প্রিজ্‌মগুলির শীর্ষ পরস্পর বিপরীতমুখী। CD চোঙের একপ্রান্তে সমান্তরকারী (collimating) লেন্স এবং অপর প্রান্তে একটি ছোট দূরবীক্ষণ যন্ত্র (telescope) বসানো আছে। L_2 হইল দূরবীক্ষণের অভিলক্ষ্য (objective) এবং E হইল অভিনেত্র (eyepiece)। CD চোঙকে অপর একটি চোঙ AB-র মধ্য দিয়া সামনে বা পিছনে সরানো যায় এবং তাহার ফলে উৎস (source) এবং সমান্তরকারী লেন্সের মধ্যের দূরত্ব ইচ্ছামত বাড়ানো কমানো যায়। লেন্স L_1 হইতে স্লিট T_1T_1 দূরত্ব ঐ লেন্সের ফোকস দূরত্বের সমান।

উৎস হইতে আগত আলোক রশ্মি যে বর্ণালি গঠন করিবে তাহা আপতিত রশ্মির অভিমুখেই থাকিবে। মধ্যবর্তী রশ্মির কোন চ্যুতি না হওয়ায় উহা অবিচ্যুতভাবে OY বরাবর নির্গত হইবে। অন্য বর্ণগুলিও বর্ণালির ক্রমানুসারে গঠিত হইবে।

এই যন্ত্রটি আকারে ছোট হওয়ায় খুব সহজেই পকেটে বহন করা যায় এবং ইহার সাহায্যে কোন বর্ণালির পর্যালোচনা করা যায়। কিন্তু এই যন্ত্রের সাহায্যে শুধু দৃশ্য বর্ণালির (visible spectrum) পরীক্ষা চালানো সম্ভব।

উদাহরণ (Examples)

1. 60° প্রতিসারক কোণবিশিষ্ট কোন প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক 1·5 হইলে অল্পতম চ্যুতি কোণ কত হইবে ?

(What is the angle of minimum deviation of a prism having the angle of refraction is 60° and the refractive index of the medium is 1·5 ?)

আমরা জানি, $\mu = \dfrac{\sin \frac{\delta_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$

এখানে $A = 60°$ এবং $\mu = 1·5$

$\therefore \quad 1·5 = \dfrac{\sin \frac{\delta_m + 60}{2}}{\sin 30}$

অথবা $\sin \dfrac{\delta_m + 60}{2} = 1·5 \times \sin 30$

$= 1·5 \times \frac{1}{2}$

$= 0·75$

$= \sin 48°36' \qquad (\because \ \sin 48°36' = 0·75)$

$\therefore \quad \dfrac{\delta_m}{2} + 30° = 48°36'$

অথবা $\dfrac{\delta_m}{2} = 18°36'$

$\therefore \quad \delta_m = 37°12'.$

2. একটি কাচের প্রিজ্‌মকে 1·33 প্রতিসরাঙ্কবিশিষ্ট তরলে নিমজ্জিত করা হইল। সমান্তরাল আলোক রশ্মি প্রিজ্‌ম কর্তৃক প্রতিসৃত হইলে অল্পতম চ্যুতি কোণ কত হইবে ? মনে করি, প্রতিসারক কোণ A = 72° এবং প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক 1·66.

(A glass prism is immersed in a liquid of refractive index 1·33. What is the angle of minimum deviation for a parallel beam of light passing through the prism ? Suppose the angle of refraction = 72° and the refractive index of prism = 1·66).

আমরা জানি, তরলের সাপেক্ষে প্রিজমের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক

$$_l\mu_g = \frac{\sin \frac{\delta_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

কিন্তু $_l\mu_a \times {}_a\mu_g \times {}_g\mu_l = 1$

অথবা $_l\mu_a \times {}_a\mu_g = \frac{1}{_g\mu_l} = {}_l\mu_g$

অথবা $\frac{_a\mu_g}{_a\mu_l} = {}_l\mu_g$

$\therefore \quad _l\mu_g = \frac{1{\cdot}66}{1{\cdot}33}$

সুতরাং $\frac{1{\cdot}66}{1{\cdot}33} = \frac{\sin \frac{\delta_m + 72^\circ}{2}}{\sin 36^\circ}$

অথবা $\sin \frac{\delta_m + 72^\circ}{2} = \frac{1{\cdot}66}{1{\cdot}33} \times \sin 36^\circ$

$= 0{\cdot}7318$

$= \sin 47^\circ$

অথবা $\frac{\delta_m + 72^\circ}{2} = 47^\circ$

$\therefore \quad \delta_m = 94^\circ - 72^\circ = 22^\circ.$

3. 60° কোণবিশিষ্ট কোন প্রিজ্‌মের মধ্য দিয়া আলোক রশ্মি ভূমির সমান্তরালভাবে অতিক্রম করিলে অল্পতম চ্যুতি কোণ 30° হয়। প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয় কর।

(Calculate the refractive index of the material of a prism having angle 60° if a ray passes parallel to the base of the prism and are deviated by an angle of 30°.)

এক্ষেত্রে অল্পতম চ্যুতি কোণ $\delta_m = 30^\circ$ এবং $A = 60^\circ$

$$\therefore \quad \mu = \frac{\sin \frac{\delta_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{60^\circ + 30^\circ}{2}}{\sin \frac{30^\circ}{2}}$$

$$= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 1{\cdot}41.$$

4. একটি প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ 60° এবং প্রতিসরাঙ্ক $\sqrt{\frac{7}{3}}$; প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া রশ্মির ঠিক নির্গমন হইবার পক্ষে আপতন কোণের সীমাস্থ মান কত ?

(The refracting angle of a prism is 60° and the index of refraction is $\sqrt{\frac{7}{3}}$. What is the limiting angle of incidence of a ray that will be transmitted through the prism ?)

আমরা জানি, আপতন কোণের সীমাস্থ মান i_1 হইলে

$$\sin i_1 = \sqrt{\mu^2 - 1}.\ \sin A - \cos A$$

$$\therefore \quad \sin i_1 = \sqrt{\tfrac{7}{3} - 1}\ .\ \sin 60^\circ - \cos 60^\circ$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad i_1 = 30^\circ.$$

5. আপতন কোণের সীমাস্থ মান কত হইলে আলোক রশ্মি 60°কোণবিশিষ্ট কোন্‌ প্রিজ্‌ম হইতে নির্গত হইবে ? প্রিজ্‌মের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক = 1·5 ।

(What will be the limiting angle of incidence of a ray that will be transmitted through a prism having angle of refraction is 60° ? Refractive index of the material of the prism = 1·5.)

আমরা জানি, আপতন কোণের সীমাস্থ মান i_1 হইলে

$$\sin i_1 = \sqrt{\mu^2 - 1}\ \ \sin A - \cos A$$

$$= \sqrt{2{\cdot}25 - 1}\ .\ \sin 60^\circ - \cos 60^\circ$$

$$= \sqrt{1{\cdot}25}\ .\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0{\cdot}56518$$

$$= \sin 27^\circ 54'$$

$$\therefore \quad i_1 = 27^\circ 54'.$$

6. লাল ও বেগুনী বর্ণের রশ্মির ক্ষেত্রে ফ্লিন্ট কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1·517 এবং 1·523। ঐ বর্ণদ্বয়ের সাপেক্ষে ফ্লিন্ট কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ কত হইবে?

(The refractive indices of flint glass for red and brown are respectively 1·517 and 1·523. What will be the dispersive power of flint glass for those two colours?)

আমরা জানি কৌণিক বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা, $\omega=\frac{\mu_v-\mu_r}{\mu-1}$

যেখানে $\mu=\frac{\mu_v+\mu_r}{2}$

$$=\frac{1{\cdot}517+1{\cdot}523}{2}$$

$$=1{\cdot}518$$

সুতরাং, $\omega=\frac{1{\cdot}523-1{\cdot}517}{1{\cdot}518-1}$

$$=\frac{0{\cdot}006}{0{\cdot}518}=0{\cdot}0115.$$

7. 1·518 প্রতিসরাঙ্কযুক্ত ক্রাউন কাচের প্রিজ্‌মের সহিত 5° প্রতিসারক কোণ-বিশিষ্ট ফ্লিন্ট কাচের প্রিজম যুক্ত করা হইল। ক্রাউন কাচের প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ কত হইলে রশ্মির কোন বিচ্যুতি হইবে না? ফ্লিন্ট কাচের প্রতিসরাঙ্ক = 1·758।

(A crown glass prism having refractive index 1·518 is combined with a flint glass prism having angle of refraction 5°. What must be the angle of the crown glass prism to give no deviation? Refractive index of flint glass = 1·758.)

আমরা জানি, উপরি-উক্ত প্রিজ্‌ম-সমাবন্ধ বিচ্যুতিহীন বর্ণবিচ্ছুরণ ঘটাইলে

$(\mu_1-1)\,A_1=(\mu_2-1)\,A_2$ হইবে।

যেখানে μ_1 = ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্ক = 1·518

μ_2 = ফ্লিন্ট কাচের প্রতিসরাঙ্ক = 1·758

A_2 = ফ্লিন্ট কাচের প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ = 5°

$\therefore\ (1{\cdot}518-1)\,A_1=(1{\cdot}758-1)\,A_2$

অথবা $0{\cdot}518\,A_1=0{\cdot}758\times5$

$$\therefore\ A_1=\frac{0{\cdot}758\times5}{0{\cdot}518}=7{\cdot}31^\circ.$$

8. 10° প্রতিসারক কোণবিশিষ্ট একটি ক্রাউন কাচের প্রিজমের সহিত কত প্রতিসারক কোণের ফ্লিন্ট কাচের প্রিজ্‌ম যুক্ত করিতে হইবে, যাহাতে উক্ত সমাবন্ধ বর্ণবিচ্ছুরণহীন

বিচ্যুতি জায়মান হইবে ? মোট বিচ্যুতি কত হইবে বাহির কর। বেগুনী, হলুদ ও লাল বর্ণের রশ্মির বেলায় ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1·523, 1·517 ও 1·514 এবং ফ্লিন্ট কাচের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1·664, 1·650 ও 1·644.

(Calculate the angle of the flint glass prism which when combined with a crown glass prism of 10° produces deviation but no dispersion. Find also the total deviation produced. The refractive indices of the crown glass for violet, yellow and red rays are respectively 1·523, 1·517 and 1·514 and those for the flint glass are 1·664, 1·650 and 1·644.) (C.U. '66)

আমরা জানি, বর্ণবিচ্ছুরণহীন বিচ্যুতির শর্ত হইতেছে

$$(\mu_v - \mu_r)A_1 = (\mu_v' - \mu_r')A_2$$

$$\therefore \ (1{\cdot}523 - 1{\cdot}514)\ 10 = (1{\cdot}664 - 1{\cdot}644)A_2$$

$$\therefore \ A_2 = \frac{0{\cdot}009 \times 10}{0{\cdot}020} = \frac{0{\cdot}09}{0{\cdot}02} = 4{\cdot}5^\circ$$

মোট চ্যুতি $= (\mu - 1)A\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$

$$= (1{\cdot}517 - 1) \times 10 \times \left[1 - \frac{\mu_v - \mu_r}{\mu - 1} \times \frac{\mu' - 1}{\mu_v' - \mu_r'}\right]$$

$$= 0{\cdot}517 \times 10 \times \left[1 - \frac{0{\cdot}009}{0{\cdot}617} \times \frac{0{\cdot}650}{0{\cdot}020}\right]$$

$$= 5{\cdot}17 \times \left[1 - \frac{585}{1034}\right]$$

$$= 5{\cdot}17 \times \frac{449}{1034} = 2{\cdot}245^\circ.$$

9. 60° প্রতিসারক কোণ বিশিষ্ট কোন প্রিজমের উপর সমান্তরাল আলোক রশ্মি 60° কোণে আপতিত হইল। রশ্মির চ্যুতি অল্পতম হইলে প্রিজমের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক কত হইবে ?

(A parallel beam of light is incident at an angle 60° on a prism having angle of refraction 60°. What will be the refractive index of the material of the prism if the deviation produced by the ray is minimum ?)

আমরা জানি, $\mu = \dfrac{\sin\frac{\delta_m + A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

কিন্তু $\delta_m = 2i - A$

$$= 2 \times 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

সুতরাং $$\mu = \frac{\sin\frac{60^\circ + 60^\circ}{2}}{\sin\frac{60^\circ}{2}}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$= 1{\cdot}732.$$

প্রশ্নমালা (Questions)

1. দেখাও যে, সূক্ষ্মকোণী পাতলা প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া আলোক রশ্মি গমন করিলে উহার বিচ্যুতি $(\mu - 1)$ A হইবে, যেখানে A হইতেছে প্রিজ্‌মের কোণ এবং μ হইতেছে আপতিত আলোক বর্ণের সাপেক্ষে প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক।

(Show that the deviation produced in a ray of light by a thin acute-angled prism is $(\mu - 1)$ A, where A is the angle of the prism and μ the refractive index of the material of the prism for the colour of the incident light.) (C. U. '61)

2. একটি প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া আগত আলোক রশ্মির অল্পতম বিচ্যুতি বলিতে কি বোঝায় ব্যাখ্যা কর।

দেখাও যে, আলোক রশ্মি প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া প্রতিসমভাবে গমন করিলে উহার বিচ্যুতি অল্পতম হইবে।

(Explain what is meant by minimum deviation of a ray of light in passing through a prism.

Show that a ray of light in passing symmetrically through a prism suffers minimum deviation.) (C. U. '64)

3. কি শর্তে একটি প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া গমনকারী রশ্মির অল্পতম চ্যুতি হইবে তাহা নির্ধারণ কর।

(Obtain the condition under which a ray of light passing through a prism suffers minimum deviation.) (C. U. '65)

4. বর্ণবিচ্ছুরণ ও বর্ণবিক্ষেপণ ক্ষমতা বলিতে কী বোঝ? দুইটি প্রিজ্‌ম-সমাবন্ধের অবার্ণতার শর্ত বাহির কর।

(Explain the terms dispersion and dispersive power. Deduce the condition of achromatism of two prisms.) (C. U. '66)

5. একটি কাচের প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া গমনকারী আলোক রশ্মির চ্যুতি অল্পতম হইবার শর্ত কী? তোমার উক্তির সত্যতা প্রমাণ কর। অল্পতম চ্যুতি কোণ এবং প্রিজ্‌মের কোণের সহিত সম্পর্কযুক্ত একটি কাচ প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয় কর।

(What is the condition for minimum deviation of a ray of light passing through a glass prism ? Prove your statement.

Find an expression for the refractive index of the glass of a prism in terms of the angle of minimum deviation and the angle of prism.) (C. U. '67)

6. একটি কাচের প্রিজ্‌মের ভিতর দিয়া আলোক রশ্মি গমন করিলে উহার চ্যুতি কত হইবে নির্ণয় কর। এই চ্যুতি আপতন কোণ এবং আলোক বর্ণ অথবা তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের উপর কিরূপে নির্ভর করে তাহা সাধারণভাবে প্রকাশ কর। অল্পতম চ্যুতি কোণ বলিতে কী বোঝায়?

(Find the amount of deviation produced to a ray of light in passing through a glass prism. Give a general indication as to how this deviation depends on the angle of incidence and on the colour or wave length of light. What is meant by angle of minimum deviation ?) (C. U. '74)

7. প্রিজ্‌মের অল্পতম চ্যুতি কোণ বলিতে কী বোঝ? প্রিজ্‌মের অল্পতম চ্যুতি কোণ, প্রতিসারক কোণ এবং প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্কের ভিতর সম্বন্ধটি নির্ণয় কর।

(What is meant by angle of minimum deviation for a prism ?

Deduce a relation between the angle of minimum deviation, the angle of the prism and the refractive index of the material of the prism.) (C. U. '77)

8. প্রিজ্‌মের কোণের সীমাস্থ মান কত হইলে কোন রশ্মি নির্গত হইবে না, বাহির কর।

দেখাও যে, একটি পাতলা প্রিজ্‌মের উপর অভিলম্ব ভাবে আপতিত রশ্মির বিচ্যুতি আপতন কোণের উপর নির্ভর করে না।

(Deduce an expression for the limiting angle of a prism beyond which there will be no emergent ray.

Show that the deviation produced by a thin prism is independent of the angle of incidenee, when the incidence is nearly normal.) (C. U. '79)

9. দেখাও যে, কোন নির্দিষ্ট কোণে প্রিজ্‌মের উপর আপতিত রশ্মির চ্যুতি প্রিজ্‌মের কোণের সহিত বৃদ্ধি পায়।

(Show that for a given angle of incidence on a prism, the deviation of the ray increases with the angle of the prism.)

10. মনে কর, একটি আলোক রশ্মি কোন প্রিজ্‌মের উপর 50° কোণে আপতিত হইল। প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ 60° হইলে অল্পতম চ্যুতি কোণ কত হইবে ?

(Suppose a ray of light is incident on a prism at an angle 50°. If the angle of refraction of the prism is 60°, calculate the minimum angle of deviation.) (Ans. 40°)

11. ধর, ABC একটি সমবাহু আকৃতির প্রিজ্‌ম। একটি আলোক রশ্মি BC তল হইতে পূর্ণ প্রতিফলিত হইলে AC তলে উহার আপতন কোণ কত হইবে ?

(Let ABC is an equilateral prism. If a ray of light is totally reflected from the face BC, what will be its angle of incidence at the face AC ?) (Ans. 27°55′)

12. ক্রাউন ও ফ্লিন্ট কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা যথাক্রমে 0·03 ও 0·05। লাল এবং নীল বর্ণের আলোর ক্ষেত্রে ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্কের তফাত 0·014 এবং ফ্লিন্ট কাচের 0·023 ; বর্ণবিচ্ছুরণহীন 10° বিচ্যুতি উৎপন্ন করিতে ক্রাউন ও ফ্লিন্ট কাচের যে প্রিজ্‌ম দুইটি ব্যবহার করিতে হইবে উহাদের প্রতিসারক কোণদ্বয় নির্ণয় কর।

(The dispersive powers of crown and flint glasses are 0·03 and 0·05 respectively. If the difference in the refractive indices of blue and red colours is 0·014 for crown glass and 0·023 for flint glass, calculate the angles of the two prisms for a deviation of 10° without dispersion.) (C. U. '56) (Ans. 32·6°, 53·55°)

13. 60° প্রতিসারক কোণবিশিষ্ট একটি প্রিজ্‌ম একটি রশ্মির অল্পতম চ্যুতি ঘটায় 39°20′। প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক এবং আপতন কোণ বাহির কর। দেওয়া আছে sin 49°40′ = 0·7623।

(A 60° prism gives a minimum deviation angle of 39°20′ to a ray. Find its refractive index and the angle of incidence of the ray. Given sin 49°40′ = 0·7623.) (C. U. '74) (Ans. 1·52, 19°40′)

14. একটি প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ 60° এবং প্রতিসরাঙ্ক 1·69 ; উহা 1·3 প্রতিসরাঙ্কবিশিষ্ট একটি তরলে ডুবানো আছে। এক্ষেত্রে অল্পতম বিচ্যুতি কোণ কত হইবে ?

(A prism of angle 60° and refractive index 1·69 is immersed in a liquid of refractive index 1·3. Find the angle of minimum deviation in this case.) (C. U. '79) (Ans. 21·20°)

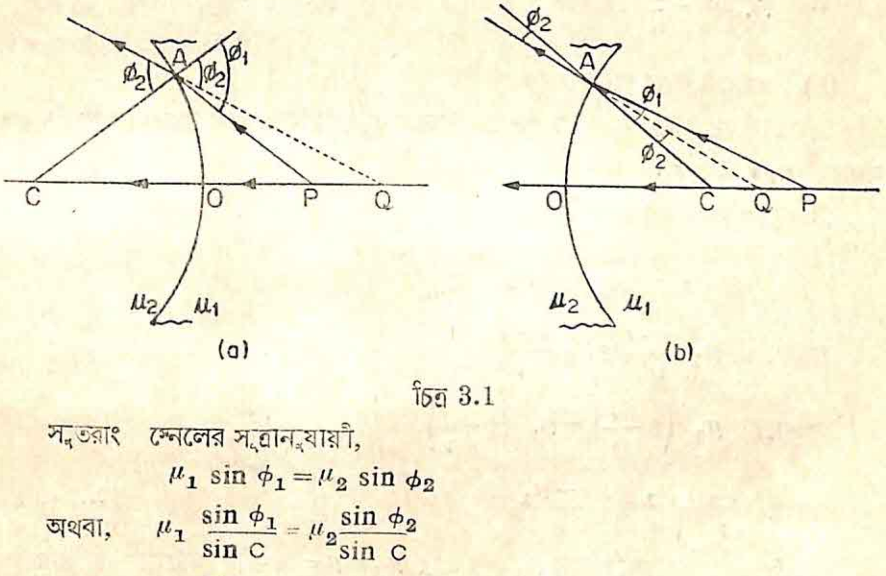
তৃতীয় পরিচ্ছেদ

গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ

(Refraction of light at a spherical surface)

3.1 একটি গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ (Refraction of light at a single spherical surface)

মনে করি, তির্যক রশ্মি PA এবং লম্ব রশ্মি PO গোলীয় তল কর্তৃক প্রতিসরণের পর Q বিন্দুতে মিলিত হইল [চিত্র নং 3.1(*a*)] অথবা Q বিন্দু হইতে অপসৃত হইল [চিত্র নং 3.1.(*b*)]। Q হইল P বিন্দুর প্রতিবিম্ব, ϕ_1 এবং ϕ_2 যথাক্রমে তির্যক রশ্মি PA-র আপতন কোণ এবং প্রতিসরণ কোণ। μ_1 এবং μ_2 হইল যথাক্রমে আপতিত এবং প্রতিসারক মাধ্যমদ্বয়ের প্রতিসরাঙ্ক।



চিত্র 3.1

সুতরাং স্নেলের সূত্রানুযায়ী,

$$\mu_1 \sin \phi_1 = \mu_2 \sin \phi_2$$

অথবা, $$\mu_1 \frac{\sin \phi_1}{\sin C} = \mu_2 \frac{\sin \phi_2}{\sin C}$$

অথবা, $$\mu_1 \frac{CP}{PA} = \mu_2 \frac{CQ}{QA}$$

অথবা, $$\mu_1 \frac{CP}{OP} = \mu_2 \frac{CQ}{OQ}$$ [∵ রশ্মিগুচ্ছ অক্ষানুসারী (paraxial]···(3.1)

(a) উত্তল তলে প্রতিসরণ :

3.1(a) চিত্রে, মনে করি, O বিন্দু হইতে বস্তু, প্রতিবিম্ব এবং বক্রতা কেন্দ্রের দূরত্ব (চিহ্ন সহকারে) যথাক্রমে u, $-v$ এবং $-r$

(Show that for a given angle of incidence on a prism, the deviation of the ray increases with the angle of the prism.)

10. মনে কর, একটি আলোক রশ্মি কোন প্রিজ্‌মের উপর 50° কোণে আপতিত হইল। প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ 60° হইলে অল্পতম চ্যুতি কোণ কত হইবে?

(Suppose a ray of light is incident on a prism at an angle 50°. If the angle of refraction of the prism is 60°, calculate the minimum angle of deviation.) (Ans. 40°)

11. ধর, ABC একটি সমবাহু আকৃতির প্রিজ্‌ম। একটি আলোক রশ্মি BC তল হইতে পূর্ণ প্রতিফলিত হইলে AC তলে উহার আপতন কোণ কত হইবে?

(Let ABC is an equilateral prism. If a ray of light is totally reflected from the face BC, what will be its angle of incidence at the face AC?) (Ans. 27°55′)

12. ক্রাউন ও ফ্লিন্ট কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা যথাক্রমে 0·03 ও 0·05। লাল এবং নীল বর্ণের আলোর ক্ষেত্রে ক্রাউন কাচের প্রতিসরাঙ্কের তফাত 0·014 এবং ফ্লিন্ট কাচের 0·023; বর্ণবিচ্ছুরণহীন 10° বিচ্যুতি উৎপন্ন করিতে ক্রাউন ও ফ্লিন্ট কাচের যে প্রিজ্‌ম দুইটি ব্যবহার করিতে হইবে উহাদের প্রতিসারক কোণদ্বয় নির্ণয় কর।

(The dispersive powers of crown and flint glasses are 0·03 and 0·05 respectively. If the difference in the refractive indices of blue and red colours is 0·014 for crown glass and 0·023 for flint glass, calculate the angles of the two prisms for a deviation of 10° without dispersion.) (C. U. '56) (Ans. 32·6°, 53·55°)

13. 60° প্রতিসারক কোণবিশিষ্ট একটি প্রিজ্‌ম একটি রশ্মির অল্পতম চ্যুতি ঘটায় 39°20′। প্রিজ্‌মের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক এবং আপতন কোণ বাহির কর। দেওয়া আছে sin 49°40′ = 0·7623।

(A 60° prism gives a minimum deviation angle of 39°20′ to a ray. Find its refractive index and the angle of incidence of the ray. Given sin 49°40′ = 0·7623.) (C. U. '74) (Ans. 1·52, 19°40′)

14. একটি প্রিজ্‌মের প্রতিসারক কোণ 60° এবং প্রতিসরাঙ্ক 1·69; উহা 1·3 প্রতিসরাঙ্কবিশিষ্ট একটি তরলে ডুবানো আছে। এক্ষেত্রে অল্পতম বিচ্যুতি কোণ কত হইবে?

(A prism of angle 60° and refractive index 1·69 is immersed in a liquid of refractive index 1·3. Find the angle of minimum deviation in this case.) (C. U. '79) (Ans. 21·20°)

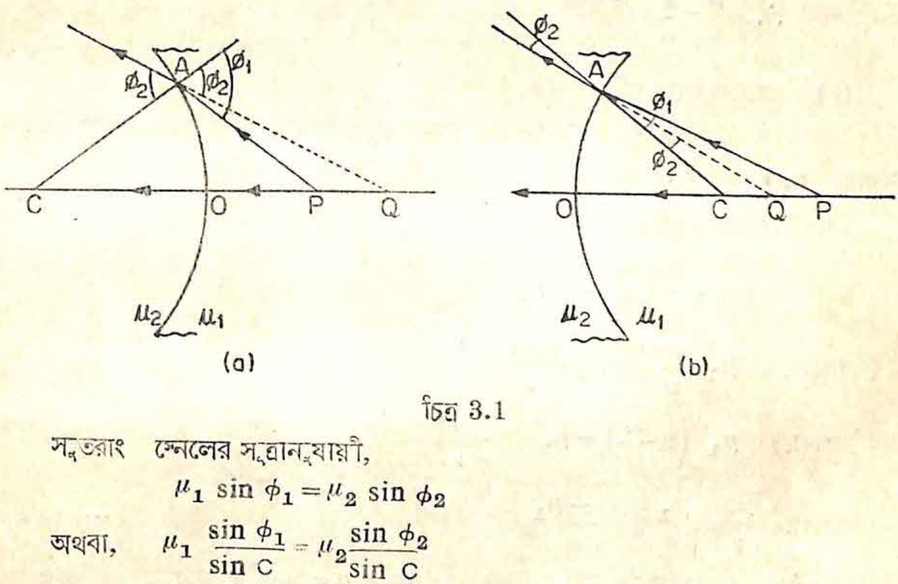
তৃতীয় পরিচ্ছেদ

গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ

(Refraction of light at a spherical surface)

3.1 একটি গোলীয় তলে আলোর প্রতিসরণ (Refraction of light at a single spherical surface)

মনে করি, তির্যক রশ্মি PA এবং লম্ব রশ্মি PO গোলীয় তল কর্তৃক প্রতিসরণের পর Q বিন্দুতে মিলিত হইল [চিত্র নং 3.1 (*a*)] অথবা Q বিন্দু হইতে অপসৃত হইল [চিত্র নং 3.1.(*b*)]। Q হইল P বিন্দুর প্রতিবিম্ব, ϕ_1 এবং ϕ_2 যথাক্রমে তির্যক রশ্মি PA-র আপতন কোণ এবং প্রতিসরণ কোণ। μ_1 এবং μ_2 হইল যথাক্রমে আপতিত এবং প্রতিসারক মাধ্যমদ্বয়ের প্রতিসরাঙ্ক।



চিত্র 3.1

সুতরাং স্নেলের সূত্রানুযায়ী,

$$\mu_1 \sin \phi_1 = \mu_2 \sin \phi_2$$

অথবা, $$\mu_1 \frac{\sin \phi_1}{\sin C} = \mu_2 \frac{\sin \phi_2}{\sin C}$$

অথবা, $$\mu_1 \frac{CP}{PA} = \mu_2 \frac{CQ}{QA}$$

অথবা, $$\mu_1 \frac{CP}{OP} = \mu_2 \frac{CQ}{OQ}$$ [∵ রশ্মিগুচ্ছ অক্ষানুসারী (paraxial]···(3.1)

(a) উত্তল তলে প্রতিসরণ :

3.1(a) চিত্রে, মনে করি, O বিন্দু হইতে বস্তু, প্রতিবিম্ব এবং বক্রতা কেন্দ্রের দূরত্ব (চিহ্ন সহকারে) যথাক্রমে u, $-v$ এবং $-r$

(3.1) সমীকরণ হইতে পাই

$$\mu_1 \frac{OP+OC}{OP}=\mu_2 \frac{OQ-OC}{OQ}$$

অথবা, $\mu_1 \frac{u-r}{u}=\mu_2 \frac{-v-(-r)}{-v}$

অথবা, $\mu_1 \left(1-\frac{r}{u}\right)=\mu_2 \left(1-\frac{r}{v}\right)$

অথবা, $\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$ ... (3.2)

আপতিত মাধ্যম বায়ু হইলে $\mu_1=1$ এবং দ্বিতীয় মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক $\mu_2=\mu$ হইবে।

$$\therefore \frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r}$$

(b) অবতল তলে প্রতিসরণ :

3.1(*b*) চিত্রে, মনে করি, O বিন্দু হইতে বস্তু, প্রতিবিম্ব এবং বক্রতা কেন্দ্রের দূরত্ব যথাক্রমে *u*, *v* এবং *r*।

(3.1) সমীকরণ হইতে পাই

$$\mu_1 \frac{OP-OC}{OP}=\mu_2 \frac{OQ-OC}{OQ}$$

অথবা, $\mu_1 \frac{u-r}{u}=\mu_2 \frac{v-r}{v}$

অথবা, $\mu_1 \left(1-\frac{r}{u}\right)=\mu_2 \left(1-\frac{r}{v}\right)$

অথবা, $\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$ ... (3.3)

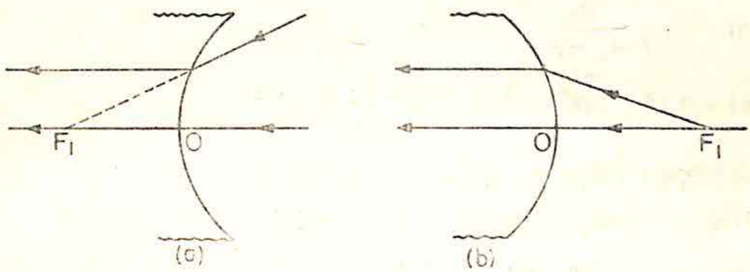
আপতিত মাধ্যম বায়ু হইলে $\mu_1=1$ এবং $\mu_2=\mu$ = দ্বিতীয় মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক হইবে।

$$\therefore \frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r}$$

3.2 গোলীয় তলের দুই মুখ্য ফোকাস (Two principal foci of a spherical surface)

প্রথম মুখ্য ফোকাস (F_1) হইল গোলীয় তলের প্রধান অক্ষের উপর এমন একটি বিন্দু যেখানে একটি অসদ্ বস্তু [চিত্র নং 3.2 (a)] বা একটি সদ্ বস্তু

[চিত্র নং 3.2 (b)] রাখিলে উহার প্রতিবিম্ব অসীমে গঠিত হইবে অর্থাৎ প্রতিসৃত রশ্মি লেন্সের অক্ষের সমান্তরাল হইবে।



চিত্র 3.2

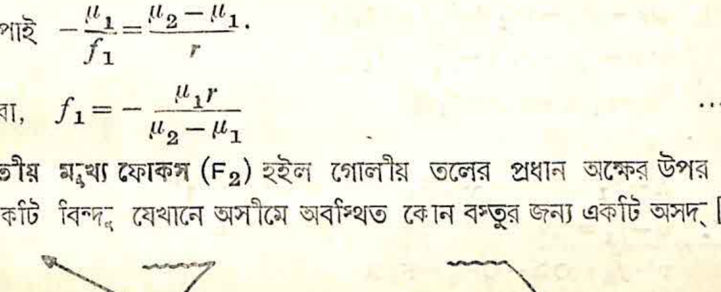
অতএব, বস্তু দূরত্ব u = প্রথম ফোকস দূরত্ব f_1 এবং এক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব অসীমে অবস্থিত হওয়ায় $v=\infty$ হইবে।

সুতরাং $\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$ সমীকরণে u ও v-র মান বসাইলে

আমরা পাই $-\frac{\mu_1}{f_1}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$.

অথবা, $$f_1=-\frac{\mu_1 r}{\mu_2-\mu_1} \qquad \cdots (3.4)$$

দ্বিতীয় মুখ্য ফোকস (F_2) হইল গোলীয় তলের প্রধান অক্ষের উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দু যেখানে অসীমে অবস্থিত কোন বস্তুর জন্য একটি অসদ্ [চিত্র নং

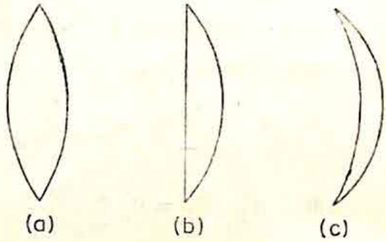


চিত্র 3.3

3 3(a)] বা সদ্ [চিত্র নং 3.3 b)] প্রতিবিম্ব গঠিত হইবে—অর্থাৎ সমান্তরাল আলোক রশ্মি গোলীয় তল কর্তৃক প্রতিসৃত হওয়ার পর F_2 বিন্দু হইতে অপসৃত বা ঐ বিন্দুতে মিলিত হইবে।

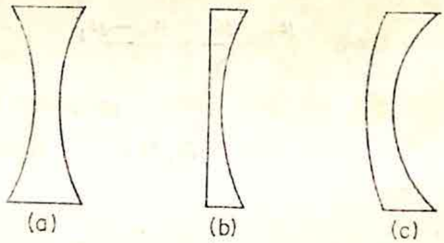
এখানে বস্তু দূরত্ব $u=\infty$ এবং প্রতিবিম্ব দূরত্ব v = দ্বিতীয় ফোকস দূরত্ব f_2 ; u এবং v-র মান গোলীয় তলের সমীকরণে [(3.3) সমীকরণ] বসাইলে,

যে লেন্সের প্রান্তের দিক্‌টা সরু এবং মধ্য স্থল মোটা, তাহাকে **উত্তল লেন্স** (convex lens) বলা হয়। তিন প্রকার উত্তল লেন্স আছে, যথা—উভোত্তল (double convex) লেন্স (a), সমতলোত্তল (plano-convex) লেন্স (b) এবং অবতলোত্তল (concavo-convex) লেন্স (c) [চিত্র নং 3.5(i)]।



চিত্র 3 5(i)

যে লেন্সের মধ্য স্থল সরু এবং প্রান্তের দিক্‌টা মোটা, তাহাকে **অবতল লেন্স** (concave lens) বলা হয়। তিন প্রকার অবতল লেন্স আছে [চিত্র নং 3.6(ii)] যথা—উভাবতল (double concave) লেন্স (a), সমাবতল (plano-concave) লেন্স (b) এবং উত্তলাবতল (convexo-concave) লেন্স (c)।

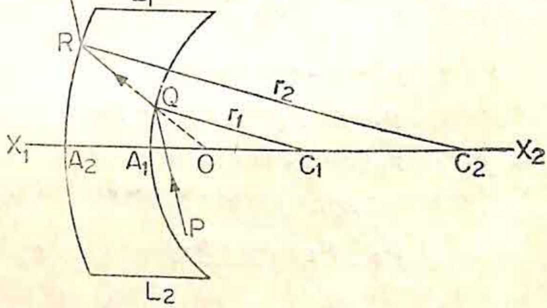


চিত্র 3.5(ii)

3.6 লেন্সের আলোক কেন্দ্র এবং উহার অবস্থান নির্ণয় (Optical centre of a lens and to find its position)

লেন্স কর্তৃক প্রতিসরণের পর নির্গত রশ্মি যদি আপতিত রশ্মির সমান্তরাল হয়, তবে রশ্মির গতিপথ লেন্সের প্রধান অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুকে **লেন্সের আলোক কেন্দ্র** বলে।

3.6 নং চিত্রে আপতিত রশ্মি PQ, L_1L_2 লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত হইয়া RS পথে নির্গত হইল। এক্ষেত্রে রশ্মি PQ ও রশ্মি RS পরস্পর সমান্তরাল। RQ-কে বর্ধিত করিলে উহা লেন্সের প্রধান অক্ষ X_1X_2-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং O হইল L_1L_2 লেন্সের আলোক কেন্দ্র।



চিত্র 3.6

এখন $\triangle OQC_1$ এবং $\triangle ORC_2$ হইতে পাই,

$$\frac{QC_1}{RC_2}=\frac{OC_1}{OC_2}$$

অথবা, $\frac{r_1}{r_2}=\frac{A_1C_1-A_1O}{A_2C_2-A_2O}=\frac{r_1-A_1O}{r_2-A_2O}$, যেখানে r_1 এবং r_2 যথাক্রমে লেন্সের প্রথম এবং দ্বিতীয় বক্রতলের ব্যাসার্ধদ্বয়।

$$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2}=\frac{A_1O}{A_2O}$$

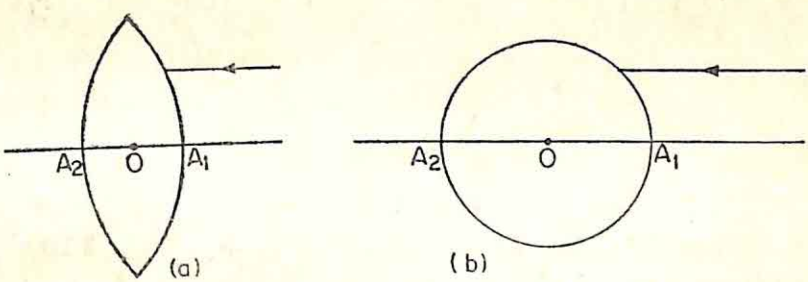
অথবা, $\frac{r_2-r_1}{r_2}=\frac{A_2O-A_1O}{A_2O}=\frac{A_1A_2}{A_2O}=\frac{d}{A_2O}$

অথবা, $A_2O=\frac{r_2d}{r_2-r_1}$ $\cdots$ (3.12)

অনুরূপে $A_1O=\frac{r_1d}{r_2-r_1}$ $\cdots$ (3.13)

আলোচনা : (i) যদি লেন্সটি সম-উত্তল (equi-convex) বা স্বচ্ছ গোলক হয় [চিত্র নং 3.7(*a*) এবং 3.7(*b*)] তবে

$r_1=-r$ এবং $r_2=r$ হইবে।



চিত্র 3.7

অতএব (3.12) এবং (3.13) সমীকরণদ্বয় হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$A_1O=\frac{r_1t}{r_2-r_1}=-\frac{rt}{2r}=\frac{-t}{2} \quad \cdots (3.14)$$

এবং $$A_2O=\frac{r_2t}{r_2-r_1}=\frac{rt}{2r}=\frac{t}{2} \quad \cdots (3.15)$$

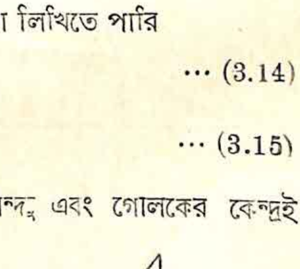
সুতরাং আমরা বলিতে পারি, সম-উত্তল লেন্সের মধ্যবিন্দু এবং গোলকের কেন্দ্রই হইবে আলোক কেন্দ্র।

(ii) যদি লেন্সটি সমতলোত্তল হয় (চিত্র নং 3.8)

$r_1=\infty$ এবং $r_2=r$ হইবে

অতএব $A_1O=\frac{r_1t}{r_2-r_1}=\frac{t}{\frac{r_2}{r_1}-1}=-t$ $\cdots$ (3.16)

$$A_2O=\frac{r_2t}{r_2-r_1}=\frac{t}{1-\frac{r_1}{r_2}}=0 \quad \cdots (3.17)$$



চিত্র 3.8

আলোক কেন্দ্র A_2 বিন্দুতে অবস্থিত হইবে।

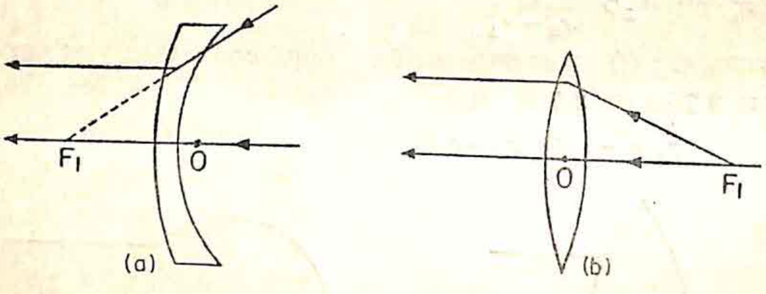
(iii) লেন্সটি পাতলা হইলে $t=0$ হইবে

$$\therefore \quad A_1O = A_2O = 0 \qquad \ldots (3.18)$$

অতএব A_1, A_2 এবং আলোক কেন্দ্র O তিনটি একই বিন্দু হইবে।

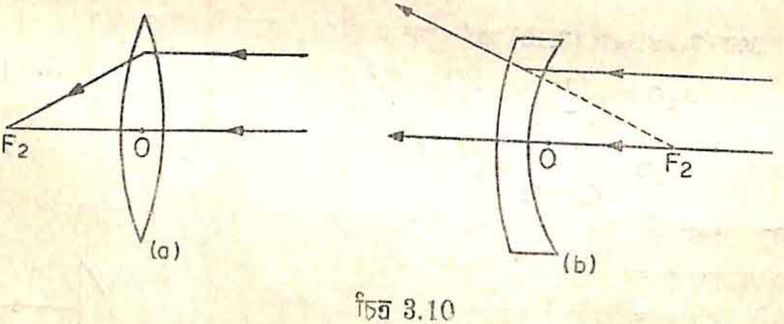
3.7 লেন্সের মুখ্য ফোকস (Principal focus of a lens)

প্রথম মুখ্য ফোকস বলিতে লেন্সের প্রধান অক্ষের উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দু বোঝায় যে বিন্দুতে অসদ্ বস্তু রাখিলে [চিত্র নং 3.9(*a*)] অথবা কোন সদ্ বস্তু রাখিলে [চিত্র নং 3.9(*b*)] উহার প্রতিবিম্ব অসীমে গঠিত হইবে।



চিত্র 3.9

দ্বিতীয় মুখ্য ফোকস বলিতে লেন্সের প্রধান অক্ষের উপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দু বোঝায় যে বিন্দুতে অসীমে অবস্থিত কোন বস্তুর সদ্ [চিত্র নং 3.10(*a*)] বা অসদ্ [চিত্র নং 3.10(*b*)] প্রতিবিম্ব গঠিত হইবে।

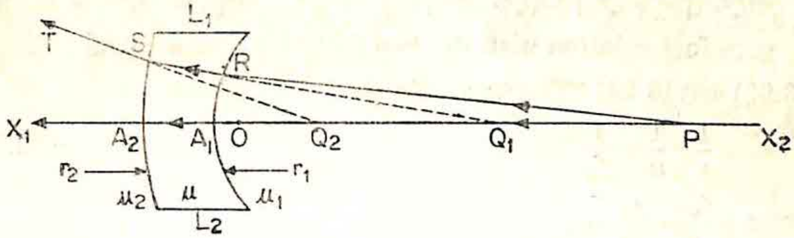


চিত্র 3.10

3.8 আলোক কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া লেন্সের অনুবন্ধী সম্পর্ক (Conjugate relation for a lens with optical centre as origin)

মনে করি, লেন্সের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ, উহার বামপাশের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ_2 এবং ডানপাশের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক μ_1. P বস্তু হইতে আগত PR এবং PA_1 রশ্মিদ্বয় লেন্সের প্রথম তল দ্বারা প্রতিসরণের পর Q_1 বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠন করে।

এক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $A_1P = OP = u$ (চিত্র নং 3.11) এবং প্রতিবিম্ব দূরত্ব $A_1Q_1 = OQ_1 = v_1$। এখানে আমরা ধরিয়া লইয়াছি যে লেন্সটি পাতলা। অতএব আলোক কেন্দ্র (O) এবং মেরুদ্বয় (A_1 ও A_2) একই বিন্দু।



চিত্র 3. 11

$$\therefore \quad \frac{\mu}{v_1} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu - \mu_1}{r_1} \qquad \cdots (3.19)$$

RS এবং A_1A_2 রশ্মি লেন্সের দ্বিতীয় তল হইতে পুনরায় প্রতিসৃত হইয়া Q_2 বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। এক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $= A_2Q_1 = OQ_1 = v_1$ এবং প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= A_2Q_2 = OQ_2 = v$

$$\therefore \quad \frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu}{v_1} = \frac{\mu_2 - \mu}{r_2} \qquad \cdots (3.20)$$

(3.19) এবং (3.20) সমীকরণদ্বয় যোগ করিয়া পাই

$$\frac{\mu_2}{v} - \frac{\mu_1}{u} = \frac{\mu - \mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2 - \mu}{r_2} \qquad \cdots (3.21)$$

যদি পারিপার্শ্বিক মাধ্যম বায়ু হয় তাহা হইলে $\mu_1 = \mu_2 = 1$

$$\therefore \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{\mu - 1}{r_1} + \frac{1 - \mu}{r_2}$$

অথবা
$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \cdots (3.22)$$

(3.22) সমীকরণ হইতে লেন্সের প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকস দূরত্ব পাওয়া যায় প্রথম ফোকস দূরত্ব f_1 হইলে উক্ত সমীকরণে $u = f_1$ এবং $v = \infty$ বসাইয়া পাই

$$-\frac{1}{f_1} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \cdots (3.23)$$

আবার দ্বিতীয় ফোকস দূরত্ব f_2 হইলে (3.22) সমীকরণে $u = \infty$ এবং $v = f_2$ বসাইয়া পাই

$$\frac{1}{f_2} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \cdots (3.24)$$

∴ (3.23) ও (3.24) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই

$$\frac{f_1}{f_2} = -1 \qquad \cdots(3.25)$$

3.9 লেন্সের দুই ফোকসকে মূলবিন্দু ধরিয়া অনুবন্ধী সম্পর্ক (Conjugate foci relation with the two foci of a lens as origin)

(3.22) এবং (3.24) সমীকরণদ্বয় হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f_2} \qquad \cdots(3.26)$$

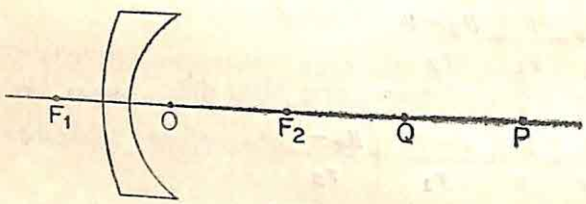
অথবা, $\frac{f_2}{v} - \frac{f_2}{u} = 1$

অথবা, $\frac{f_2}{v} + \frac{f_1}{u} = 1 \qquad \left(\because \frac{f_1}{f_2} = -1\right)$

অথবা, $uf_2 + vf_1 + f_1f_2 = uv + f_1f_2$

অথবা, $u(v - f_2) + f_1(f_2 - v) = f_1f_2$

অথবা, $(v - f_2)(u - f_1) = f_1f_2 \qquad \cdots(3.27)$



চিত্র .12

3.12 চিত্র হইতে $U = F_1P = F_1O + OP = (u - f_1)$

$V = F_2Q = OQ - OF_2 = (v - f_2)$

∴ (3.27) সমীকরণে U এবং V-এর মান বসাইয়া পাই

$$UV = f_1f_2 \qquad \cdots(3.28)$$

ইহাই লেন্সের দুই ফোকসকে মূলবিন্দু ধরিয়া অনুবন্ধী সম্পর্ক এবং ইহা নিউটনের সমীকরণ নামে পরিচিত।

3.10 লেন্সের ক্ষমতা এবং লেন্স সমন্বয়ের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য বলিতে কী বোঝায় (Meaning of power of a lens and equivalent focal length of a system of lenses)

(a) লেন্সের ক্ষমতা

লেন্সের ক্ষমতা বলিতে বোঝায় যে একটি রশ্মি লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত হওয়ার পর

কতখানি অভিসারী (উত্তল লেন্সের ক্ষেত্রে) বা অপসারী (অবতল লেন্সের ক্ষেত্রে) হইবে। লেন্সের ক্ষমতা উহার ফোকস দৈর্ঘ্যের সহিত ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়।

অর্থাৎ ক্ষমতা $P=\frac{1}{f}$ ...(3.29)

লেন্সের ক্ষমতার একক হইল ডাইঅপটার (**Dioptre**)। এক মিটার ফোকস দূরত্ব-সম্পন্ন লেন্সের ক্ষমতাকে এক ডাইঅপটার বলা হয়।

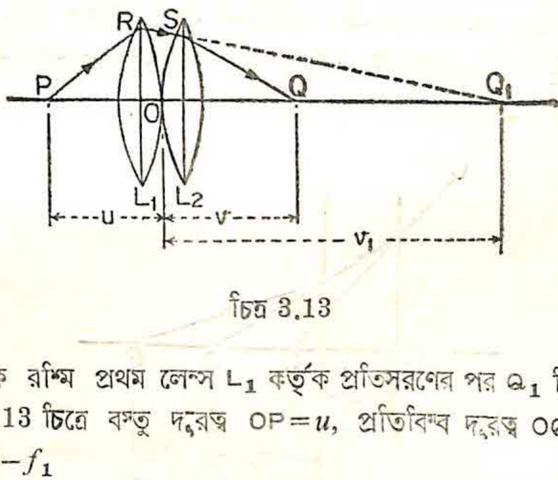
$\therefore \quad P=-\frac{100}{f}$ dioptre ...(3.30)

(b) তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য

একটি লেন্সকে একাধিক লেন্সের তুল্যাঙ্ক লেন্স বলা হইবে যখন উহা লেন্স সমন্বয় যে স্থানে এবং যে দৈর্ঘ্যের প্রতিবিম্ব গঠন করিবে সেই স্থানে একই দৈর্ঘ্যের প্রতিবিম্ব গঠন করিতে পারিবে। ঐ লেন্সের ফোকস দূরত্বকে তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য বলা হয়।

3.11 সংলগ্ন লেন্স সমবায়ের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য (Equivalent focal length of a combination of two lenses in contact)

মনে করি, f_1 এবং f_2 ফোকস দূরত্বসম্পন্ন দুইটি উত্তল লেন্স পরপর সংলগ্ন অবস্থায় আছে। f_1 এবং f_2 যথাক্রমে L_1 লেন্স এবং L_2 লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য।



চিত্র 3.13

PR আলোক রশ্মি প্রথম লেন্স L_1 কর্তৃক প্রতিসরণের পর Q_1 বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠন করে। 3.13 চিত্রে বস্তু দূরত্ব $OP=u$, প্রতিবিম্ব দূরত্ব $OQ_1=-v_1$ এবং ফোকস দৈর্ঘ্য $=-f_1$

$$\therefore \quad -\frac{1}{v_1}-\frac{1}{u}=-\frac{1}{f_1}$$

অথবা, $\frac{1}{v_1}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1}$ ...(3.31)

আবার, RS রশ্মি দ্বিতীয় লেন্স L_2 দ্বারা প্রতিসৃত হইয়া Q বিন্দুতে প্রতিবিম্ব

গঠন করে। এক্ষেত্রে বস্তুদূরত্ব $OQ_1 = -v_1$, প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= OQ = -v$ এবং ফোকস দৈর্ঘ্য $= -f_2$

$$\therefore \quad -\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}=-\frac{1}{f_2}$$

অথবা, $$\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v}=-\frac{1}{f_2} \qquad \cdots (3.32)$$

(3.31) সমীকরণ হইতে (3.32) সমীকরণ বিয়োগ করিলে পাই,

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \qquad \cdots (3.33)$$

মনে করি, তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য F

$$\therefore \quad -\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=-\frac{1}{F}$$

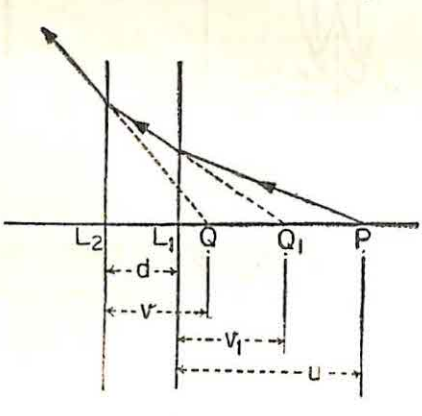
অথবা, $$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{F} \qquad \cdots (3.34)$$

(3.33) এবং (3.34) সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \qquad \cdots (3.35)$$

3.12 পরস্পর হইতে তফাতে রাখা লেন্স সমবায়ের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য (Equivalent focal length of two lenses kept separated)

মনে করি, f_1 এবং f_2 ফোকস দূরত্বের দুইটি লেন্স L_1 এবং L_2-কে d ব্যবধানে একই অক্ষের উপর রাখা হইয়াছে (চিত্র 3.14)।



চিত্র 3.14

বস্তু (P) প্রথম লেন্স হইতে u দূরে অবস্থিত। প্রতিবিম্ব দূরত্ব v_1 হইলে

$$\frac{1}{v_1}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1} \qquad \cdots (3.36)$$

অথবা, $\frac{u}{v_1}-1=\frac{u}{f_1}$ অর্থাৎ $\frac{u}{v_1}=\frac{u+f_1}{f_1}$

$\therefore \quad \frac{1}{m_1}=\frac{u}{v_1}=\frac{u+f_1}{f_1}$, যেখানে m_1 = প্রথম লেন্সের বিবর্ধন ... (3.37)

দ্বিতীয় লেন্স L_2-র ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব হইবে v_1, প্রতিবিম্ব দূরত্ব v হইলে

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{v_1+d}=\frac{1}{f_2}$$

অথবা, $\frac{v_1+d}{v}-1=\frac{v_1+d}{f_2}$

অথবা, $\frac{v_1+d}{v}=\frac{v_1+d+f_2}{f_2}$

অর্থাৎ দ্বিতীয় লেন্সের ক্ষেত্রে $\frac{1}{m_2}=\frac{v_1+d+f_2}{f_2}$ ... (3.38)

যেখানে, m_2 = দ্বিতীয় লেন্সের বিবর্ধন

$\therefore$ চূড়ান্ত বিবর্ধন $m=m_1m_2$

$$=\frac{f_1f_2}{(u+f_1)(v_1+d+f_2)} \quad \cdots (3.39)$$

অথবা, $m=\frac{f_1f_2}{u(f_1+f_2+d)+df_1+f_1f_2}$ ... (3.40)

মনে করি, তুল্যাঙ্ক লেন্সটি প্রথম লেন্স হইতে x দূরত্ব পিছনে বসানো হইল সুতরাং এক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $=u+x$

$\therefore \quad \frac{1}{\mathrm{V}}-\frac{1}{u+x}=\frac{1}{\mathrm{F}}$

অথবা, $\frac{u+x}{\mathrm{V}}-1=\frac{u+x}{\mathrm{F}}$

অথবা, $\frac{u+x}{\mathrm{V}}=\frac{\mathrm{F}+u+x}{\mathrm{F}}$

$\therefore$ তুল্যাঙ্ক লেন্সের বিবর্ধন $\mathrm{M}=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}+u+x}$ ...(3.41)

(3.40) এবং (3.41) সমীকরণদ্বয় হইতে লেখা যায়

$$\frac{\mathrm{F}}{u+x+\mathrm{F}}=\frac{f_1f_2}{u(f_1+f_2+d)+df_1+f_1f_2}$$

অথবা, $\frac{u}{\mathrm{F}}+\frac{x}{\mathrm{F}}+1=u\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{d}{f_1f_2}\right)+\frac{d}{f_2}+1$ ...(3.42)

এই সমীকরণ একটি অভেদ ; ইহার উভয় দিকের u-এর সহগ সমান হইবে

$\therefore \quad \frac{1}{\mathrm{F}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{d}{f_1f_2}$ ...(3.43)

এবং $\frac{x}{F}=\frac{d}{f_2}$ $\therefore$ $x=\frac{d}{f_2}\cdot F$ ...(3.44)

(3.43) সমীকরণ হইতে তুল্যাঙ্ক লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য এবং (3.44) সমীকরণ হইতে ঐ লেন্সের অবস্থান পাওয়া যায়।

3.12 উত্তল লেন্স এবং সদ্‌বিম্ব সংক্রান্ত কয়েকটি সমস্যা

(A few problems in connection with a convex lens and real image)

(i) **উত্তল লেন্স দ্বারা গঠিত সদ্‌বিম্ব এবং বস্তুর মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব, লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্যের চার গুণ (The least distance between an object and its real image formed by a convex lens is four times its focal length)**

মনে করি, লেন্সের কেন্দ্র হইতে বস্তু ও প্রতিবিম্বের দূরত্ব যথাক্রমে u ও v এবং বস্তু ও প্রতিবিম্বের দূরত্ব x.

$$\therefore \quad x=u+v \qquad \cdots(3.45)$$

প্রতিবিম্ব এবং বস্তুর দূরত্ব ন্যূনতম হইলে $\frac{dx}{du}=0$ হইবে।

(3.45) সমীকরণকে uএর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই

$$\frac{dx}{du}=1+\frac{dv}{du}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{du}=-1 \qquad \cdots(3.46)$$

আমরা জানি

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$$

উপরি-উক্ত সমীকরণকে 'u'-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই

$$-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{du}-\frac{1}{u^2}=0$$

অর্থাৎ, $$\frac{dv}{du}=-\frac{v^2}{u^2} \qquad \cdots(3.47)$$

(3.46) ও (3.47) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই

$$-\frac{v^2}{u^2}=-1 \qquad \text{অর্থাৎ} \quad v=u$$

সুতরাং,

$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ সমীকরণে $u=v$ বসাইয়া পাই

$$\frac{2}{u}=\frac{1}{f}$$

অথবা, $u=2f$ ...(3.48)

(3.48) সমীকরণ হইতে u-এর মান (3.45) সমীকরণে বসাইয়া পাই

$$x=4f$$

অর্থাৎ বস্তু ও প্রতিবিম্বের ভিতর ন্যূনতম দূরত্ব লেন্সটির ফোকস দৈর্ঘ্যের চার গুণের সমান হইবে।

(ii) উত্তল লেন্সের বস্তু এবং পর্দার ভিতর দুই অবস্থানের জন্য প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় (A convex lens can be placed in two positions between an object and a screen for each of which a sharp image can be formed)

মনে করি, বস্তু এবং পর্দার ভিতর দূরত্ব হইল d এবং বস্তু দূরত্ব হইল u. অতএব প্রতিবিম্ব দূরত্ব হইবে $v=(d-u)$

আমরা জানি, $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$

অথবা, $\frac{1}{d-u}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$

অথবা, $\frac{u+d-u}{u(d-u)}=\frac{1}{f}$

অথবা, $ud-u^2=df$

অথবা, $u^2-ud+fd=0$

অথবা, $u=\frac{d\pm\sqrt{d^2-4df}}{2}$ ...(3.49)

$d^2>4df$ হইলে u-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। অতএব লেন্সের দুই অবস্থানের জন্য আমরা পর্দায় প্রতিবিম্ব পাইব।

(iii) উপরি-উক্ত সমস্যায় লেন্সের দুই অবস্থানের ভিতর দূরত্ব x হইলে, লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য $f=\frac{d^2-x^2}{4d}$ হইবে (In the above problem, the focal length of the lens will be $f=\frac{d^2-x^2}{4d}$ where x is the displacement of the lens)

মনে করি, লেন্সের দুই অবস্থানে u-এর দুইটি মান হইল u_1 ও u_2.

(3.49) সমীকরণ হইতে পাই

$$u_1=\frac{d}{2}+\frac{\sqrt{d^2-4df}}{2} \text{ এবং } u_2=\frac{d}{2}-\frac{\sqrt{d^2-4df}}{2}$$

উদাহরণ (Examples)

1. 10 inch ব্যাসের একটি কাচের গোলকের এক পৃষ্ঠে অবস্থিত একটি চিহ্ন অপর পৃষ্ঠ হইতে সোজাসুজি কাচের ভিতর দিয়া দেখা হইল। কাচের প্রতিসরাঙ্ক 1·5 হইলে প্রতিবিম্বের অবস্থান বাহির কর।

(A mark placed on the surface of a glass sphere of radius 10 inch is viewed through glass from an opposite side. If the refractive index of the glass is 1·5, calculate the position of the image.)

আমরা জানি $\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$

এখানে $u=10$ inch

$\mu_1=1{\cdot}5$

$\mu_2=1$

$r=5$ inch

$\therefore \quad \frac{1}{v}-\frac{1{\cdot}5}{10}=\frac{-0{\cdot}5}{5}$

অথবা $\frac{1}{v}=0\ 15-0{\cdot}1=0{\cdot}05$

$\therefore \quad v=20$ cm

অতএব প্রতিবিম্ব অপর পৃষ্ঠ হইতে 20 cm দূরে অবস্থিত হইবে।

2. 8 cm ব্যাসযুক্ত একটি স্বচ্ছ গোলকের মধ্যে একটি বুদ্বুদ আছে। বুদ্বুদ এবং গোলকের কেন্দ্র একই সরলরেখায় রাখিয়া দেখিলে মনে হয় যেন বুদ্বুদটি গোলকের পৃষ্ঠ হইতে 2 cm দূরে আছে। বায়ু সাপেক্ষে কাচের প্রতিসরাঙ্ক 1·5 হইলে বুদ্বুদটির প্রকৃত দূরত্ব কত হইবে ?

(A small bubble in a glass sphere of 8 cm diameter appears when looked at so that the bubble and the centre of the sphere are in a straight line with the eye, to be 2 cm from the surface. If the refractive index of glass with respect to air be 1·5, find the true distance of the bubble.)

আমরা জানি

$$\frac{\mu_2}{v}-\frac{\mu_1}{u}=\frac{\mu_2-\mu_1}{r}$$

এখানে, $\mu_1 = 1{\cdot}5$

$\mu_2 = 1$

$v = 2$ cm

$r = 4$ cm

$$\therefore \quad \frac{1}{2} - \frac{1{\cdot}5}{u} = -\frac{0{\cdot}5}{4}$$

অথবা, $\frac{1{\cdot}5}{u} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

$$\therefore \quad u = \frac{1{\cdot}5 \times 8}{5} = 2{\cdot}4 \text{ cm}$$

∴ গোলকের পৃষ্ঠ হইতে বুদ্বুদটির প্রকৃত দূরত্ব হইল 2·4 cm.

3. একটি উভোত্তল লেন্সের বক্রতা-ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 50 cm এবং 100 cm ; লেন্সের উপাদানের প্রতিসরাঙ্ক $\frac{3}{2}$ হইলে উহার ফোকস দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

(The radii of curvature of a double convex lens are respectively 50 cm and 100 cm. If the material of the lens has R.I. $\frac{3}{2}$, what is its focal length ?)

আমরা জানি, উভোত্তল লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য

$$\frac{1}{f} = -(\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

এখানে, $r_1 = 50$ cm ; $r_2 = 100$ cm এবং $\mu = \frac{3}{2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{f} = -(1{\cdot}5 - 1)\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100}\right)$$

অথবা, $\frac{1}{f} = -0{\cdot}5 \times \frac{3}{100} = -\frac{3}{200}$

$$f = -66{\cdot}6 \text{ cm.}$$

4. বায়ু সাপেক্ষে কাচের এবং জলের প্রতিসরাঙ্ক যথাক্রমে 1·5 এবং 1·33 হইলে একটি কাচ লেন্সের বায়ুতে এবং জলে ফোকস দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত হইবে ?

(If the R.I. from air to glass and water are respectively 1·5 and 1·33, find the ratio of the focal lengths of a glass lens in water and in air.)

মনে করি, বায়ু এবং জলে লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য হইল যথাক্রমে f_1 এবং f_2

$$\frac{1}{f_1} = ({}_a\mu_g - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_2} = ({}_w\mu_g - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{{}_w\mu_g - 1}{{}_a\mu_g - 1} = \frac{({}_a\mu_g/{}_a\mu_w) - 1}{{}_a\mu_g - 1}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{9}{8} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{4}.$$

5. দেখাও যে বস্তু এবং পর্দার ভিতরে লেন্সের দুই অবস্থানে প্রতিবিম্বের আকার y_1 এবং y_2 হইলে বস্তুর সাইজ $y = \sqrt{y_1 y_2}$ হইবে।

(Show that if the sizes of the images in the two positions of the lens be y_1 and y_2, then the size of the object will be $y = \sqrt{y_1 y_2}$.)

মনে করি, লেন্সের দুই অবস্থানে বস্তু এবং প্রতিবিম্বের দূরত্ব যথাক্রমে u_1 ও u_2 এবং v_1 ও v_2.

বস্তু এবং পর্দার ভিতর দূরত্ব d হইলে

$$m_1 = \frac{y_1}{y} = \frac{v_1}{u_1} = \frac{d - u_1}{u_1}$$

এবং $m_2 = \frac{y_2}{y} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{d - u_2}{u_2}$

$$\therefore \quad \frac{y_1 y_2}{y^2} = \frac{(d - u_1)(d - u_2)}{u_1 u_2}$$

$$= \frac{d^2 - d(u_1 + u_2) + u_1 u_2}{u_1 u_2}$$

$$= \frac{d^2 - d\, u_1 + v_1) + u_1 u_2}{u_1 u_2} \qquad (\because \quad u_2 = v_1)$$

$$= \frac{d^2 - d^2 + u_1 u_2}{u_1 u_2} \qquad (\because \quad u_1 + v_1 = d)$$

$$= 1$$

$\therefore \quad y^2 = y_1 y_2$ অতএব $y = \sqrt{y_1 y_2}$

6. 15 cm ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি উত্তল লেন্সকে 9 cm ফোকাস দৈর্ঘ্যের একটি অবতল লেন্সের সংস্পর্শে রাখিয়া সমাবন্ধ গঠন করা হইল। ঐ সমাবন্ধের তুল্যমান ফোকাস দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

(A convex lens of 15 cm focal length is combined with a

concave lens of 9 cm focal length. Find the equivalent focal length of the combination.)

আমরা জানি, $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$

এখানে, $f_1=-15$ cm ; $f_2=9$ cm

$\therefore \quad \frac{1}{F}=-\frac{1}{15}+\frac{1}{9}$

$=\frac{2}{45}$

$\therefore \quad F=22\cdot5$ cm.

7. 20 cm এবং 40 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের দুইটি উত্তল লেন্স একই অক্ষের উপর পরস্পর হইতে 15 cm ব্যবধানে রাখা আছে। উহাদের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য এবং তুল্যাঙ্ক লেন্সের অবস্থান বাহির কর।

(Find the equivalent focal length and the position of the equivalent lens of a combination of two convex lenses of 20 cm and 40 cm focal lengths placed co-axially 10 cm apart.)

আমরা জানি, $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{a}{f_1 f_2}$

এক্ষেত্রে $f_1=20$ cm ; $f_2=40$ cm এবং $a=10$ cm

$\therefore \quad \frac{1}{F}=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}-\frac{10}{20\times40}$

$=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}-\frac{1}{80}$

$=\frac{4+2-1}{80}$

$=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$

$\therefore \quad F=16$ cm

আবার $x=\frac{a}{f_2}\cdot F=\frac{10}{40}\cdot 16=4$ cm

অতএব প্রথম লেন্সের পশ্চাতে 4 cm দূরে তুল্যাঙ্ক লেন্স বসাইতে হইবে।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. f_1 ও f_2 ফোকস দৈর্ঘ্যের দুইটি পাতলা উত্তল লেন্সকে বায়ুর মধ্যে সমাক্ষীয়ভাবে পরস্পর হইতে d ব্যবধানে রাখা হইয়াছে। দেখাও যে, উহাদের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য F নিম্নলিখিত সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1f_2}$$

(Two co-axial thin lenses of focal lengths f_1 and f_2 are separated by a distance d in air. Show that their equivalent focal length F is given by the following relation $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1f_2}$.)

(C. U. '65)

2. একটি পাতলা লেন্সের 'মুখ্য ফোকসদ্বয়' এবং 'অনুবন্ধী ফোকসদ্বয়' বলিতে কী বোঝ ব্যাখ্যা কর। আলোক কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া একটি পাতলা লেন্সের অনুবন্ধী ফোকসদ্বয়ের ভিতর সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর এবং ইহা হইতে মুখ্য ফোকসদ্বয়কে মূলবিন্দু ধরিয়া অনুবন্ধী ফোকসদ্বয়ের ভিতর সম্পর্ক নির্ধারণ কর।

(Explain the terms 'principal foci' and 'conjugate foci' of a thin lens. Derive the conjugate foci relation for a thin lens with the optical centre as the origin and hence find out the conjugate foci relation with the principal foci as origin s.)

(C. U. '66)

3. একটি গোলীয় তলে প্রতিসরণের ক্ষেত্রে $\frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r}$ এই সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠা কর এবং ইহা হইতে $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ এই সূত্রটি প্রতিষ্ঠা কর, যেখানে প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থ বহন করিতেছে।

(Deduce the relation $\frac{\mu}{v}-\frac{1}{u}=\frac{\mu-1}{r}$, for refraction at a spherical surface and hence deduce the formula $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$, where symbols have usual meaning.)

(C. U. '63)

4. দেখাও যে একটি পাতলা লেন্সে আলোর প্রতিসরণ হইলে $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ হইবে।

(Show that for refraction of light through a thin lens, the relation $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$ will hold.)

5. দুইটি সংলগ্ন পাতলা উত্তল লেন্স-সমন্বয়ের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্যের রাশিমালা নির্ধারণ কর।

(Find an expression for the equivalent focal length of two thin convex lenses in contact.) (C. U. '80)

6. 20 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের একটি পাতলা উত্তল লেন্স হইতে 60 cm দূরে একটি বস্তু রাখা হইয়াছে। প্রথম লেন্স হইতে 10 cm দূরত্বে 30 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের আর একটি পাতলা উত্তল লেন্স রাখা হইল। দ্বিতীয় লেন্স হইতে চূড়ান্ত প্রতিবিম্বের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(An object is placed at a distance 60 cm from a thin convex lens of focal length 20 cm. There is a second thin convex lens of 30 cm. focal length, 10 cm away from the first. Calculate the distance of the final image from the second lens.) (C. U. '65)

[Ans. 12 cm)

7. 25 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের একটি সমোত্তল লেন্স 1·520 প্রতিসরাঙ্কের কাচ দ্বারা তৈরী। উত্তল পৃষ্ঠের বক্রতা-ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(A plano-convex lens of focal length 25 cm is made of glass of refractive index 1·520. Find the radius of curvature of the convex surface.) (C. U. '74) [Ans. 13 cm)

8. 10 cm ও 15 cm ফোকস-দৈর্ঘ্যের দুইটি উত্তল লেন্স সমাক্ষীয়ভাবে পরস্পর হইতে 2 cm ব্যবধানে রাখা আছে। 10 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের লেন্সের সম্মুখে 12 cm দূরে একটি বস্তু রাখা হইল। চূড়ান্ত প্রতিবিম্বের অবস্থান নির্ণয় কর।

(Two co-axial convex lenses of focal length 10 cm and 15 cm are separated by a distance of 2 cm. An object is placed at a distance of 12 cm in front of the 10 cm lens. Calculate the position of the final image.) (C. U. '75) [Ans. 11·91 cm]

9. কোন উত্তল লেন্স উহার দুই অবস্থানে পর্দার উপরে কোন বস্তুর 1 cm এবং 4 cm দীর্ঘ দুইটি প্রতিবিম্ব গঠন করিলে বস্তুর দৈর্ঘ্য কত হইবে?

(What will be the length of the object, if images of 1 cm and 4 cm length are formed on the screen for two positions of the lens ?) [Ans. 2 cm]

10. 1·5 প্রতিসরাঙ্কের একটি সমোত্তল কাচের লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য কত হইবে, যদি উহার যে কোনো বক্রতলের ব্যাসার্ধ 20 cm হয় ?

(What will be the focal length of an equi-convex glass lens of refractive index 1·5, if the radius of curvature of one of its surfaces is 20 cm ?) (C. U. '78) [Ans. 20 cm]

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

প্রতিবিম্ব গঠনের ত্রুটি এবং তাহা দূরীকরণ

(Defects of image and their remedy)

4.1 সূচনা (Introduction)

প্রতিফলন এবং প্রতিসরণের সূত্রাবলী সাধারণত উপাক্ষীয় রশ্মির (paraxial ray) ক্ষেত্রে সত্য হয়। সুতরাং বিন্দুপ্রভ বস্তু (point object) অক্ষের উপর অবস্থিত হইলে উহার যে প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় তাহা ত্রুটিমুক্ত হয়। লেন্স ও দর্পণ দ্বারা গঠিত প্রতিবিম্ব ত্রুটিমুক্ত হয় না। প্রতিবিম্বের আকারের নানা প্রকার বিকৃতি দেখা যায়। আপতিত রশ্মি অক্ষানুসারী না হওয়ায় এই অবাঞ্ছিত ত্রুটি হয়। এই ত্রুটিকে বিপথন বা অপেরণ (aberration) বলা হয়। ইহা সাধারণত দুই ভাগে বিভক্ত—

(*a*) একবর্ণী বিপথন বা এক-বর্ণাপেরণ (monochromatic aberration)

এবং (*b*) বর্ণবিপথন বা বর্ণাপেরণ (chromatic aberration)

এক-বর্ণাপেরণ আবার পাঁচভাগে বিভক্ত

(i) গোলাপেরণ বা গোলীয় বিপথন (spherical aberration)

(ii) কোমা (coma)

(iii) বিষমদৃষ্টি বা অবিন্দুকত্ব (astigmatism)

(iv) বক্রতা (curvature)

(v) বিকৃতি (distortion)

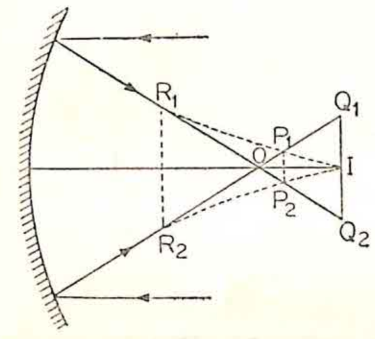
এখানে আমরা শুধু গোলীয় বিপথন এবং বর্ণবিপথন সম্পর্কে আলোচনা করিব।

4.2 গোলীয় বিপথন (Spherical aberration)

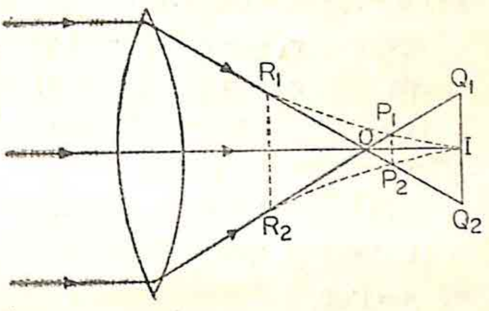
মনে করি, একগুচ্ছ সমান্তরাল রশ্মি প্রতিফলক তলে (চিত্র 4.1) বা প্রতিসরাঙ্ক তলে (চিত্র 4.2) আপতিত হইল। যে সমস্ত রশ্মি অক্ষানুসারী বা উপাক্ষীয় (paraxial) হইবে তাহারা প্রতিফলন (চিত্র 4.1) বা প্রতিসরণের (চিত্র 4.2) পর I বিন্দু দিয়া যাইবে। অন্যান্য প্রান্তীয় রশ্মি (marginal rays) R বিন্দু দিয়া যাইবে। সুতরাং অসীমে অবস্থিত কোন বস্তুর বিন্দু প্রতিবিম্ব (point image) পাওয়া যাইবে না। বিম্ব গঠনের এই ত্রুটিকে গোলীয় বিপথন বলা হয়।

অক্ষের সহিত অভিলম্বভাবে অবস্থিত কোন পর্দা (screen) R_1R_2-এ রাখিলে উজ্জ্বল বৃত্তীয় কিনারা (bright circular edge) ও অস্পষ্ট কেন্দ্র পাওয়া যাইবে। কিন্তু পর্দাকে Q_1Q_2-তে রাখিলে উজ্জ্বল কেন্দ্র এবং বৃত্তীয় কিনারা পাওয়া যাইবে।

পর্দার অবস্থান P_1P_2 হইলে বৃত্তাকার উজ্জ্বল আলোকপ্রভ (illumination) পাওয়া যাইবে। এই বৃত্তকে ন্যূনতম বিকৃতির বৃত্ত (circle of least confusion) বলা হয়। ইহাই বিম্বের নিকটতম অনুরূপ (nearest approach)। OI-কে অনুদৈর্ঘ্য



চিত্র 4.1



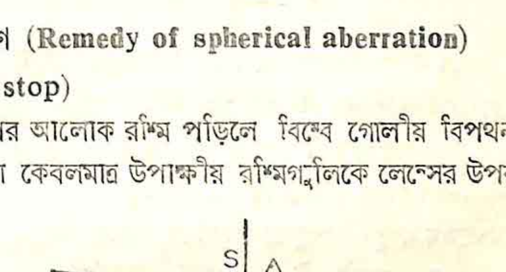
চিত্র 4.2

(longitudinal) গোলীয় বিপথন এবং ন্যূনতম বিকৃতি বৃত্তের ব্যাসার্ধ ($P_1P_2/2$) কে পার্শ্বীয় বা অনুপ্রস্থ (lateral) গোলীয় বিপথন বলা হয়।

4.3 গোলীয় বিপথন দূরীকরণ (Remedy of spherical aberration)

(a) স্টপ দ্বারা (By using a stop)

লেন্স বা দর্পণের সমগ্র তলের উপর আলোক রশ্মি পড়িলে বিম্বে গোলীয় বিপথন ত্রুটি দেখা যায়। স্টপ ব্যবহার করিয়া কেবলমাত্র উপাক্ষীয় রশ্মিগুলিকে লেন্সের উপর আপতিত করানো হয়। সমস্ত প্রান্তীয় রশ্মিকে স্টপ দ্বারা লেন্সের উপর পড়িতে বাধা দেওয়া হয় (চিত্র 4.3)। সুতরাং লেন্সের কেন্দ্রের কাছে খানিকটা উন্মুক্ত রাখিয়া বাকী জায়গা পর্দা (screen) দ্বারা ঢাকিয়া দেওয়া হয়।



চিত্র 4.3

(b) লেন্সের দুই বক্রতাতল উপযুক্ত ব্যাসার্ধ অনুসারে তৈরী করিয়া (By usingsuitable radii of curvature of the two surfaces of a lens)

সমান্তরাল উপাক্ষীয় আলোক রশ্মি ন্যূনতম গোলীয় বিপথন উৎপন্ন করিবে যদি লেন্সের বক্রতা ব্যাসার্ধদ্বয় নিম্নলিখিত সমীকরণ মানিয়া চলে।

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{2\mu^2-\mu-4}{\mu(2\mu+1)} \qquad \cdots(4.1)$$

যেখানে μ হইতেছে মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক।

(i) মনে করি, লেন্সটি সমোত্তল (plano-convex) এবং আপতিত রশ্মি বক্রতলের উপর আপতিত হইল (চিত্র 4.4)।

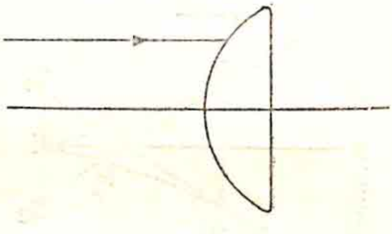
এক্ষেত্রে $r_1=-r \qquad \cdots (4.2)$

এবং $r_2=\infty \qquad \cdots (4.3)$

(4.2) এবং (4.3) শর্তদ্বয় (4.1) সমীকরণে বসাইলে আমরা পাই

$$2\mu^2-\mu-4=0 \qquad \cdots (4.4)$$

(4.4) সমীকরণ সমাধান করিলে আমরা পাই $\mu=1{\cdot}69$



চিত্র 4.4

সুতরাং যদি কোন সমোত্তল লেন্সের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক 1·69 হয়, তবে উহা ন্যূনতম আলোর গোলীয় বিপথন উৎপন্ন করিবে।

(ii) যদি মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক $\mu=1{\cdot}5$ হয় তাহা হইলে (4.1) সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$\frac{r_1}{r_2}=-\frac{1}{6} \qquad \cdots(4.5)$$

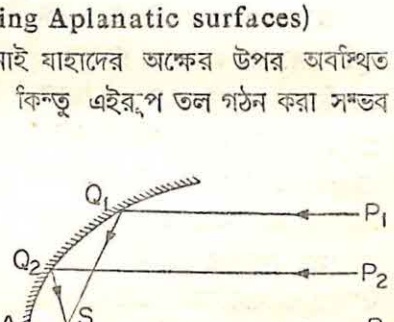
(4.5) সমীকরণের ঋণাত্মক চিহ্ন হইতে বোঝা যায় যে ন্যূনতম গোলীয় বিপথনের জন্য লেন্সকে উভোত্তল (double convex) বা উভাবতল (double concave) হইতে হইবে।

(c) অবিপথী তল ব্যবহার করিয়া (By using Aplanatic surfaces)

এমন কোন প্রতিফলক বা প্রতিসারক তল নাই যাহাদের অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুসম বস্তুর বিন্দুসম প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। কিন্তু এইরূপ তল গঠন করা সম্ভব যাহাদের অক্ষের উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে বস্তু রাখিলে ত্রুটিমুক্ত প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। এই ধরণের তলকে অবিপথী (aplanatic) তল বলা হয়।

(i) অধিবৃত্তাভ বা পরবলয়জ দর্পণ (Paraboloidal mirror)

4.5 চিত্রে অধিবৃত্তাভ দর্পণ দেখানো হইয়াছে। S হইতেছে অধিবৃত্তের ফোকস বিন্দু এবং AB হইতেছে প্রধান অক্ষ। প্রধান অক্ষের সমান্তরাল আলোক রশ্মি দর্পণের উপর পড়িলে উহারা S বিন্দুতে মিলিত হইবে। সুতরাং অসীমে অবস্থিত কোন বাস্তব গোলীয় বিপথন মুক্ত বিম্ব S বিন্দুতে গঠিত হইবে।



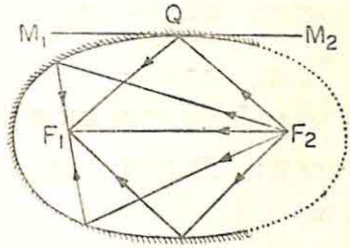
চিত্র 4.5

(ii) গোলাভ বা উপবৃত্তাকার দর্পণ (Ellipsoidal mirror)

F_1 এবং F_2 হইল উপবৃত্তের দুইটি ফোকস বিন্দু। সুতরাং যে কোন বিন্দু Q-তে অঙ্কিত স্পর্শক F_1 এবং F_2 বিন্দুতে একই কোণ উৎপন্ন করিবে (চিত্র 4.6)।

$\therefore \quad \angle M_1QF_1 = \angle M_2QF_2$

অতএব F_1 বিন্দুতে একটি বিন্দুপ্রভ (point source) থাকিলে F_2 বিন্দুতে উহার প্রতিবিম্ব গঠিত হইবে। অনুরূপে উৎসকে F_2 বিন্দুতে রাখিলে F_1 বিন্দুতে উহা ত্রুটিহীন প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। সুতরাং F_1 ও F_2 হইল দুইটি অবিপথী (aplanatic) বিন্দু।

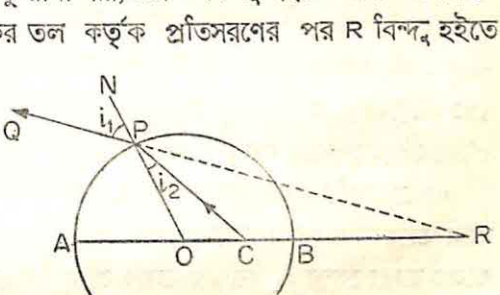


চিত্র 4.6

(iii) বিকৃতিমুক্ত গোলতল (Spherical aplanatic surface)

মনে করি APB একটি গোলক। উহার ব্যাসার্ধ AO ($=r$) এবং পারিপার্শ্বিকের (surrounding) সাপেক্ষে গোলকের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক হইল μ.

যদি O বিন্দুতে একটি বিন্দুসম বস্তু রাখা যায়, তবে O বিন্দু হইতে আগত অপসারী রশ্মিগুচ্ছ (divergent rays) গোলকের তল কর্তৃক প্রতিসরণের পর R বিন্দু হইতে অপসৃত হইতেছে বলিয়া মনে হইবে। এখানে $CO = r/\mu$; O বিন্দু হইতে R বিন্দুর দূরত্ব $OR = \mu r$ । সুতরাং কেন্দ্র হইতে প্রতিবিম্বের দূরত্ব আপতন কোণের উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব প্রতিবিম্ব R গোলীয় বিপথন মুক্ত হইবে। C এবং R হইতেছে গোলকের দুইটি অবিপথী বিন্দু।



চিত্র 4.7

প্রমাণ : চিত্র 4.7 হইতে প্রতিসরণের সূত্রানুযায়ী আমরা লিখিতে পারি

$$\sin i_1 = \mu \sin i_2 \qquad \cdots (4.6)$$

ΔPOC হইতে পাই

$$\frac{\sin PCO}{r} = \frac{\sin i_2}{OC}$$

অথবা, $$\frac{\sin PCO}{\sin i_2} = \frac{r}{OC} = \frac{r}{r/\mu} = \mu \qquad \cdots (4.7)$$

আবার, $\angle PCO = \angle PRO + \angle RPC$

অথবা, $i_1 = \angle PRO + (i_1 - i_2)$

অথবা, $i_2 = \angle PRO$ $\cdots (4.8)$

$$\triangle POR\text{-এ } \frac{\sin OPR}{\sin PRO} = \frac{OR}{OP}$$

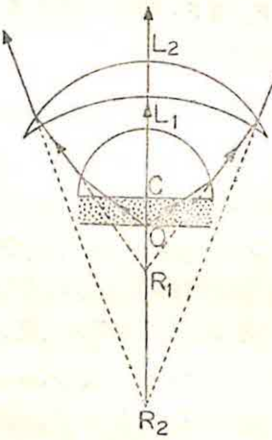
অথবা, $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2} = \dfrac{OR}{r}$

অথবা, $OR = \mu r$ $\cdots (4.9)$

সুতরাং প্রতিবিম্ব দূরত্ব OR আপতন কোণের উপর নির্ভর করে না।

ব্যবহার : এই নীতি প্রয়োগ করিয়া অ্যাবের সমসত্ত্ব নিমজ্জন অণুবীক্ষণের অভিলক্ষ্য (Abbe's homogeneous objective) গঠন করা হয়। 4.8 চিত্রে অ্যাবের অভিলক্ষ্য চিত্র দেখান হইয়াছে।

অণুবীক্ষণের অভিলক্ষ্য হইল একটি অর্ধগোলীয় (hemispherical) লেন্স। ইহার সমতল তল বস্তু O-র দিকে থাকে। একটি পাতলা কাচের প্লেট বস্তুর উপর থাকে। অভিলক্ষ্য এবং কাচের প্লেটের মধ্যে cedar wood oil (প্রতিসরাঙ্ক 1·5) -এর একটি ফোটা থাকে। যদি বস্তু দূরত্ব $CO = r/\mu$ হয়, R বিন্দুতে উহার প্রতিবিম্ব গঠিত হইবে যেখানে $CR_1 = \mu r$.



চিত্র 4.8

অপর একটি অবতলোত্তল লেন্স L_2-কে এমন ভাবে রাখা হয় যাহাতে লেন্সের নিচের তলের বক্রতা কেন্দ্র I_1 হয়। আলোক রশ্মি এই লেন্স কর্তৃক প্রতিসৃত হওয়ায় মনে হইবে যেন R_2 বিন্দু হইতে অপসৃত হইতেছে।

R_1 এবং R_2 হইল দুইটি অবিপথী বিন্দু।

4.4 বর্ণবিপথন (Chromatic aberration)

লেন্সের ফোকস দূরত্ব নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়,

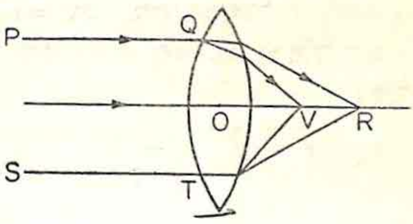
$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \cdots (4.10)$$

যদি μ_r এবং μ_v যথাক্রমে লাল ও বেগুনী বর্ণের জন্য লেন্সের মাধ্যমের প্রতিসরাঙ্ক হয়, তবে ঐ বর্ণগুলির জন্য লেন্সের ফোকস দূরত্ব যথাক্রমে $\dfrac{1}{f_r} = (\mu_r - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$ এবং $\dfrac{1}{f_v} = (\mu_v - 1)\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$ হইবে।

যেহেতু $\mu_r < \mu_v$, $f_r > f_v$ হইবে। সুতরাং লেন্সের সামনে একটি সাদা বস্তু রাখিলে উহা বিভিন্ন বর্ণের প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। এই প্রতিবিম্বগুলির আকৃতি ও অবস্থান বিভিন্ন হইবে। যদি একটি পর্দা এমনভাবে রাখা হয় যে উহাতে কেবলমাত্র একটি বর্ণের প্রতিবিম্ব পড়িবে তাহা হইলে অন্য বর্ণের প্রতিবিম্বগুলি পর্দার উপর পড়িবে না। সেইজন্য প্রতিবিম্ব সাদা হইবে না। প্রতিবিম্ব গঠনের এই ত্রুটি-ই বর্ণবিপথন নামে পরিচিত। বর্ণবিপথন সাধারণত দুই প্রকারের হয়—(a) অক্ষীয় বর্ণবিপথনের ত্রুটি (axial chromatic error) এবং (b) পার্শ্বীয় বর্ণবিপথনের ত্রুটি (lateral chromatic error)।

(a) অক্ষীয় বর্ণবিপথন : আলোক রশ্মির বর্ণ বা তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনের সাথে প্রতিবিম্ব দূরত্ব পরিবর্তনকে অর্থাৎ $\delta v/\delta\lambda$-কে অক্ষীয় বর্ণবিপথন বলা হয়।

(i) সমান্তরাল রশ্মির ক্ষেত্রে—4.9 চিত্রে, সমান্তরাল রশ্মি PQ অক্ষের সহিত সমান্তরালভাবে লেন্সের উপর Q বিন্দুতে আপতিত হইয়াছে। প্রতিসরণের পর বেগুনী বর্ণের রশ্মিগুলি V বিন্দুতে এবং লাল বর্ণের রশ্মিগুলি R বিন্দুতে মিলিত হইবে। লাল ও বেগুনী রশ্মির জন্য লেন্সের ফোকস দূরত্ব যথাক্রমে f_r (=OR) এবং f_v (=OV) হইবে।



চিত্র 4.9

$$\therefore \text{ অক্ষীয় বর্ণবিপথন} = f_r - f_v \quad \cdots (4.11)$$

মনে করি, হলুদ বর্ণের ফোকস দূরত্ব হইল f

$$\therefore \frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \cdots (4.12)$$

এখন
$$\frac{1}{f_v} - \frac{1}{f_r} = (\mu_v - \mu_r)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$
$$= (\mu_v - \mu_r)\frac{1}{f(\mu - 1)} \quad \text{[(4.12) সমীকরণ দ্বারা]}$$
$$= \frac{\omega}{f} \quad \cdots (4.13)$$

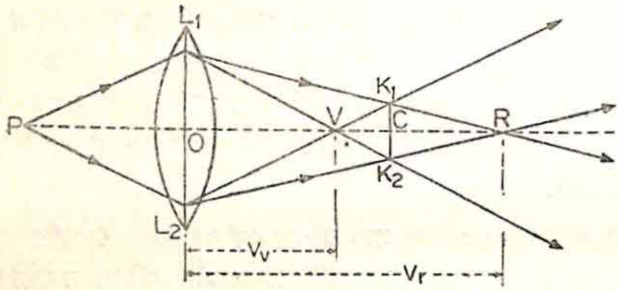
যেখানে $\omega = \dfrac{\mu_v - \mu_r}{\mu - 1}$ = লেন্সের বর্ণ বিচ্ছুরণ ক্ষমতা

$$\therefore \frac{f_r - f_v}{f_r f_v} = \frac{\omega}{f}$$

অথবা $f_r - f_v = \omega f$ ($f_r f_v = f^2$ ধরিয়া)

সুতরাং অক্ষীয় বর্ণবিপথন $= \omega f$ $\cdots (4.14)$

(ii) রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল না হইলে—4.10 চিত্রে রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল না হইলে L_1L_2 লেন্স দ্বারা প্রতিসৃত হওয়ার পর বেগুনী বর্ণের রশ্মিগুচ্ছ V বিন্দুতে এবং লালবর্ণের রশ্মিগুচ্ছ R বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠন করিবে।



চিত্র 4.10

অক্ষীয় বর্ণবিপথন (OR − OV $= v_r - v_v$ ... (4.15)

মনে করি v_v, v_r এবং v হইল যথাক্রমে বেগুনী, লাল ও হলুদ বর্ণের প্রতিবিম্ব দূরত্ব।

সুতরাং $\dfrac{1}{v_v} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f_v}$; $\dfrac{1}{v_r} - \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{f_r}$

$\therefore \dfrac{1}{v_v} - \dfrac{1}{v_r} = \dfrac{1}{f_v} - \dfrac{1}{f_r} = \dfrac{\omega}{f}$

$\therefore v_r - v_v = \dfrac{\omega}{f} \,.\, v^2$ ($v_r \,.\, v_v = v^2$ ধরিয়া) ... (4.16)

4.10 চিত্রে $\triangle L_1L_2R$ এবং $\triangle K_1K_2R$ পরস্পর সদৃশ (similar)

$\therefore \dfrac{L_1L_2}{K_1K_2} = \dfrac{OR}{CR} = \dfrac{v_r}{CR}$ ... (4.17)

আবার, $\triangle L_1L_2V$ এবং $\triangle K_1K_2R$ পরস্পর সদৃশ

$\dfrac{L_1L_2}{K_1K_2} = \dfrac{OV}{CV} = \dfrac{v_v}{CV}$ ... (4.18a)

(4.17) এবং (4.18) সমীকরণদ্বয় হইতে পাই

$\dfrac{L_1L_2}{K_1K_2} = \dfrac{v_r + v_v}{CR + CV} = \dfrac{v_r + v_v}{v_r - v_v}$

বা, $\dfrac{L_1L_2}{K_1K_2} = \dfrac{2v}{v_r - v_v} = \dfrac{2f}{\omega v}$ ($v_r + v_v = 2v$ ধরিয়া সমীকরণ (4.16) এর সাহায্যে) ... (4.18b)

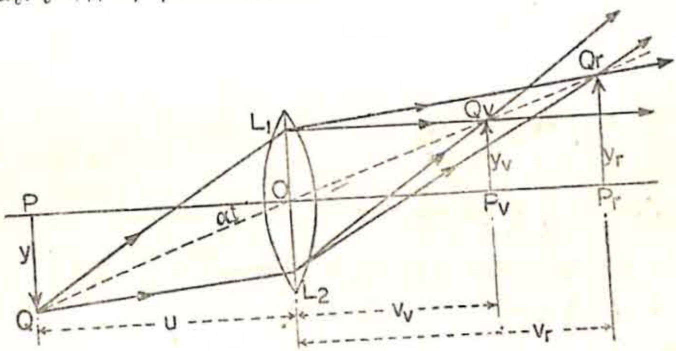
$\therefore K_1K_2 = \dfrac{\omega v}{2f} \,.\, d$ যেখানে d হইল লেন্সের ব্যাস।

অতএব অল্পতম বর্ণবিপথন বৃত্তের ব্যাস $= \frac{\omega v}{2f} \cdot d$ … (4.19)

(b) পার্শ্বীয় বা তির্যক বর্ণবিপথনের ত্রুটি :

আলোক রশ্মির বর্ণের বা তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনের সহিত প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনকে অর্থাৎ $\frac{dy}{d\lambda}$-কে পার্শ্বীয় বর্ণবিপথন বলা হয়।

মনে করি, একটি সাদা বস্তু (white object) PQ-কে লেন্স হইতে u (= OP) দূরত্বে লেন্সের প্রধান অক্ষের উপর রাখা হইয়াছে। ফলে বেগুনী ও লাল বর্ণের প্রতিকৃতি Q_vP_v এবং Q_rP_r গঠিত হইয়াছে।



চিত্র 4.11

এক্ষেত্রে অক্ষীয় বর্ণবিপথন $= v_r - v_v$

পার্শ্বীয় বর্ণবিপথন $= y_r - y_v$

4.11 চিত্র হইতে পাই

$$\frac{y_r}{y} = \frac{v_r}{u} \quad \text{এবং} \quad \frac{y_v}{y} = \frac{v_v}{u} \qquad \cdots (4.20)$$

অথবা, $\frac{y_r - y_v}{y} = \frac{v_r - v_v}{u} = \frac{\omega v^2}{fu}$ (4.18b সমীকরণ ব্যবহার করিয়া)

$$\therefore \quad y_r - y_v = \frac{y}{u} \times \frac{\omega v^2}{f} = \frac{\omega v^2}{f} \tan \alpha \qquad \cdots (4.21)$$

যদি আপতিত রশ্মি সমান্তরাল হয় ($\alpha = 0$) অর্থাৎ বস্তু অসীমে অবস্থিত হয়, তবে পার্শ্বীয় বর্ণবিপথন ঘটিবে না। আবার বিন্দুসম বস্তুর ক্ষেত্রেও প্রতিবিম্ব পার্শ্বীয় বর্ণবিপথন মুক্ত হইবে।

4.5 দুইটি সংলগ্ন লেন্স সমাবন্ধের অবার্ণতার শর্ত (Condition of achromatism of two lenses in contact)

মনে করি, f_1 এবং f_2 হইল লেন্স দুইটির ফোকস দূরত্ব এবং λ উহার তরঙ্গ দৈর্ঘ্য, যাহা λ_r ও λ_v তরঙ্গ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বর্ণের মধ্যবর্তী বর্ণ।

যদি মধ্যবর্তী বর্ণের জন্য লেন্স সমাবন্ধের তুল্যমান ফোকস দূরত্ব (equivalent focal length) F হয়,

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \qquad \cdots (4.22)$$

এবং
$$\frac{1}{F}=\frac{1}{u}-\frac{1}{v} \qquad \cdots (4.23)$$

যেখানে u এবং v হইল মধ্যবর্তী বর্ণের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব।

অপর দুইটি বর্ণ একই জায়গায় প্রতিবিম্ব গঠন করিলে উহা অক্ষীয় বর্ণবিপথন মুক্ত হইবে। সুতরাং $\frac{\delta v}{\delta \lambda}=0$ হইবে। (4.23) সমীকরণকে λ-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই,

$$-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\delta v}{\delta\lambda}=\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{F}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{F}\right)=0 \qquad \cdots (4.24)$$

আবার (4.22) সমীকরণকে λ-র সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই

$$\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{F}\right)=\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)=0$$

অথবা,
$$\delta\left(\frac{1}{f_1}\right)+\delta\left(\frac{1}{f_2}\right)=0 \qquad \cdots (4.25)$$

কিন্তু
$$\frac{1}{f_1}=(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad \cdots (4.26)$$

$$\therefore \quad \delta\left(\frac{1}{f_1}\right)=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cdot\delta\mu_1$$

$$=\frac{\delta\mu_1}{(\mu_1-1)f_1} \quad [\text{ 4.26 সমীকরণ হইতে }]$$

$=\frac{\omega_1}{f_1}$ যেখানে $\omega_1=\frac{\delta\mu_1}{\mu_1-1}$ = প্রথম লেন্সের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা।

অনুরূপে আমরা লিখিতে পারি $\delta\left(\frac{1}{f_2}\right)=\frac{\omega_2}{f_1}$

সুতরাং (4.25) সমীকরণে $\delta\left(\frac{1}{f_1}\right)$ এবং $\delta\left(\frac{1}{f_2}\right)$-র মান বসাইলে পাওয়া যায়

$$\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}=0 \qquad \cdots (4.27)$$

এখন বিবর্ধন $m=\frac{v}{u}$ হওয়ায় প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্যও অপরিবর্তিত থাকিবে। অতএব (4.27) শর্ত পালিত হইলে অক্ষীয় এবং পার্শ্বীয় বর্ণবিপথন উভয়ই দূরীভূত হইবে।

আলোচনা : (a) লেন্সদ্বয়ের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা ω_1 এবং ω_2 সর্বদাই ধনাত্মক হইবে। অতএব f_1 ও f_2 বিপরীত চিহ্নযুক্ত হওয়া একান্ত প্রয়োজন। সেইজন্য একটি উত্তল লেন্সের সহিত একটি অবতল লেন্স সংযোগ করা হয়।

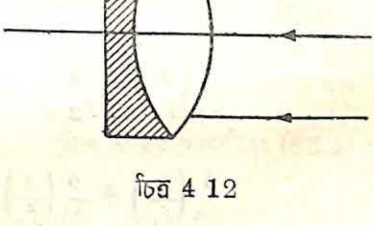
(b) যদি লেন্স দুইটির মাধ্যম একই হয়, $\omega_1=\omega_2=\omega$ হইবে।

$$\therefore \quad \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=0$$

অর্থাৎ উত্তল লেন্সে অভিসারী ক্ষমতা (converging power) ও অবতল লেন্সের অপসারী ক্ষমতা (diverging power) একই হইবে। এক্ষেত্রে উক্ত সমন্বয় লেন্স হিসাবে কাজ করিবে না।

(c) (4.27) সমীকরণ বস্তু দূরত্বের উপর নির্ভর না করায় অবর্ণতার শর্ত বস্তু দূরত্বের উপর নির্ভরশীল নয়।

(d) লেন্সের বক্রতা সঠিক মতো লইলে উক্ত সমাবন্ধ গোলীয় বিপথন মুক্ত হইবে। একটি সমাবতল লেন্সের অবতল তলকে ও উভয়োত্তল লেন্সের উত্তল তলকে কানাডা বালসাম (Canada balsam) দ্বারা সংযোজিত করা হয়। এই সমাবন্ধকে অবর্ণক লেন্স-যুগ্ম (achromatic doublet) বলা হয় (চিত্র নং 4.12)। অবর্ণক লেন্স-যুগ্ম গোলীয় বিপথন ও বর্ণবিপথন উভয়কেই ক্ষুদ্রতর করে।



চিত্র 4 12

4 6 দুইটি পরস্পর ব্যবধানে রক্ষিত লেন্স সমাবন্ধের অবর্ণতার শর্ত (Condition of achromatism of two lenses separated by a distance)

মনে করি, লেন্স সমাবন্ধটি লাল ও বেগুনী বর্ণের জন্য বর্ণবিপথন মুক্ত। মধ্যবর্তী বর্ণের জন্য লেন্স দুইটির ফোকস দূরত্ব যথাক্রমে f_1 এবং f_2। মধ্যবর্তী বর্ণটির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য হইল λ।

লেন্স সমাবন্ধের তুল্যমান ফোকস দূরত্ব F হইলে

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{a}{f_1 f_2} \qquad \cdots (4.28)$$

যেখানে লেন্সদ্বয়ের দূরত্ব $=a$

এবং $\frac{1}{F}=\frac{1}{v}-\frac{1}{u}$ $\cdots (4.29)$

u এবং v হইল মধ্যবর্তী বর্ণের জন্য বস্তু দূরত্ব ও প্রতিবিম্ব দূরত্ব।

লেন্স সমাবন্ধ বর্ণবিপথন মুক্ত হইবে যদি $\frac{\delta v}{\delta\lambda}=0$ হয়। (4.29) সমীকরণ এবং (4.23) সমীকরণকে λ-র সাপেক্ষে অন্তরকলন করিয়া পাই

$$\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{F}\right)=-\frac{1}{v^2}\frac{\delta}{\delta\lambda}(v) \quad \cdots (4.30)$$

এবং $$\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{F}\right)=\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{a}{f_1f_2}\right) \quad \cdots (4.31)$$

$$\because \frac{\delta v}{\delta\lambda}=0, \quad \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{a}{f_1f_2}\right)=0 \quad \cdots (4.32)$$

কিন্তু $$\frac{1}{f_1}=(\mu_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore \frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)=\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).\delta\mu_1$$

$$=\frac{\delta\mu_1}{\mu_1-1}.\frac{1}{f_1}$$

$$=\frac{\omega_1}{f_1}$$

যেখানে $\omega_1=\frac{\delta\mu_1}{\mu_1-1}$ = প্রথম লেন্সের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা

অনুরূপ $\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)=\frac{\omega_2}{f_2}$

(4.32) সমীকরণ হইতে পাই

$$\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)+\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)+a\left[\frac{1}{f_1}\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_2}\right)+\frac{1}{f_2}\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{1}{f_1}\right)\right]=0$$

অথবা, $$\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}+a(\omega_1+\omega_2)\frac{1}{f_1f_2}=0 \quad \cdots (4.33)$$

ইহাই অবর্ণতার শর্ত।

আলোচনা : (a) যদি লেন্সদ্বয়ের মাধ্যম একই হয়, $\omega_1=\omega_2=\omega$ হইবে। সেই ক্ষেত্রে অবর্ণতার শর্ত হইবে

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{2a}{f_1f_2}=0$$

অথবা, $$a=-\frac{f_1+f_2}{2} \quad \cdots (4.34)$$

অর্থাৎ লেন্স দুইটিকে পরস্পর হইতে গড় ফোকস দূরত্বে রাখিতে হইবে।

(b) (4.34) সমীকরণ লেন্সের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতার উপর নির্ভর করে না। সুতরাং সেক্ষেত্রে লেন্স সমাবন্ধ সকল বর্ণের জন্যই অবার্ণ হইবে।

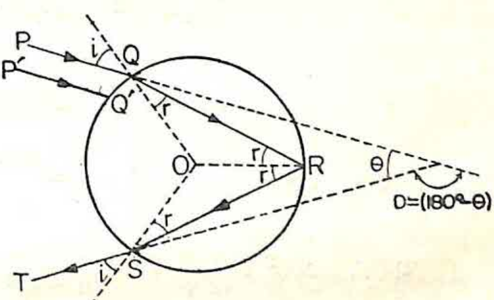
(c) যেহেতু দূরত্ব 'a' সর্বদাই ধনাত্মক, দুইটি লেন্সই উত্তল হইবে। অন্যথায় (f_1+f_2) ঋণাত্মক হইবে না।

4.7 রামধনু (Rainbow)

আকাশের একপ্রান্তে যখন বৃষ্টি পড়ে তখন যদি বিপরীত দিক্ হইতে সূর্যরশ্মি বৃষ্টি বিন্দুর উপর আপতিত হয় তবে আকাশে রামধনুর সৃষ্টি হইবে। আলোকের বর্ণ-বিচ্ছুরণের জন্য সাদা আলোক রশ্মি সাতটি বর্ণে বিভক্ত হয়। বৃষ্টি বিন্দুর অভ্যন্তরে একবার আলোক রশ্মির প্রতিফলন হইলে প্রাথমিক রামধনু (**Primary rainbow**) এবং দুইবার প্রতিফলিত হইলে গৌণ রামধনুর (**Secondary rainbow**) সৃষ্টি হয়। এখন আমরা আকাশে কিভাবে রামধনুর সৃষ্টি হয় তাহাই আলোচনা করিব।

(i) **গোলাকার ফোঁটা দ্বারা আলোক রশ্মির প্রতিফলন এবং প্রতিসরণ (Reflection and refraction of a ray through a spherical drop)**

4.13 নং চিত্রে গোলাকার বৃষ্টি ফোঁটার দ্বারা আলোক রশ্মির প্রতিফলন এবং প্রতিসরণ দেখানো হইয়াছে। একটি রশ্মি PQ ফোঁটার Q বিন্দুতে $\angle i$ কোণে আপতিত হইয়াছে। R বিন্দুতে প্রতিফলনের পরে ST পথে ফোঁটা হইতে নির্গত হইল।



চিত্র 4.13

রশ্মির মোট বিচলন বা চ্যুতি δ = Q বিন্দুতে বিচলন বা চ্যুতি + R বিন্দুতে বিচলন বা চ্যুতি + S বিন্দুতে বিচলন বা চ্যুতি

$$=(i-r)+(\pi-2r)+(i-r) \quad \cdots (4.35)$$

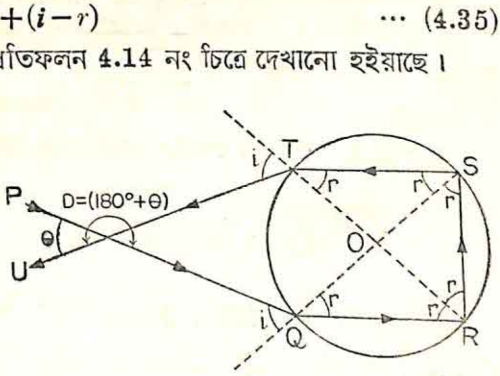
ফোঁটার অভ্যন্তরে রশ্মির দুইবার প্রতিফলন **4.14** নং চিত্রে দেখানো হইয়াছে।

মনে করি, ফোঁটার অভ্যন্তরে 'n' বার প্রতিফলন হইল তাহা হইলে রশ্মির মোট চ্যুতি হইবে

$$\delta=(i-r)+n(\pi-2r)+(i-r)$$
$$=2i-2r(n+1)+n\pi$$

চ্যুতি অল্পতম হইলে $\frac{d\delta}{di}=0$ হইবে

অর্থাৎ, $\frac{dr}{di}=\frac{1}{n+1} \quad \cdots (4.36)$



চিত্র 4.14

জলের প্রতিসরাংক μ ধরিলে

$$\sin i = \mu \sin r$$

i-এর সাপেক্ষে অবকলন করিয়া পাই

$$\cos i = \mu \cos r \frac{dr}{di}$$

অর্থাৎ, $$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{\mu \cos r} \quad \cdots (4.37)$$

(4.36) এবং (4.37) সমীকরণদ্বয়কে তুলনা করিলে পাই

$$\cos i = \mu \cos r \frac{1}{n+1}$$

অথবা, $$\cos^2 i = \frac{\mu^2}{(n+1)^2} \cos^2 r = \frac{\mu^2(1-\sin^2 r)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\mu^2}{(n+1)^2} - \frac{\sin^2 i}{(n+1)^2} \qquad (\because \sin i = \mu \sin r)$$

$$= \frac{\mu^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\cos^2 i}{(n+1)^2}$$

অথবা, $$\cos^2 i \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{\mu^2 - 1}{(n+1)^2}$$

অথবা, $$\cos^2 i \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{\mu^2 - 1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore \cos^2 i = \frac{\mu^2 - 1}{n^2 + 2n} = \frac{\mu^2 - 1}{n(n+2)}$$

$$\therefore \cos i = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{n(n+2)}} \quad \cdots (4.38)$$

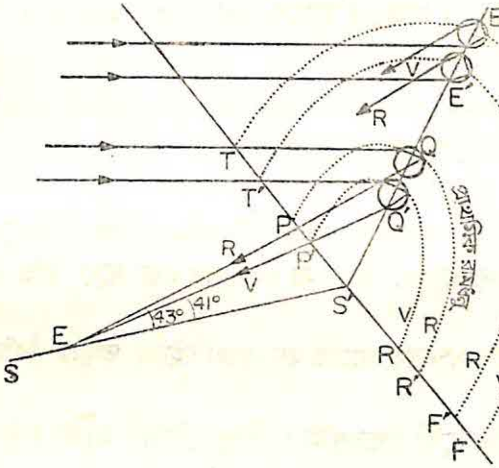
একবার প্রতিফলনের ক্ষেত্রে $n = 1$

$$\therefore \cos i = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{3}} \quad \cdots (4.39)$$

লাল বর্ণের প্রতিসরাংক, বেগুনী বর্ণ অপেক্ষা কম। (4.35) সমীকরণ হইতে সহজেই বোঝা যায় বেগুনী রশ্মির চ্যুতি লাল অপেক্ষা বেশী হইবে। সেইজন্য রামধনুর বর্ণালির নিম্নে বেগুনী এবং ঊর্ধ্বে লাল বর্ণ দেখা যায়।

(ii) **প্রাথমিক বা প্রধান রামধনুর গঠন** (Formation of primary rainbow)

4.15 নং চিত্রে প্রাথমিক রামধনুর গঠন দেখানো হইয়াছে। চিত্রে SES′ হইল সূর্যরশ্মির গতিপথ। মনে করি, একজন দর্শক E সূর্যের দিকে পিছন ফিরিয়া দাঁড়াইয়া আছে।



চিত্র 4.15

লাল এবং বেগুনী বর্ণের রশ্মির ক্ষেত্রে জলের প্রতিসরাঙ্ক হইল যথাক্রমে 1·33 এবং 1·34। অতএব লাল বর্ণের চ্যুতি 137° এবং বেগুনী বর্ণের চ্যুতি 139° হইবে।

এখন E-কে শীর্ষ বিন্দু এবং SES′-কে অক্ষ ধরিয়া একটি শঙ্কু PQR কল্পনা করিলাম যাহার অর্ধ শিরঃকোণ হইল 43° এবং অপর একটি শঙ্কু P′Q′R′ কল্পনা করিলাম যাহার অর্ধ শিরঃকোণ হইল 41°। PQR শঙ্কুর উপর অবস্থিত যাবতীয় জলকণা সূর্যরশ্মিকে বিচ্ছুরিত করিবে। কিন্তু রশ্মির চ্যুতি হইবে $137°(=180°-43°)$। লাল বর্ণের চ্যুতি 137° হওয়ায় PQR বৃত্তচাপের উপর লাল বর্ণ দেখা যাইবে। বেগুনী বর্ণের চ্যুতি $139°=(180°-41°)$ হওয়ায় P′Q′R′ বৃত্তচাপের উপর বেগুনী বর্ণ দেখা যাইবে। লাল এবং বেগুনী বর্ণের মধ্যবর্তী রশ্মিগুলি লাল এবং বেগুনী বৃত্ত-চাপের মধ্যে বৃত্তীয় চাপ সৃষ্টি করিবে। এইভাবে গঠিত রামধনুকে প্রাথমিক রামধনু বলা হয়। ইহার বৃত্তের বাহিরের দিকে লাল এবং ভিতরের দিকে বেগুনী বর্ণ থাকিবে।

(iii) **গৌণ রামধনুর গঠন** (Formation of secondary rainbow)

আলোক রশ্মির দুইবার প্রতিফলনে গৌণ রামধনুর সৃষ্টি হয়। লাল এবং বেগুনী রশ্মির চ্যুতি যথাক্রমে 231° এবং 234° হইবে। এখন আগের মতো E কে শীর্ষবিন্দু এবং SES′-কে অক্ষ ধরিয়া যথাক্রমে 51° এবং 54° অর্ধ-শিরঃকোণ যুক্ত দুইটি শঙ্কু TEF এবং T′E′F′ কল্পনা করিলাম; TEF-এর উপর অবস্থিত জলকণাগুলি দুইবার

প্রতিফলনের পর রশ্মিকে $234^\circ(=180^\circ+54^\circ)$ এবং T′E′F′-এর উপর অবস্থিত জলকণাগুলি $231^\circ(=180^\circ+51^\circ)$ চ্যুতিকোণে দর্শকের চোখে পৌঁছাইবে। উহারা লাল এবং বেগুনী বর্ণের চ্যুতি হওয়ায় বাহিরের বৃত্তটি বেগুনী বর্ণের এবং ভিতরের বৃত্তটি লাল বর্ণের হইবে। অন্যান্য রঙের বৃত্তগুলি উহাদের মাঝে অবস্থিত হইবে।

4.8 রামধনু এবং উহার সম্বন্ধে আলোচনা (Rainbow and discussions about it)

(i) দর্শকের সহিত SES′ অক্ষরেখাও উর্ধ্বে উঠিবে। ইহার ফলে দর্শকের কাছে রামধনুর বেশীর ভাগ অংশ দৃষ্টিগোচর হইবে।

(ii) দুইজন দর্শক বিভিন্ন স্থানে দাঁড়াইলে একই রামধনু দেখিতে পাইবে না। PQR এবং P′Q′R′ শঙ্কুদ্বয় দর্শকের অবস্থানের উপর নির্ভর করে। সুতরাং দুইজন দর্শকের সাপেক্ষে একই শঙ্কু উৎপন্ন হইবে না। ইহার জন্য দুই ব্যক্তি একই রামধনু দেখিতে পাইবে না।

আবার একই দর্শক যদি সম্মুখে অগ্রসর হয় তাহা হইলে তাহার বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন রামধনু দেখিবে।

(iii) বৃষ্টির সময় কণাগুলি পতনশীল। তাহা হইলেও আমরা রামধনু কিছুক্ষণ একই জায়গায় দেখিতে পাই। ইহা কি রূপে সম্ভব হয়? একদল জলবিন্দু নিচের দিকে সরিয়া গেলে তৎক্ষণাৎ আরও একগুচ্ছ জলকণা সেই স্থান দখল করে। কাজেই মনে করা যাইতে পারে যে একদল জলকণা ঐ স্থান দখল করিয়া আছে।

(iv) প্রাথমিক বা প্রধান রামধনুর ভিতরে এবং গৌণ রামধনুর বাহিরে আরো কয়েকটি অস্পষ্ট রামধনু দেখিতে পাওয়া যায়। ইহাদের অনুপূরক ধনু (supernumerary bow) বলা হয়।

উদাহরণ (Examples)

1. ক্রাউন কাচ এবং ফ্লিন্ট কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা যথাক্রমে 0·03 এবং 0·05. দুইটি পাতলা লেন্স পরস্পর সংলগ্ন থাকিয়া 60 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের একটি অভিসারী অবার্ণ লেন্স সমাবন্ধ গঠন করিলে উক্ত লেন্সদ্বয়ের ফোকস দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(The dispersive powers of crown glass and flint glass are 0·03 and 0·05 respectively. Find the focal lengths of two thin lenses which will form a convergent achromatic lens of focal length 60 cm when put in contact with each other.) (C.U. '70)

এক্ষেত্রে অবর্ণতার শর্ত হইতেছে

$$\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}=0$$

$$\therefore \quad \frac{0\cdot03}{f_1}+\frac{0\cdot05}{f_2}=0$$

অথবা, $\frac{3}{f_1}+\frac{5}{f_2}=0$ $\qquad \therefore \; f_1=-\frac{3}{5}f_2$

আবার, লেন্সদ্বয়ের তুল্য ফোকস দৈর্ঘ্য F হইলে

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

এখানে $F=-60$ cm (∵ তুল্যাঙ্ক লেন্স অভিসারী)

$$\therefore \quad -\frac{1}{60}=-\frac{5}{3f_2}+\frac{1}{f_2}$$

$$\therefore \; f_2=40 \text{ cm}$$

এবং $f_1=-\frac{3}{5}f_2=-24$ cm.

2. লাল এবং বেগুনী বর্ণের রশ্মির জন্য কোন পাতলা উত্তল লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 100 cm এবং 96·8 cm। লেন্সের বিচ্ছুরণ ক্ষমতা বাহির কর।

(The focal lengths for red and violet rays of a thin convex lens are respectively 100 cm and 96·8 cm. Calculate the dispersive power of the lens.)

আমরা জানি, $f_r-f_v=\omega . f$

যেখানে $f=\sqrt{f_r . f_v}$

$$\therefore \quad \omega=\frac{f_r-f_v}{\sqrt{f_r . f_v}}=\frac{100-96\cdot8}{\sqrt{96\cdot8\times100}}$$

$$=0\cdot032.$$

3. একটি উত্তল লেন্স হইতে 30 cm দূরে একটি বস্তুর সদ্ বিম্ব গঠিত হইল। প্রতিবিম্বের বেগুনী অংশ লেন্স হইতে 50 cm দূরে পাওয়া গেল। বেগুনী বর্ণের জন্য লেন্সের প্রতিসরাঙ্ক 1·64 হইলে লাল বর্ণের ক্ষেত্রে কত হইবে? ধরিয়া লও বেগুনী হইতে লাল পর্যন্ত প্রতিবিম্বের দৈর্ঘ্য 4·2 cm হইল।

(An object is situated at a distance 30 cm from a convex lens. The violet part of the image is at a distance of 50 cm from the lens. If the refractive index for the violet is 1·64, determine the refractive index for the red. Assuming the axial length of the image from violet to red being 4·2 cm.)

আমরা জানি,

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

এক্ষেত্রে $u=30$ cm

$v_v=50$ cm

$u_r=(50+4{\cdot}2)$ cm $=54{\cdot}2$ cm

$\mu_v=1{\cdot}64$

এখন $$\frac{1}{u}+\frac{1}{v_v}=(\mu_v-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{30}+\tfrac{1}{50}=(1{\cdot}64-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

অতএব $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{12}$$

আবার, $$\frac{1}{u}+\frac{1}{v_r}=(\mu_r-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{30}+\frac{1}{54{\cdot}2}=(\mu_r-1)\cdot\tfrac{1}{12}$$

অথবা, $$\mu_r-1=\frac{84{\cdot}2\times 12}{30\times 54{\cdot}2}=0{\cdot}60$$

$$\therefore \quad \mu_r=1{\cdot}60.$$

4. দুইটি বিভিন্ন ধরনের কাচের মধ্য প্রতিসরাঙ্ক হইল যথাক্রমে 1·52 এবং 1·66; বর্ণালির দুই বর্ণের বেলায় প্রথম কাচের প্রতিসরাঙ্কের পার্থক্য 0·013 এবং দ্বিতীয় ধরনের 0·022। প্রথম কাচের তৈয়ারী উত্তল লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য 50 cm হইলে দ্বিতীয় কাচের লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য কত হইলে উহাদের সমাবন্ধ অবার্ণ হইবে?

(The mean refractive indices of two specimens of glass are 1·52 and 1·66 respectively. The differences in the refractive indices for the same two lines in the spectrum are 0·013 for the first and 0·022 for the second. Find the focal length of the lens of the second glass which when combined with a convex lens of 50 cm focal length of the first, will make an object glass achromatic.)

(C. U. '44)

আমরা জানি, বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা $\omega = \dfrac{d\mu}{\mu - 1}$

প্রথম কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা $\omega_1 = \dfrac{0{\cdot}013}{1{\cdot}52 - 1} = \dfrac{1}{40}$

দ্বিতীয় কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা $\omega_2 = \dfrac{0{\cdot}022}{1{\cdot}66 - 1} = \dfrac{1}{30}$

লেন্স সমাবন্ধ অবার্ণ হইলে, $\dfrac{\omega_1}{f_1} + \dfrac{\omega_2}{f_2} = 0$ হইবে

$$-\frac{1}{40} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{f_2} = 0$$

$$\therefore \quad f_2 = \frac{40 \times 50}{30} = 66{\cdot}6 \ldots \text{cm.}$$

5. একটি 20 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের উত্তল লেন্স হইতে 'f' ফোকস দৈর্ঘ্যের অপর একটি উত্তল লেন্স 'a' দূরত্বে রাখা আছে। লেন্স সমাবন্ধ 30 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের একটি অভিসারী অবার্ণ সমাবন্ধ গঠন করিবে। f এবং a-এর মান বাহির কর।

(A convex lens of focal length 'f' is kept at a distance 'a' from another convex lens of focal length 20 cm. That combination will be achromatic converging system having focal length 30 cm. Calculate the values of f and a.)

আমরা জানি,

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{a}{f_1 f_2} = \frac{1}{F}$$

সমাবন্ধ অবার্ণ বলিয়া $a = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ হইবে

এক্ষেত্রে $f_1 = 20$ cm

$f_2 = f$

$F = 30$ cm

$$\therefore \quad \frac{1}{30}=\frac{1}{20}+\frac{1}{f}-\frac{a}{20f}$$

$$=\frac{1}{20}+\frac{1}{f}-\frac{1}{20f}\left(\frac{20+f}{2}\right)$$

$$\therefore \quad f=60 \text{ cm}$$

এবং $$a=\frac{20+60}{2}=40 \text{ cm.}$$

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. গোলীয় বিপথন বলিতে কী বোঝ? দেখাও যে দুইটি বিভিন্ন ফোকস দৈর্ঘ্যের লেন্সকে পরস্পর হইতে ব্যবধানে রাখিয়া গোলীয় বিপথন অল্পতম করা যায়।

(What do you understand by spherical aberration? Show that the spherical aberration can be minimised by using two lenses of different focal length separated by a distance.)

2. অক্ষীয় গোলীয় বিপথন ব্যাখ্যা কর।

(Explain the term axial spherical aberration.

3. বর্ণবিপথন বলিতে কী বোঝ? দুইটি পরস্পরসংলগ্ন লেন্সের অবর্ণতার শর্ত কী?

(What do you mean by chromatic aberration? What is the condition of achromatism of two lenses in contact?)

4. একই কাচের তৈয়ারী দুইটি পাতলা বিভিন্ন ফোকস দৈর্ঘ্যের উত্তল লেন্স একই অক্ষের উপর কিছুটা ব্যবধানে রাখা হইল। ঐ সমাবন্ধের অবর্ণতার শর্ত নির্ণয় কর।

(Two thin convex lenses of same glass but of different focal lengths are mounted coaxially at a distance apart. Work out the condition of achromatism of the combination.) (C. U. '58)

5. লেন্সের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা বলিতে কী বোঝায়? ω_1 এবং ω_2 বিচ্ছুরণ ক্ষমতাযুক্ত এবং f_1 ও f_2 ফোকস দৈর্ঘ্যযুক্ত দুইটি লেন্স অবার্ণ সমাবন্ধ গঠন করিলে প্রমাণ কর যে $\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}=0$.

(What do you mean by the dispersive power of a lens? Show that an achromatic combination of two lenses with dispersive powers ω_1 and ω_2 and of focal lengths f_1 and f_2 is possible when $\frac{\omega_1}{f_1}+\frac{\omega_2}{f_2}=0$.)

(C. U. '61)

6. লেন্সের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতার সংজ্ঞা লেখ। অবর্ণতার শর্ত মান্য করিয়া একটি লেন্স সমাবন্ধ কিরূপে গঠন করিবে যখন (i) লেন্সদ্বয় একই উপাদানে তৈয়ারী, (ii) লেন্সদ্বয় ভিন্ন উপাদানে তৈয়ারী। (C, U. '68)

(Define dispersive power of a lens. Explain how you would combine conveniently a lens system to satisfy achromatic condition when they are (i) made of same material, (ii) made of different material.)

7. 'বর্ণবিক্ষেপণ ক্ষমতা' ও 'বর্ণবিচ্ছুরণ' বলিতে কী বোঝায় ব্যাখ্যা কর। পরস্পর সংলগ্ন দুইটি পাতলা লেন্সের অবর্ণতার শর্ত নির্ধারণ কর। এইরূপ সমন্বয় সকল রঙের ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ অবার্ণ নয় কেন? লেন্স সমাবন্ধের একটি যদি উত্তল হয় তবে অপরটিকে অবশ্যই অবতল হইতে হইবে কেন?

(Explain the terms 'Dispersive power' and 'Dispersion.' Deduce the condition of achromatism of two thin lenses in contact. Why is such a combination not truly achromatic for all colours? Why is it that if one of such a lens combination is convex, the other must be concave?) (C. U. '75)

8. লেন্সের অনুদৈর্ঘ্য বর্ণবিপথনের মান নির্ণয় কর। পরস্পর সংলগ্ন দুইটি লেন্সের সাহায্যে কিরূপে বর্ণবিপথনমুক্ত লেন্স সমন্বয় উৎপন্ন করা যায় তাহার শর্ত উৎপাদন কর। দেখাও যে অসীম ফোকস দৈর্ঘ্যের একটি লেন্সের সাহায্যে অবর্ণতা উৎপাদন করা যায় না।

(Deduce expression for longitudinal chromatic aberration of a lens. Find the condition of achromatism for two lenses in contact. Show that a single lens of infinite focal length cannot be made achromatic.) (C.U. '81)

9. ক্রাউন ও ফ্লিণ্ট কাচের বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা যথাক্রমে 0·036 ও 0·064। দুইটি পাতলা লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য বাহির কর যাহারা পরস্পর সংলগ্ন থাকিয়া 50 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের একটি অভিসারী অবার্ণ লেন্স সমন্বয় গঠন করিবে।

(The dispersive powers of crown and flint glass are 0·036 and 0·064 respectively. Find the focal lengths of two lenses which will form a convergent achromatic lens of focal length 50 cm when put in contact with each other.) (C.U. '57)

(Ans. 21·9 cm এবং 38·9 cm.)

10. মনে কর দুইটি লেন্স (যাহার একটির বর্ণবিচ্ছুরণ ক্ষমতা অপরটির দ্বিগুণ)

একটি 30 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের অভিসারী অবার্ণ লেন্স সমন্বয় গঠন করিল। লেন্স দুইটির ফোকস দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(Suppose two lenses, one having twice the dispersive power of the other, is combined to form a converging achromatic combination with focal length 30 cm. Calculate the focal lengths of the lenses.) (Ans. 15 cm এবং 30 cm)

11. প্রাথমিক ও গৌণ রামধনু গঠনের মূল তত্ত্ব বর্ণনা কর এবং প্রত্যেকটির বর্ণসজ্জা ব্যাখ্যা কর।

(Give the theory of the formation of primary and secondary rainbows and account for the sequence of colours in each.)

(C.U. '70)

12. প্রাথমিক রামধনুর গঠন প্রণালীর তত্ত্ব লেখ। রামধনুর বর্ণবিন্যাস কিরূপে হয়? বিকাল বেলায় আকাশের কোন্ অংশে রামধনু দেখিতে পাওয়া যায়?

(Give the theory of formation of the primary rainbow. In what order are the colours arranged? In which part of the sky the rainbow will appear in the afternoon?) (C.U. '73)

13. প্রাথমিক রামধনুর গঠন ব্যাখ্যা কর। দর্শকের চোখে যে আলোক শঙ্কু পৌঁছায় উহার অর্ধ-শিরঃকোণ কত? ঐ রামধনুর বর্ণবিন্যাস কিরূপ? যদি দর্শক বেশ কিছুদূর সম্মুখে অগ্রসর হয় তবে ঐ অর্ধ-শিরঃকোণের কোন পরিবর্তন হইবে কী?

(Explain the formation of a primary rainbow. What is the semi-vertical angle of the cone of light reaching the eye of the observer and in what order are the colours arranged? Will there be any change in the angle if the observer advances towards the rainbow by some appreciable distance?) (C.U. '52)

14. 1·32 প্রতিসরাঙ্কের একটি স্বচ্ছ গোলকের পৃষ্ঠে একটি রশ্মি আপতিত হইল। প্রতিসরণের পর উহা গোলকের অভ্যন্তরে প্রতিফলিত (পূর্ণ প্রতিফলন নহে) হইল এবং পরে প্রতিসৃত হইয়া গোলক হইতে নির্গত হইল। রশ্মির চ্যুতি নির্ণয় কর এবং অল্পতম চ্যুতি হইতে গেলে আপতন কোণ কত হইবে তাহা নিকটতম ডিগ্রী মানে নির্ণয় কর।

(A ray of light is incident on the surface of a transparent sphere of refractive index 1·32. After refraction, it is internally reflected (not total) and then refracted out of the sphere. Find the deviation suffered by the ray and the angle of incidence to the nearest degree, so that the deviation may be a minimum.)

(C.U. '49) (Ans. 60° ; 136°)

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

বীক্ষণ যন্ত্রাবলী

(Optical Instruments)

5.1 সূচনা (Introduction)

অণুবীক্ষণ, দূরবীক্ষণ, ক্যামেরা প্রভৃতি যন্ত্রকে বীক্ষণ যন্ত্র বলা হয়। এই যন্ত্রাদি কোন বস্তু দেখিতে আমাদের সাহায্য করে। কোন বস্তুর দুই বিন্দু চোখে যদি $\frac{1}{60}^\circ$ অপেক্ষা অল্প কোণ উৎপন্ন করে তবে চোখ ঐ দুই বিন্দুকে পৃথক করিতে পারিবে না। আলোক বা বীক্ষণ যন্ত্রাবলী এই প্রভেদন ক্ষমতাকে (resolving power) বাড়াইতে সাহায্য করে। খুব ক্ষুদ্র বস্তুকে অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে বিবর্ধিত (magnified) করিয়া প্রভেদনীয় ক্ষমতাকে বাড়ানো হয়। গ্রহ, উপগ্রহ, নক্ষত্র ইত্যাদি দূরবীক্ষণের সাহায্যে দেখা হয়। অণুবীক্ষণ, দূরবীক্ষণ ইত্যাদি যন্ত্রে প্রধানত দুইটি অংশ থাকে, যথা—(a) অভিনেত্র এবং (b) অভিলক্ষ্য। বীক্ষণ যন্ত্রের প্রধান কাজ হইল প্রভেদন ক্ষমতা বাড়ানো।

5.2 যৌগ অভিনেত্র বা নেত্রিকা (Compound eyepiece)

অভিনেত্র একটি মাত্র লেন্স দ্বারা গঠিত হইলে গোলাপেরণ এবং বর্ণবিপথন ত্রুটি হয়। প্রতিবিম্বের ন্যূনতম বিকৃতি করিতে যৌগিক অভিনেত্র ব্যবহার করা হয়। সাধারণত তিন প্রকার অভিনেত্র আছে : (a) কেলনারের অভিনেত্র, (b) রামসডেনের অভিনেত্র এবং (c) হাইগেন্সের অভিনেত্র। যৌগিক অভিনেত্রে সাধারণত দুইটি লেন্সকে (যাহাদের ফোকস দূরত্ব যথাক্রমে f_1 এবং f_2) a দূরত্বে একই অক্ষের উপর রাখা হয়। যে কোন বীক্ষণ যন্ত্রকে স্বাভাবিক দর্শন (প্রতিবিম্ব প্রথম মুখ্য ফোকস তলে থাকিবে) বা স্পষ্ট দর্শনের (অভিনেত্রের প্রথম ফোকস দূরত্বের মধ্যে থাকিবে) জন্য নিয়ন্ত্রণ (adjust) করা হয়। প্রথম ফোকস দূরত্ব (f) কে প্রথম মুখ্য তল (first principal plane) হইতে মাপা হয়। সেইজন্য প্রথম মুখ্য তল এবং ফোকস তল বাহির করা আবশ্যক।

প্রথম লেন্স হইতে প্রথম মুখ্য তলের দূরত্ব

$$p' = -\frac{af_1}{f_1 + f_2 + a} \qquad \cdots (5.1)$$

প্রথম ফোকস তল হইতে প্রথম মুখ্য তলের দূরত্ব

$$f' = -\frac{f_1 f_2}{a + f_1 + f_2} \qquad \cdots 5.2)$$

(a) কেলনারের অভিনেত্র (Kellner's eyepice)

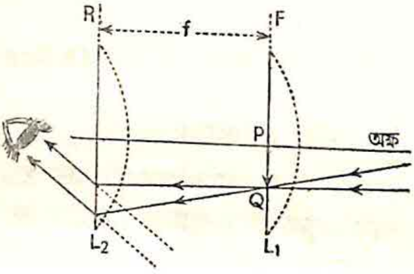
(i) গঠন (Construction) :

একই মাধ্যমের এবং একই ফোকস দূরত্বের (f) দুইটি সমোত্তল লেন্সকে f দূরত্বে রাখা হয় (চিত্র 5.1)।

(ii) প্রথম মুখ্য তল এবং ফোকস তলের অবস্থান (Location of first principal and focal planes) :

এক্ষেত্রে প্রথম লেন্স L_1 হইতে প্রথম মুখ্য তলের (R) দূরত্ব

$$p' = -\frac{af_1}{a+f_1+f_2} = -\frac{f(-f)}{f-f-f} = -f \quad \cdots(5.3)$$



চিত্র 5.1

এবং প্রথম মুখ্য তল হইতে প্রথম ফোকস তলের দূরত্ব

$$f' = -\frac{f_1 f_2}{a+f_1+f_2} = -\frac{(-f)(-f)}{f-f-f} = +f \quad \cdots(5.4)$$

(iii) কার্যপ্রণালী (Action) :

বীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য (objective) উহার দ্বিতীয় ফোকস তলে PQ প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। স্বাভাবিক দর্শনের জন্য এই প্রতিবিম্বকে F তলে গঠিত হইতে হইবে। প্রথম লেন্সের সমতল তলেই এই তল অবস্থিত হওয়ায় চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব (final image) অসীমে গঠিত হইবে।

(iv) সুবিধা (Advantages) :

L_1 লেন্সের উপস্থিতি দৃষ্টি ক্ষেত্র (field of view) বাড়ায়। অবর্ণতার শর্ত $a = -\frac{f_1+f_2}{2}$ এই ক্ষেত্রে পালিত হওয়ায় প্রতিবিম্ব বর্ণবিপথন মুক্ত হইবে।

(v) অসুবিধা (Disadvantages) :

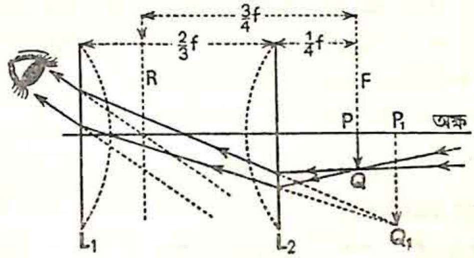
অল্পতম গোলীয় বর্ণবিপথনের শর্ত $a = f_1 - f_2$ এই অভিনেত্র মানিয়া চলে না। সুতরাং প্রতিবিম্বে বর্ণবিপথন ত্রুটি আসিবে।

(b) রামসডেনের অভিনেত্র (Ramsden's eyepiece)

(i) গঠন (Construction) :

দুইটি একই মাধ্যমের এবং একই ফোকস দূরত্ব (f) বিশিষ্ট লেন্সকে পরস্পর হইতে $\frac{2f}{3}$ দূরত্বে রাখা হয় (চিত্র 5.2)। এই অভিনেত্রের প্রথম ফোকস তল (F) L_2 লেন্সের ধনাত্মক দিকে হওয়ায় ইহাকে ধনাত্মক অভিনেত্রও বলা হয়।

(ii) প্রথম মুখ্য তল এবং ফোকস তলের অবস্থান (Location of first principal and focal planes) :



চিত্র 5.2

এক্ষেত্রে, প্রথম লেন্স L_1 হইতে প্রথম মুখ্য তলের (R) দূরত্ব

$$p' = -\frac{af_1}{a+f_1+f_2} = -\frac{\left(\frac{2f}{3}\right)(-f)}{\frac{2}{3}f-f-f} = -\frac{f}{2} \quad \cdots(5.5)$$

প্রথম মুখ্য তল (R) হইতে প্রথম ফোকস তলের (F) দূরত্ব

$$f' = -\frac{f_1 f_2}{a+f_1+f_2} = -\frac{(-f)(-f)}{-(4f/3)} = \frac{3f}{4} \quad \cdots(5.6)$$

(iii) **কার্যপ্রণালী (Action) :**

বীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য (objective) ইহার দ্বিতীয় ফোকস তলে PQ প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। PQ প্রতিবিম্ব অভিনেত্রের বস্তুর কাজ করিবে। স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে PQ কে অভিনেত্রের প্রথম ফোকস তলে অবস্থিত হইতে হইবে যাহাতে চূড়ান্ত (final) প্রতিবিম্ব অসীমে অবস্থিত হয়। স্পষ্ট দর্শনের জন্য চূড়ান্ত প্রতিবিম্বকে প্রথম ফোকস দূরত্ব RF-এর মধ্যে গঠিত হইতে হইবে। প্রতিবিম্ব পরিমাপের জন্য ক্রসতার (cross-wire) বা মাইক্রোমিটার স্কেলকে (micrometer scale) অভিলক্ষ্যের ফোকস তল PQ-তে বসানো হয়।

(iv) **সুবিধা (Advantages) :**

রামসডেন অভিনেত্রে প্রতিবিম্বের আকৃতি মাইক্রোমিটার স্কেল দ্বারা পরিমাপ করা যায়। মাইক্রোমিটার স্কেল এবং বস্তু একই তলে অবস্থিত হওয়ায় উহাদের প্রতিবিম্ব একই অনুপাতে বিবর্ধিত হয়।

(v) **অসুবিধা (Disadvantages) :**

রামসডেন অভিনেত্রের দৃশ্য ক্ষেত্র কেলনার অভিনেত্র অপেক্ষা কম। ন্যূনতম গোলীয় বিপথন এবং বর্ণাপেরণের শর্ত হইল

$$a = f_1 - f_2$$

$$a = -\frac{f_1+f_2}{2}$$

এই অভিনেত্রে $f_1 = f_2 = -f$ এবং $a = \frac{2}{3}f$.

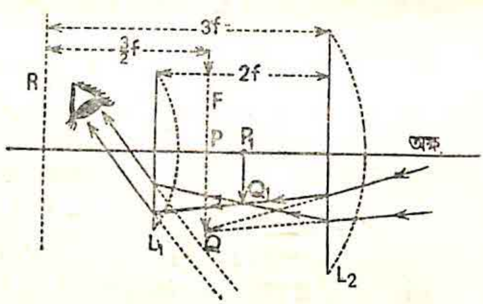
সুতরাং কোন শর্তই এই অভিনেত্র মানিয়া চলে না। চূড়ান্ত প্রতিবিম্বে গোলীয় বর্ণবিপথন এবং বর্ণাপেরণ ত্রুটি আসিয়া যায়।

অভিনেত্রের বীক্ষণ লেন্স L_1 কে অবার্ণ লেন্স-যুগ্ম (achromatic doublet) করিয়া, এবং সমতল পৃষ্ঠ চোখের অভিমুখী রাখিয়া বর্ণাপেরণ ন্যূনতম করা হয়। আবার মোট বিচ্যুতিকে দুই লেন্সের চারটি তলের মধ্যে সমভাবে বণ্টন (uniformly distributed) করিয়া গোলীয় বর্ণবিপথন ন্যূনতম করা যায়।

(c) **হাইগেন্সের অভিনেত্র** (Huygens' eyepiec) :

(i) **গঠন** (Construction) :

একই মাধ্যমের তৈয়ারী দুইটি সমোত্তল লেন্সকে একই অক্ষের উপর এমনভাবে বসানো হয় যাহাতে উহাদের উত্তল তল আপতিত রশ্মির অভিমুখে থাকে। L_1 এবং L_2 লেন্সদ্বয়ের ফোকস দূরত্ব যথাক্রমে f এবং $3f$। উহাদের $2f$ দূরত্বে রাখা হয়। অভিনেত্রের প্রথম ফোকস তল (F) L_2 লেন্সের ঋণাত্মক দিকে থাকে বলিয়া এই অভিনেত্রকে অনেক সময় ঋণাত্মক অভিনেত্র বলে (চিত্র 5.3)।



চিত্র 5.3

(ii) **প্রথম মুখ্য তল এবং ফোকস তলের অবস্থান** (Location of first principal and focal planes) :

এই অভিনেত্রে $f_1 = -3f$; $f_2 = -f$ এবং $a = 2f$

∴ প্রথম মুখ্য তল (R) হইতে L_2 লেন্সের দূরত্ব

$$p' = -\frac{af_1}{f_1+f_2+a} = -\frac{2f(-3f)}{-2f} = -3f \qquad \cdots(5.7)$$

এবং প্রথম মুখ্য তল হইতে প্রথম ফোকস তলের দূরত্ব

$$f = -\frac{f_1 f_2}{f_1+f_2+a} = -\frac{(-3f)(-f)}{-2f} = \tfrac{3}{2}f$$

প্রথম ফোকস তল প্রথম মুখ্য তলের ধনাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত কিন্তু L_2 লেন্সের ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

(iii) **কার্যপ্রণালী** (Action) :

অভিলক্ষ্য (objective) যে প্রতিবিম্ব PQ গঠন করে তাহা এই অভিনেত্রের অসদ্ বস্তু (virtual object) হয়। স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে এই প্রতিবিম্ব PQ-কে অভিনেত্রের প্রথম ফোকস তলে থাকিতে হইবে যাহাতে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অসীমে অবস্থিত হয়।

(iv) সুবিধা (Advantages) :

L_2 লেন্স অভিনেত্রের দৃশ্য ক্ষমতা অনেক বাড়াইয়া দেয়।

অল্প গোলীয় বিপথন এবং বর্ণাপেরণের শর্ত হইল

$$a=(f_1-f_2)$$

$$a=\frac{f_1+f_2}{2}$$

এখানে $f_1=-3f$, $f_2=-f$ এবং $a=2f$

উপরের শর্তদ্বয়ে f_1, f_2-র মান বসাইয়া পাই যে চূড়ান্ত প্রতিবিম্বে ন্যূনতম গোলীয় বিপথন এবং বর্ণাপেরণ হইবে।

(v) অসুবিধা (Disadvantages) :

এখানে মাইক্রোমিটার স্কেলকে P_1Q_1 তলে রাখা হয়। অসদ্ বস্তু PQ অভিনেত্রের দুইটি লেন্স দ্বারাই বিবর্ধিত হয়। কিন্তু মাইক্রোমিটার স্কেল কেবলমাত্র L_1 লেন্স দ্বারা বিবর্ধিত হয় এবং অল্পতম গোলীয় বিপথন ও বর্ণাপেরণের শর্ত মানিয়া চলে না। অতএব মাইক্রোমিটারের স্কেলের প্রতিবিম্ব ত্রুটি মুক্ত হয় না। সেইজন্য এই অভিনেত্রে প্রতিবিম্বের সূক্ষ্ম পরিমাপ সম্ভব নয়।

5.3 রামসডেন এবং হাইগেন্সের অভিনেত্রের তুলনা (Comparison between Ramsden's eyepiece and Huygens' eyepiece)

রামসডেন অভিনেত্র	হাইগেন্সের অভিনেত্র
(i) রামসডেনের অভিনেত্রের দৃষ্টি ক্ষেত্র (field of view) বিস্তৃত।	(i) হাইগেন্সের অভিনেত্রের দৃষ্টি ক্ষেত্রও বিস্তৃত।
(ii) সকল বর্ণের জন্য এই অভিনেত্র অবার্ণ নহে।	(ii) সকল বর্ণের জন্য এই অভিনেত্র অবার্ণ (achromatic)।
(iii) অল্পতম গোলাপেরণের শর্ত $a=f_1-f_2$ মানিয়া চলে না, কিন্তু মোট চ্যুতি অভিনেত্রের চার পৃষ্ঠের ভিতর সমভাবে বণ্টিত হয় বলিয়া উহা হ্রাস পায়।	(iii) অল্প গোলাপেরণের শর্ত $a=f_1-f_2$ মানিয়া চলে, সুতরাং এই অভিনেত্রে গঠিত চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব গোলাপেরণ মুক্ত।
(iv) এই অভিনেত্রে ক্রস তারের প্রতিবিম্ব এবং বস্তুর চূড়ান্ত প্রতিবিম্বের বিবর্ধন ভিন্ন হয়। কাজেই প্রতিবিম্বের নির্ভরযোগ্য পরিমাপ সম্ভব নহে।	(iv) এই অভিনেত্রে ক্রস তারের প্রতিবিম্ব এবং বস্তুর চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব সমভাবে বিবর্ধিত হয়। কাজেই প্রতিবিম্বের নির্ভরযোগ্য পরিমাপ সম্ভব।

5.4 রামসডেনের অভিনেত্রযুক্ত নভোবীক্ষণ (Astronomical telescope fitted with Ramsden's eyepiece)

নভোবীক্ষণের প্রধানত দুইটি অংশ থাকে—(i) অভিনেত্র এবং (ii) অভিলক্ষ্য।

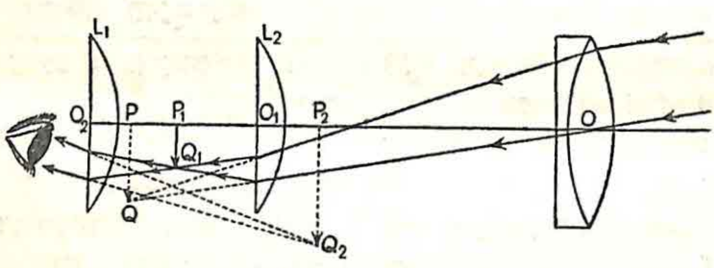
এই নভোবীক্ষণে রামসডেন অভিনেত্র ব্যবহার করা হয়। ইহার ফলে এই অভিনেত্র গোলাপেরণ মুক্ত কিন্তু বর্ণাপেরণ মুক্ত নয়। ক্রস তার ব্যবহার করিয়া প্রতিবিম্বের আকৃতি সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা যায়। নভোবীক্ষণের অভিলক্ষ্য উভয়োত্তল লেন্স (ক্রাউন কাঁচের) এবং সমতলাবতল লেন্স (ফ্লিন্ট কাঁচের) সমন্বয়ে গঠিত। এই সমন্বয় সমোত্তল লেন্সের কাজ করে। উত্তল তলকে আপতিত রশ্মির দিকে রাখিলে, অভিলক্ষ্য অল্পতম গোলাপেরণ ঘটাইবে। এই অভিলক্ষ্য অবার্ণতা শর্ত মানিয়া চলে। অতএব লেন্স সমন্বয় অবার্ণ হইবে।

স্বাভাবিক দর্শনে দূরবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা বলিতে অভিলক্ষ্যের ফোকস দূরত্ব ও অভিনেত্রের ফোকস দূরত্বের অনুপাতকে বোঝায়। সুতরাং অভিলক্ষ্য এমন লওয়া হয় যাহাতে উহার ফোকস-দূরত্ব দীর্ঘ হয়।

আবার, কোন বস্তুর দুইটি নিকট বিন্দু অভিলক্ষ্যের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করিলে উহা $\theta=\frac{1.22\ \lambda}{D}$ সম্পর্ক (relation) হইতে পাওয়া যায়, যেখানে D হইল অভিলক্ষ্যের ব্যাস। কাজেই বহুদূরে অবস্থিত কোন বস্তুর দুই নিকট বিন্দু দূরবীক্ষণের সাহায্যে পৃথক দেখা যাইবে যদি উহার ব্যাস বেশী হয়।

কার্যপ্রণালী (Action) ঃ

অনন্তে অবস্থিত বস্তু হইতে আগত রশ্মি সমান্তরাল হয়। এই সমান্তরাল রশ্মি-গুচ্ছ অভিলক্ষ্য (O) কর্তৃক প্রতিসরণের পর উহার ফোকস Q তলে সদ্ এবং উল্টো



চিত্র 5.4

প্রতিবিম্ব PQ গঠন করিবে। এই প্রতিবিম্ব PQ, L_2 লেন্সের বস্তু হিসাবে কাজ করে এবং L_2 কর্তৃক অসদ্ বিম্ব P_1Q_1 গঠিত হয়। P_1Q_1 আবার L_1 লেন্সের বস্তু হিসাবে কাজ করে এবং উহা কর্তৃক P_2Q_2 প্রতিবিম্ব গঠন করে (চিত্র 5.4)।

স্বাভাবিক দর্শনে, P_1Q_1, L_2 লেন্সের ফোকস তলে অবস্থিত হয়। এই ক্ষেত্রে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব P_2Q_2 অসীমে অবস্থিত হইবে। এই প্রতিবিম্বের আকৃতি খুবই বড় এবং অসদ্ হয়।

এই দূরবীক্ষণ দুইটি নক্ষত্রের মধ্যে কৌণিক ব্যবধান (angular separation) পরিমাপ করিতে ব্যবহৃত হয়।

5.5 হাইগেন্সের অভিনেত্র যুক্ত নভোবীক্ষণ (Astronomical telescope fitted with Huygens' eyepiece)

যে কোন নভোবীক্ষণের সাধারণত দুইটি অংশ থাকে : (i) অভিনেত্র এবং (ii) অভিলক্ষ্য।

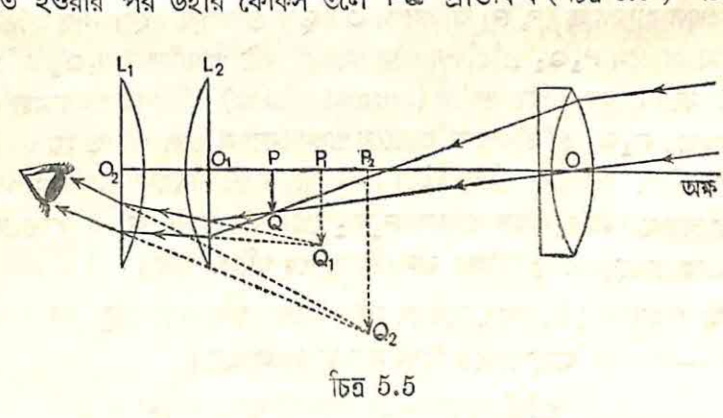
এই নভোবীক্ষণে হাইগেন্সের অভিনেত্র ব্যবহার করা হয়। এই অভিনেত্র ব্যবহার করার ফলে প্রতিবিম্বের বিকৃতি (গোলাপেরণ এবং বর্ণাপেরণ) অল্পতম হয়। কিন্তু ক্রস তার ব্যবহার করিয়া চূড়ান্ত প্রতিবিম্বের আকৃতি সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা যায় না।

নভোবীক্ষণের অভিলক্ষ্য একটি ক্রাউন কাঁচের উভয়োত্তল লেন্স এবং একটি ফ্লিন্ট কাঁচের সমতলাবতল লেন্স সমন্বয়ে গঠিত। লেন্সকে এমনভাবে রাখা হয় যাহাতে রশ্মি উত্তল তলে আপতিত হয়। ইহার ফলে গোলাপেরণ অল্পতম হয়। আবার এই লেন্স সমন্বয় অবার্ণ হইবে।

অভিলক্ষ্যের ফোকস দূরত্ব ও অভিনেত্রের ফোকস দূরত্বের অনুপাত-ই হইল দূরবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা। সুতরাং ফোকস দূরত্ব বেশী হইলে বিবর্ধন ক্ষমতা বর্ধিত হয়। আবার, কোন বস্তুর দুই নিকট বিন্দু অভিলক্ষ্যের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন হইলে $\theta = \frac{1{\cdot}22\,\lambda}{D}$ হইবে, যেখানে λ = আপতিত রশ্মির তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং D = অভিলক্ষ্যের ব্যাস। অতএব নভোবীক্ষণের বিশ্লেষণী ক্ষমতা বাড়ানোর জন্য অভিলক্ষ্যের ব্যাস বেশী হওয়া প্রয়োজন।

কার্যপ্রণালী (Action) :

অনন্তে অবস্থিত কোন বস্তু হইতে আগত সমান্তরাল রশ্মি অভিলক্ষ্য দ্বারা প্রতিসৃত হওয়ার পর উহার ফোকস তলে PQ প্রতিবিম্ব (চিত্র 5.5) গঠন করে।



চিত্র 5.5

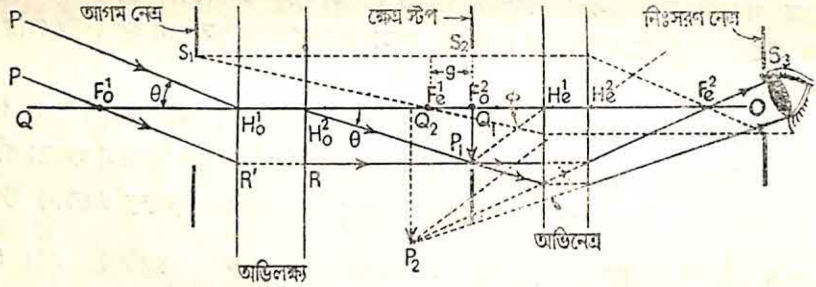
এই প্রতিবিম্ব L_2 লেন্সের বস্তুর কাজ করে এবং প্রতিসরণের পর P_1Q_1 সদ্‌বিম্ব গঠিত হয়। P_1Q_1 প্রতিবিম্ব আবার L_1 লেন্সের বস্তুর কাজ করে এবং চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব

P_2Q_2 গঠন করে। স্পষ্ট দর্শনের ক্ষেত্রে P_2Q_2 প্রতিবিম্ব প্রথম ফোকস দূরত্বের মধ্যে এবং স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে উহা প্রথম ফোকস তলে অবস্থিত হইবে।

প্রতিবিম্বের আকৃতি পরিমাপের জন্য ক্রস তারকে P_1Q_1 তলে রাখা হয়।

5.6 নভোবীক্ষণের নীতি এবং বিবর্ধন ক্ষমতা (Principle of an astronomical telescope and its magnifying power)

নভোবীক্ষণ দুইটি অভিসারী লেন্স সমন্বয় O (অভিলক্ষ্য) এবং E (অভিনেত্র) লইয়া গঠিত। নভোবীক্ষণে প্রতিবিম্ব গঠন 5.6 চিত্রে দেখানো হইয়াছে।



চিত্র 5.6

$H_o{}^1$ এবং $H_o{}^2$→অভিলক্ষ্যের প্রথম এবং দ্বিতীয় মুখ্য তল (principal plane)।

$H_e{}^1$ এবং $H_e{}^2$→অভিনেত্রের প্রথম এবং দ্বিতীয় মুখ্য তল।

$F_o{}^1$ এবং $F_o{}^2$→অভিলক্ষ্যের প্রথম এবং দ্বিতীয় মুখ্য ফোকস।

$F_e{}^1$ এবং $F_e{}^2$→অভিনেত্রের প্রথম এবং দ্বিতীয় মুখ্য ফোকস।

সমান্তরাল রশ্মিগুচ্ছ (P, P) অভিলক্ষ্য O কর্তৃক প্রতিসৃত হইবার পর অভিলক্ষ্যের দ্বিতীয় ফোকস তলে P_1Q_1 প্রতিবিম্ব গঠন করে। এই প্রতিবিম্ব P_1Q_1 অভিনেত্রের বস্তুর কাজ করে। স্বাভাবিক দর্শনে (normal vision) অভিনেত্রের অবস্থান এইরূপ করা হয় যাহাতে P_1Q_1 প্রতিবিম্ব অভিনেত্রের প্রথম ফোকস তলে পতিত হয়। এক্ষেত্রে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অসীমে গঠিত হইবে। আবার স্পষ্ট দর্শনে (distinct vision) অভিনেত্রের অবস্থান এইরূপ হয় যাহাতে P_1Q_1 প্রতিবিম্ব প্রথম ফোকস দূরত্বের মধ্যে থাকে। এক্ষেত্রে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অল্পতম দূরত্বে গঠিত হইবে।

বিবর্ধন ক্ষমতা—প্রতিবিম্ব চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে এবং বস্তু চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে—তাহাদের অনুপাতকে বিবর্ধন ক্ষমতা বলা হয়।

$$\text{বিবর্ধন ক্ষমতা } M = \frac{\text{প্রতিবিম্ব চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে } (\phi)}{\text{বস্তু চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে } (\theta)}$$

অথবা $M = \frac{H_o{}^2F_o{}^2}{H_e{}^1\,F_o{}^2} = \frac{f_o}{H_e{}^1\,Q_1}$ [$\Delta\, P_1Q_1H_o{}^2$ এবং $\Delta P_1Q_1H_e{}^1$ হইতে]

(*a*) স্পষ্ট দর্শনের ক্ষেত্রে $H_e{}^2Q_2 = D_e$ = প্রতিবিম্ব দূরত্ব এবং $H_e{}^1Q_1$ = বস্তু দূরত্ব।

$$\therefore \quad \frac{1}{D_e} - \frac{1}{H_e{}^1Q_1} = -\frac{1}{f_e}$$

অথবা, $$\frac{1}{H_e{}^1Q_1} = \frac{1}{f_e} + \frac{1}{D_e}$$

$$\therefore \quad H_e{}^1Q_1 = \frac{f_eD_e}{f_e + D_e} \quad \cdots (5.8)$$

$$\therefore \quad \text{বিবর্ধন ক্ষমতা } M = f_o \times \frac{1}{H_e{}^1Q_1} = f_o\frac{f_e + D_e}{f_eD_e} \quad \cdots (5.9)$$

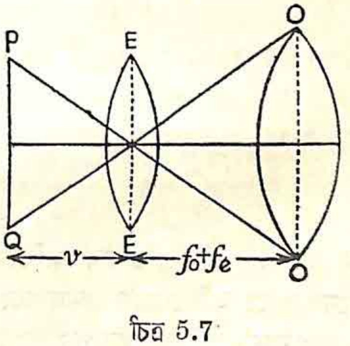
(*b*) স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে, $H_e{}^2Q_2 = \infty$ এবং $H_e{}^1Q_1$ = বস্তু দূরত্ব $= f_e$

$$\therefore \quad \text{বিবর্ধন ক্ষমতা } M = f_o \times \frac{1}{H_e{}^1Q_1} = \frac{f_o}{f_e} \quad \cdots (5.10)$$

স্পষ্ট দর্শনে নভোবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা স্বাভাবিক দর্শন অপেক্ষা বেশী হয়।

5.7 দূরবীক্ষণের আগম নেত্র বা প্রবেশ দ্বারক এবং নিঃসরণ নেত্র বা নির্গম দ্বারক (Entrance pupil and exit pupil of a telescope)

মনে করি, 5.7 চিত্রে OO এবং EE কোন দূরবীক্ষণের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্র লেন্স তলের ব্যাস, এক্ষেত্রে PQ হইল অভিনেত্র কর্তৃক অভিলক্ষ্যের প্রতিবিম্ব। যদি PQ-এর সাইজ (**size**) তারারন্ধ্র বা চোখের মণির (**pupil**) সমান হয়, তবে প্রতিবিম্ব সর্বাপেক্ষা উজ্জ্বল হইবে। এখানে PQ-কে দূরবীক্ষণের নির্গম দ্বারক বা নিঃসরণ নেত্র এবং অভিলক্ষ্যের ছিদ্র বা উন্মেষের (**aperture**) ব্যাস OO-কে আগম নেত্র বা প্রবেশ দ্বারক বলা হয়।



চিত্র 5.7

স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $u = f_o + f_e$ এবং প্রতিবিম্ব দূরত্ব $= v$.

$$\therefore \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{f_e} - \frac{1}{f_o + f_e} = \frac{f_o}{f_e(f_o + f_e)} \quad \cdots (5.11)$$

$$\therefore \quad v = \frac{f_e(f_o + f_e)}{f_o} \quad \cdots (5.12)$$

আবার, $$\frac{\text{বস্তুর ব্যাস}}{\text{প্রতিবিম্বের ব্যাস}} = \frac{\text{বস্তু দূরত্ব}}{\text{প্রতিবিম্ব দূরত্ব}}$$

অথবা, $\frac{D}{d} = \frac{f_o+f_e}{v} = \frac{(f_o+f_e)f_o}{f_e(f_o+f_e)} = \frac{f_o}{f_e}$

∴ বিবর্ধন $M = \frac{D}{d}$

নিঃসরণ নেত্র বা নির্গম দ্বারক তারারন্ধ্রের সমান হইলে আমরা লিখিতে পারি

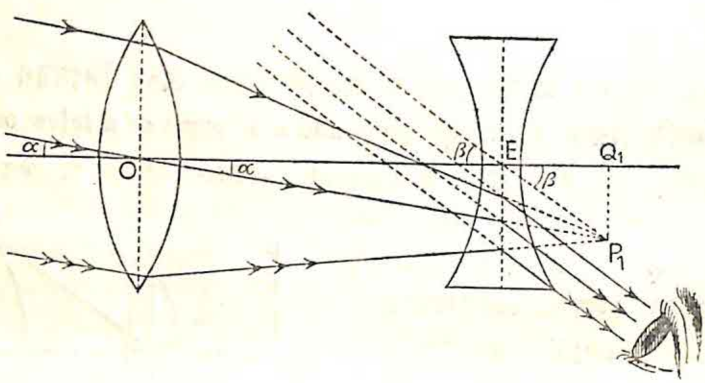
$$M = \frac{D}{p} \quad \cdots \quad (5.13)$$

যেখানে p হইল তারারন্ধ্র ব্যাস।

5.8 গ্যালিলিওর দূরবীক্ষণ (Galilean telescope)

গ্যালিলিওর অভিলক্ষ্য লেন্সটি অভিসারী (converging) কিন্তু অভিনেত্র লেন্সটি অবতল লেন্স হওয়ায় চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব এবং বস্তু সমশীর্ষ হয়।

বস্তু অনন্তে অবস্থিত বলিয়া আগত রশ্মিগুচ্ছ সমান্তরাল ধরা যাইতে পারে। সমান্তরাল রশ্মি অভিলক্ষ্যের উপর আপতিত হয় এবং প্রতিসরণের পর P_1Q_1 প্রতিবিম্ব



চিত্র 5.8

গঠন করে। এই প্রতিবিম্ব অভিনেত্রের অসদ্ বস্তু হিসাবে কাজ করে। স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে অভিনেত্রকে এমনভাবে রাখা হয় যাহাতে EQ_1 = ফোকস দূরত্ব হয়। অভিনেত্র কর্তৃক প্রতিসরণের পর অসীমে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব গঠন করে (চিত্র 5.8)।

স্পষ্ট দর্শনের ক্ষেত্রে অভিনেত্র লেন্সকে এমনভাবে রাখা হয় যাহাতে P_1Q_1 প্রতিবিম্ব প্রথম ফোকস দূরত্বের মধ্যে অবস্থিত হয়। এক্ষেত্রে অভিনেত্র P_2Q_2 প্রতিবিম্ব (চিত্র 5.9) গঠন করে।

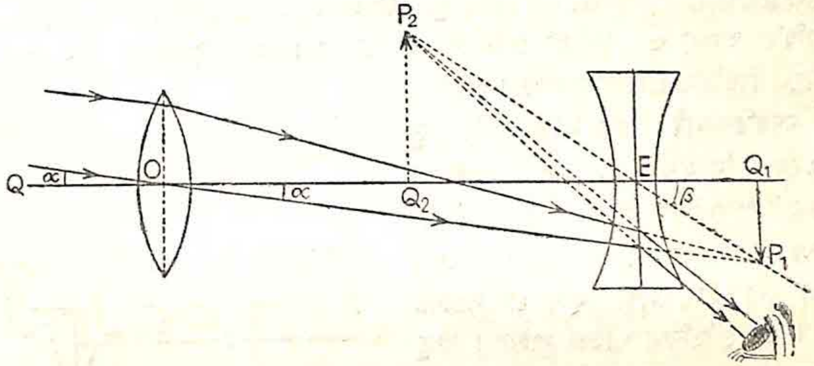
বিবর্ধন (Magnification) :

বিবর্ধন ক্ষমতা, M = $\frac{\text{প্রতিবিম্ব চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে}}{\text{বস্তু চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে}}$

স্বাভাবিক দর্শনে, $M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\angle P_1EQ_1}{\angle P_1OQ_1} = \frac{OQ_1}{EQ_1} = \frac{f_o}{f_e} \quad \cdots \quad (5.14)$

স্পষ্ট দর্শনে, $M=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{OQ_2}{EQ_2}=\frac{f_o}{EQ}$

এখন, $\frac{1}{EQ_2}-\frac{1}{EQ_1}=\frac{1}{f_e}$



চিত্র 5.9

অথবা, $\frac{1}{D}-\frac{1}{EQ_1}=\frac{1}{f_e}$ ($EQ_2=D=$ ন্যূনতম দূরত্ব)

$\therefore \quad EQ_1=\frac{f_eD}{D-f_e}$

$$\therefore \quad M=\frac{f_o}{f_e}\left(1-\frac{f_e}{D}\right) \qquad \cdots (5.15)$$

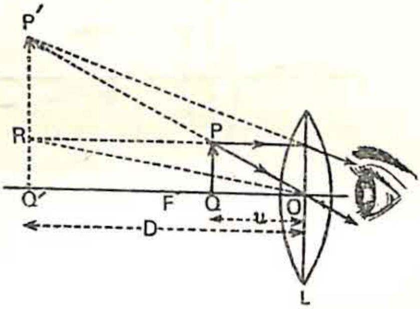
5.9 নভোবীক্ষণ এবং গ্যালিলিওর দূরবীক্ষণের মধ্যে তুলনা (Comparison between astronomical telescope and Galilean telescope)

নভোবীক্ষণ	গ্যালিলিওর দূরবীক্ষণ
(i) অনন্তের বস্তু দেখা যায়।	(i) অনন্তের বস্তু দেখা যায়।
(ii) অভিলক্ষ্যের ফোকস দূরত্ব অভিনেত্র অপেক্ষা বেশী।	(ii) অভিলক্ষ্যের ফোকস দূরত্ব অভিনেত্র অপেক্ষা বেশী।
(iii) অভিনেত্র হইল একটি উত্তল লেন্স।	(iii) অভিনেত্রহইল একটি অবতল লেন্স।
(iv) স্বাভাবিক দর্শনে নলের দৈর্ঘ্য লেন্স দুইটির ফোকস দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান।	(iv) স্বাভাবিক দর্শনে নলের দৈর্ঘ্য লেন্স দুইটির ফোকস দৈর্ঘ্যের অন্তরফলের সমান।
(v) নভোবীক্ষণেক্রস তারব্যবহার করা যায়।	(v) ক্রস তার ব্যবহার করা যায় না।
(vi) যৌগিক অভিনেত্র ব্যবহার করিলে নভোবীক্ষণ গোলাপেরণ এবং বর্ণাপেরণ মুক্ত হয়।	(vi) এক্ষেত্রে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব ত্রুটিপূর্ণ হয়।

5.10 বিবর্ধক লেন্স বা সরল অণুবীক্ষণ (Simple microscope)

খুব ক্ষুদ্র বস্তু যাহা খালি চোখে দেখা যায় না তাহা স্পষ্ট ও বড় করিয়া দেখার জন্য বিবর্ধক লেন্স বা সরল অণুবীক্ষণ ব্যবহার করা হয়। ইহা একটি অতি সাধারণ উত্তল লেন্স। আমরা জানি কোন বস্তুকে উত্তল লেন্সের প্রথম ফোকস দূরত্বে রাখিলে বিবর্ধিত অসদ্ ও সমশীর্ষ প্রতিবিম্ব গঠিত হয়। কাজেই উত্তল লেন্স ব্যবহার করিলে বিবর্ধিত প্রতিবিম্ব পাওয়া যাইবে।

কার্যপ্রণালী ঃ মনে করি, একটি বস্তু PQ-কে বিবর্ধক লেন্সের সাহায্যে বড় করিয়া দেখিতে হইবে। উহাকে উত্তল লেন্স L-এর প্রথম ফোকস দূরত্বের (OF) মধ্যে রাখা হইল, লেন্স কর্তৃক প্রতিসরণের পর P′Q′ প্রতিবিম্ব পাওয়া যাইবে। বস্তু হইতে লেন্সের দূরত্ব এমন করা হয় যাহাতে প্রতিবিম্ব ন্যূনতম দূরত্বে গঠিত হয়। (চিত্র 5.10)



চিত্র 5.10

বিবর্ধন ঃ সরল অণুবীক্ষণে প্রতিবিম্ব চোখের নিকট বিন্দুতে গঠিত হয়।

$$\text{বিবর্ধন,}\quad M=\frac{\text{নিকট বিন্দুতে অবস্থিত প্রতিবিম্ব কর্তৃক উৎপন্ন কোণ}}{\text{নিকট বিন্দুতে অবস্থিত বস্তু কর্তৃক উৎপন্ন কোণ}}$$

$$=\frac{\angle P'OQ'}{\angle ROQ'}=\frac{P'Q'}{RQ'}$$

$$\therefore\quad M=\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{OQ'}{OQ}=\frac{D}{u} \qquad \cdots (5.16)$$

$$\text{আবার,}\quad \frac{1}{D}-\frac{1}{u}=-\frac{1}{f}$$

$$\text{অথবা,}\quad 1-\frac{D}{u}=-\frac{D}{f}$$

$$\text{অথবা,}\quad 1-M=-\frac{D}{f} \qquad \left(\because\quad M=\frac{D}{u}\right)$$

$$\therefore\quad M=1+\frac{D}{f} \qquad \cdots (5.17)$$

(5.17) সমীকরণ হইতে সহজেই বোঝা যায় যে উত্তল লেন্সের ফোকস দূরত্ব যত কম হইবে বিবর্ধন তত বেশী হইবে।

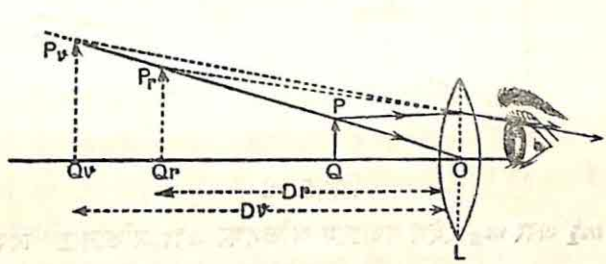
স্বাভাবিক দর্শনের ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব অনন্তে গঠিত হয়। এক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব $u=f$ এবং প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v=\infty$

$$\therefore \text{ বিবর্ধন, } M = \frac{D}{f} \qquad \cdots (5.18)$$

স্বাভাবিক চোখের ক্ষেত্রে, $D = 25$ cm.

5.11 সরল অণুবীক্ষণের বা বিবর্ধক লেন্সের অবার্ণতা (Achromatism of simple microscope)

আমরা জানি যে একটি লেন্স ব্যবহার করিলে প্রতিবিম্বে বর্ণাপেরণ ত্রুটি হয়। কিন্তু বিবর্ধক লেন্স বা সরল অণুবীক্ষণ যন্ত্র যে প্রতিবিম্ব গঠন করে তাহা অবার্ণ।



চিত্র 5.11

5.11 চিত্রে P_rQ_r = লালবর্ণের প্রতিবিম্বের সাইজ

P_vQ_v = বেগুনী বর্ণের প্রতিবিম্বের সাইজ

D_r = লাল বর্ণের ক্ষেত্রে ন্যূনতম দূরত্ব

D_v = বেগুনী বর্ণের ক্ষেত্রে ন্যূনতম দূরত্ব

$\therefore$ লাল প্রতিবিম্ব P_rQ_r-এর বীক্ষণ কোণ $\theta_r = \frac{P_rQ_r}{D} = \frac{PQ}{OQ}$

এবং বেগুনী প্রতিবিম্বে P_vQ_v-এর বীক্ষণ কোণ $\theta_v = \frac{P_vQ_v}{D} = \frac{PQ}{OQ}$

$$\therefore \theta_r = \theta_v$$

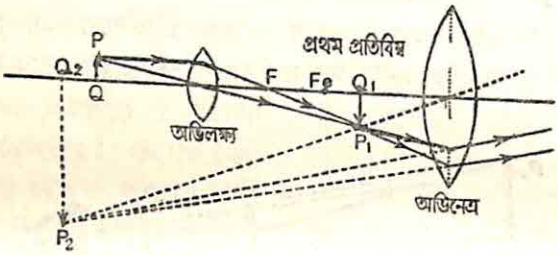
অতএব বিভিন্ন বর্ণের প্রতিবিম্বগুলি একই বীক্ষণ কোণ উৎপন্ন করার ফলে প্রতিবিম্ব অবার্ণ হয়।

5.12 যৌগিক অণুবীক্ষণ (Compound microscope)

সরল অণুবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা উহার লেন্সের ফোকস দূরত্বের উপর নির্ভরশীল। ফোকস দূরত্ব যত কম হইবে বিবর্ধন ক্ষমতা তত বেশী হইবে। ফোকস দূরত্ব যত ইচ্ছা কমানো সম্ভব নয় বলিয়া অতি ক্ষুদ্র বস্তুকে প্রয়োজন মতো বিবর্ধিত করা যায় না। সেইজন্য যৌগিক অণুবীক্ষণ ব্যবহার করা হয়।

যৌগিক অণুবীক্ষণ দুইটি উত্তল লেন্স সমন্বয়ে গঠিত। বস্তুর নিকটবর্তী লেন্সকে অভিলক্ষ্য (objective) এবং দূরবর্তী লেন্সকে অভিনেত্র বলা হয়। অভিনেত্রের

ফোকস দূরত্ব এবং উন্মেষ বা রন্ধ্র অভিলক্ষ্য অপেক্ষা কম হয়। যৌগিক অণুবীক্ষণ দ্বারা প্রতিবিম্ব গঠন 5.12 চিত্রে দেখানো হইয়াছে। PQ বস্তু অভিলক্ষ্য কর্তৃক প্রতিসৃত হইয়া P_1Q_1 প্রতিবিম্ব গঠন করে। P_1Q_1 প্রতিবিম্ব অভিনেত্রের বস্তুর কাজ করে এবং প্রতিসরণের পর চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব P_2Q_2 গঠন করে।



চিত্র 5.12

মনে করি, m_1 এবং m_2 হইল যথাক্রমে অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা। অভিনেত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা সরল অণুবীক্ষণের মতো হওয়ায় $m_2 = 1 + \frac{D}{f_e}$, যেখানে f_e হইল অভিনেত্রের ফোকস দূরত্ব। এখন আমরা অভিলক্ষ্যের বিবর্ধন ক্ষমতা বাহির করিব।

মনে করি, u এবং v হইল যথাক্রমে অভিলক্ষ্য হইতে PQ বস্তু দূরত্ব এবং P_1Q_1 প্রতিবিম্ব দূরত্ব।

$$\therefore \quad \frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f_o}, \text{ যেখানে } f_o = \text{অভিলক্ষ্যের ফোকস দূরত্ব}$$

$$\text{অথবা,} \quad \frac{v}{u} = \frac{v}{f_o} - 1$$

$$\therefore \quad m_1 = \left(\frac{v}{f_o} - 1\right) \qquad \cdots (5.19)$$

যৌগিক অণুবীক্ষণের অভিনেত্র সরল অণুবীক্ষণের ন্যায় কার্য করে। সুতরাং স্পষ্ট দর্শনের জন্য অভিনেত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা

$$m_2 = 1 + \frac{D}{f_e} \quad \text{যেখানে } f_e = \text{অভিনেত্রের ফোকস দূরত্ব}$$

অতএব, যৌগ অণুবীক্ষণের মোট বিবর্ধন ক্ষমতা, $m = m_1 \times m_2$

$$= \left(\frac{v}{f_o} - 1\right)\left(1 + \frac{D}{f_e}\right) \qquad \cdots (5.20)$$

স্পষ্ট দর্শনে $f_o << v$ অতএব, $\frac{v}{f_o} - 1 \approx \frac{v}{f_o}$

$$\therefore \quad m = \frac{v}{f_o}\left(1 + \frac{D}{f_e}\right)$$

স্বাভাবিক দর্শনে বস্তু অসীমে অবস্থিত হওয়ায় $m_2 = \frac{D}{f_e}$

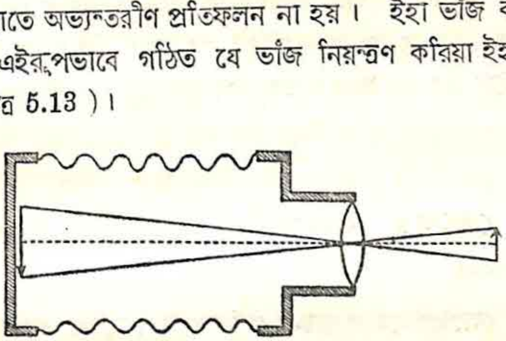
$$\therefore \quad m = \frac{v}{f_o} \cdot \frac{D}{f_e}$$

সুতরাং বিবর্ধন ক্ষমতা বৃদ্ধি পাইবে যখন (i) f_o ছোট হইবে, (ii) f_e ছোট হইবে, অথবা (iii) v-এর মান বেশী হইবে। সেইজন্য অণুবীক্ষণ নলকে যতটা সম্ভব বাড়ানো হয়।

5.13 ফটোগ্রাফিক ক্যামেরা (Photographic Camera)

ইহা একটি আলোকীয় যন্ত্র। ফটোগ্রাফিক প্লেটের উপর কোন বস্তুর স্থায়ী প্রতিবিম্ব গঠন করিতে ফটোগ্রাফিক ক্যামেরা ব্যবহার করা হয়। ইহা নিম্নলিখিত অংশগুলি লইয়া গঠিত ঃ

(ক) **আলোক নিরুদ্ধ বাক্স (Light-tight chamber) ঃ** ইহার অভ্যন্তর কালো রং করা থাকে যাহাতে অভ্যন্তরীণ প্রতিফলন না হয়। ইহা ভাঁজ করা কালো চামড়া বা কাগজের দ্বারা এইরূপভাবে গঠিত যে ভাঁজ নিয়ন্ত্রণ করিয়া ইহার দৈর্ঘ্য কমানো বা বাড়ানো যায় (চিত্র 5.13)।



চিত্র 5.13

(খ) **ক্যামেরা লেন্স (Camera lens) ঃ** বাক্সের সম্মুখভাগে অভিসারী লেন্স সমন্বয় থাকে। ইহাকে ক্যামেরা লেন্স বা অভিলক্ষ্য (objective) বলে। গোলাপেরণ ও বর্ণাপেরণ মুক্ত করার জন্য লেন্স সমন্বয় ব্যবহার করা হয়। লেন্সকে সামনে-পিছনে করিয়া লক্ষ্য বস্তুকে ফোকস করা হয়।

(গ) **ছদ বা সচ্ছিদ্র পর্দা (Diaphragm) ঃ** ইহা একটি নিয়ন্ত্রণাধীন গোলাকৃতি রন্ধ্র। এই রন্ধ্রের মধ্য দিয়া আলো প্রবেশ এবং ফটোগ্রাফিক প্লেটে প্রতিবিম্ব সৃষ্টি করে। তাই ইহা নিয়ন্ত্রণ করিয়া লেন্সের উপর আপতিত আলোর পরিমাণ কমানো-বাড়ানো হয়।

(ঘ) **সাটার বা কপাট (Shutter) ঃ** ইহার দ্বারা রন্ধ্রের মুখ বন্ধ রাখা হয় এবং

আলোকসম্পাতের কাল নিয়ন্ত্রণ করা হয়। এই আলোকসম্পাতকাল (exposure time) সাধারণত এক সেকেণ্ডের ভগ্নাংশ হইয়া থাকে।

(ঙ) পর্দা (Screen) ঃ ইহা একটি ঈষদ্‌স্বচ্ছ পর্দা। ইহা ক্যামেরার পিছন দিকে, লেন্সের বিপরীত দিকে অবস্থিত।

কার্য ঃ কোনও বস্তুর আলোকচিত্র লইতে হইলে বস্তুর সামনে একটি ক্যামেরা নির্দিষ্ট ব্যবধানে রাখিয়া পর্দার উপর উহার প্রতিবিম্ব তৈয়ারী করা হয়। পর্দা ও লেন্সের মধ্যবর্তী দূরত্ব হ্রাস-বৃদ্ধি করিয়া বস্তুর স্পষ্ট প্রতিবিম্ব গঠন করা হয়। এখন সাটার বন্ধ রাখিয়া একটি ফটোগ্রাফিক প্লেট পর্দার স্থানে রাখা হয়। ইহার পর সাটার প্রয়োজনমত সময়ের জন্য খোলা রাখিয়া প্লেটের উপর আলোকসম্পাত করা হয়।

ফটোগ্রাফিক প্লেট একটি সেলুলয়েডের স্বচ্ছ প্লেটের উপর জেলাটিন ও সিলভার হ্যালাইড-এর আস্তরণ দিয়া তৈয়ারী করা হয়। ইহার উপর আলো পড়িলে আলোর তীব্রতানুসারে প্লেটের বিভিন্ন স্থানের হ্যালাইড ধাতব সিলভারে বিজারিত হয়। অতঃপর এই আলোকসম্পাতিত (exposed) প্লেট বা ফিল্মকে "ডেভেলপার" নামক দ্রবণে ডুবানো হয়। আলোর তীব্রতার সমানুপাতিক হারে প্লেটের বিভিন্ন স্থানে কালো সিলভারের আস্তরীণ জমে। ইহাই 'নেগেটিভ' নামে পরিচিত। 'পজেটিভ' প্রস্তুত করিবার জন্য আলোক সংবেদী ফটোগ্রাফিক কাগজের উপর আলোকের সাহায্যে নেগেটিভের ছাপ লইয়া তাহাকে আবার ডেভেলপ করা হয়। এইভাবে বস্তুর আলোক-চিত্র পাওয়া যায়।

5.14 ক্যামেরা লেন্সের আবশ্যকীয় গুণাবলী (Requirements of Camera lens)

একটি ক্যামেরা লেন্সের যে গুণাবলী থাকিলে উহা অধিক সুষ্ঠুভাবে কার্য সম্পন্ন করিতে পারে তাহা নিম্নে দেওয়া হইল।

(i) অবার্ণতা (Achromatism)—ফটো তোলার জন্য বর্ণালির হলুদ এবং বেগুনী বর্ণের প্রয়োজন। অতএব লেন্সকে এই দুই বর্ণের ক্ষেত্রে অবার্ণ হইতে হইবে।

(ii) প্রতিবিম্বের আকৃতি (Size of an image)—প্রতিবিম্ব এইরূপ হইবে যাহাতে অভিলক্ষ্যের (object) প্রতিটি বিন্দুর প্রতিবিম্ব 0·001″ বেশী না হয়।

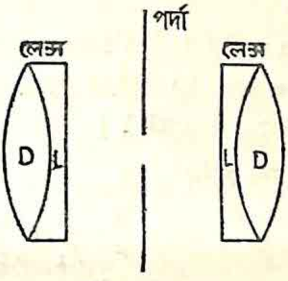
(iii) অবিকৃতি (Non-distortion)—প্রতিবিম্বকে যতটা সম্ভব বিকৃতিমুক্ত করিতে হইবে। ইহার জন্য দুই প্রকার লেন্স সমন্বয়ে অভিলক্ষ্য গঠন করা হয় এবং উহাদের মাঝখানে থাকে রন্ধ্র।

(iv) ফোকসের গভীরতা (Depth of focus)—অভিলক্ষ্য এইরূপ হইবে যাহাতে বস্তুর স্পষ্ট প্রতিবিম্ব গঠিত হয়। ইহা বস্তুর দূরত্ব, অভিলক্ষ্যের উন্মেষ এবং অভিলক্ষ্যের ফোকস দূরত্বের উপর নির্ভর করে।

5.15 কতিপয় ক্যামেরা লেন্স (Several types of Camera lens)

(i) প্রোট্রেইট লেন্স (Portrait lens)

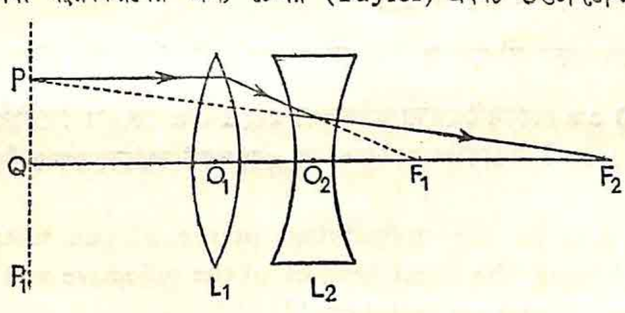
D একটি পুরু ক্রাউন কাচের তৈয়ারী উভয়োত্তল লেন্স (dence crownglass lens) এবং L একটি ফ্লিন্ট কাচের তৈয়ারী সমাবতল লেন্স (light flint glass lens) সমন্বয়ে প্রোট্রেট ইলেন্স গঠিত। এইরূপ দুইটি লেন্স সংযুক্তি লইয়া ক্যামেরা অভিলক্ষ্য গঠিত হয়। লেন্স সমন্বয়ে সমতল পৃষ্ঠ পরস্পর মুখোমুখি করা থাকে এবং উহাদের পর্দার মাঝখানে রন্ধ্র থাকে (চিত্র 5.14)। এই অভিলক্ষ্যে ফটোগ্রাফিক রেকর্ড (Photographic record) খুব তাড়াতাড়ি হয় কিন্তু প্রতিবিম্ব বিকৃতিমুক্ত নহে।



চিত্র 5.14

(ii) টেলিফটো বা দূরচিত্রক লেন্স (Telephoto lens) ঃ

আমরা জানি লেন্স কর্তৃক প্রতিবিম্ব গঠিত হইলে উহার বিবর্ধন $m = \dfrac{f}{u+f}$ হয়। কাজেই বস্তু লেন্স হইতে অনন্তে অবস্থিত হইলে বিবর্ধন খুব অল্প হয়। আবার লেন্সের ফোকস দূরত্ব ইচ্ছামতো বাড়াইলে ক্যামেরার দৈর্ঘ্য খুব বেশী হইয়া যায়। এই সকল অসুবিধা দূরীকরণের জন্য টেলর (Taylor) একটি উত্তল লেন্স এবং একটি



চিত্র 5.15

অবতল লেন্স সমন্বয় ব্যবহার করেন (চিত্র 5.15)। L_1 লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য অল্প এবং ইহা F_1 বিন্দুতে প্রতিবিম্ব গঠন করে। L_2 লেন্স এমন লওয়া হয় যাহাতে $O_2F_2 > O_2F_1$ হয়। L_2 লেন্স চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব গঠন করিবে। প্রতিটি লেন্স অবার্ণ হওয়া সত্ত্বেও প্রতিবিম্বে অন্যান্য ত্রুটি আসিবে।

উদাহরণ (Examples)

1. একটি রামসডেন অভিনেত্রের উভয় লেন্সের ফোকস দৈর্ঘ্য 3·2 cm এবং উহারা 2·4 cm. ব্যবধানে রাখা আছে। এক্ষেত্রে অভিনেত্রের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

[In a Ramsden's eyepiece, the lenses are each of focal length 3·2 cm are separated by a distance of 2·4 cm. What is its equivalent focal length ?] (C. U. '79)

আমরা জানি

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{a}{f_1f_2}$$

এক্ষেত্রে $f_1=f_2=3{\cdot}2$ cm

এবং $a=2{\cdot}4$ cm

$$\therefore\quad \frac{1}{F}=\frac{1}{3{\cdot}2}+\frac{1}{3{\cdot}2}-\frac{2{\cdot}4}{(3{\cdot}2)^2}$$

$$=\frac{3{\cdot}2+3{\cdot}2-2{\cdot}4}{(3{\cdot}2)^2}=\frac{4}{(3{\cdot}2)^2}$$

$$=\frac{4}{10{\cdot}24}=\frac{1}{2{\cdot}56}$$

$$\therefore\quad F=2{\cdot}56 \text{ cm}$$

অতএব রামসডেন অভিনেত্রের তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য 2·56 cm হইবে।

2. 100 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের অভিলক্ষ্য এবং 1 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের অভিনেত্রের সমাবন্ধে গঠিত একটি নভোবীক্ষণের স্বাভাবিক এবং স্পষ্ট দর্শনের ক্ষেত্রে বিবর্ধন ক্ষমতা কত হইবে ?

[What will be the magnifying power of an astronomical telescope having the focal lengths of the objective and eyepiece are respectively 100 cm and 2 cm ?]

আমরা জানি, স্বাভাবিক দৃষ্টি $M_n=\dfrac{f_o}{f_e}$

এবং স্পষ্ট দৃষ্টি, $M_d=\dfrac{f_o}{f_e}\left(1+\dfrac{f_e}{D}\right)$

এক্ষেত্রে $f_o=100$ cm ; $f_e=1$ cm ; $D=25$ cm

$$\therefore\quad M_n=\frac{f_o}{f_e}=\frac{100}{1}=100$$

এবং $M_a = \frac{f_o}{f_e}\left(1+\frac{f_e}{D}\right)$

$$= \frac{100}{1}\left(1+\frac{1}{25}\right)$$

$$= 100 \times \frac{26}{25} = 104.$$

3. একটি নভোবীক্ষণ 10 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের অভিলক্ষ্য এবং 1 cm ফোকস দৈর্ঘ্যের অভিনেত্র লইয়া গঠিত। অভিলক্ষ্য হইতে 60 cm দূরে অবস্থিত একটি বস্তুর প্রতিবিম্ব চোখ হইতে 10 cm দূরে পাওয়া যাইলে প্রতিবিম্বের বিবর্ধন এবং দূরবীক্ষণ নলের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[An astronomical telescope is constructed with an objective and an eyepiece having focal lengths 10 cm and 1 cm. If the image of an object situated at 60 cm from the objective is formed at a distance of 10 cm from the eye, calculate the magnification of the image and the length of the tube.]

আমরা জানি, $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f_o}$

এক্ষেত্রে (অভিলক্ষ্য লেন্সের ক্ষেত্রে) $u = 60$ cm, $f_o = -10$ cm

$$\therefore \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{u} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{60} = -\frac{1}{12}$$

সুতরাং $v = -12$ cm

$\therefore$ অভিলক্ষ্য কর্তৃক উৎপন্ন বিবর্ধন $m_o = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

অভিনেত্র লেন্সের ক্ষেত্রে $v = 10$ cm ; $f_e = -1$ cm

$$\therefore \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{v} - \frac{1}{f_e} = \frac{1}{10} + 1 = \frac{11}{10}$$

$$\therefore \quad v = \frac{10}{11} = 0{\cdot}99 \text{ cm}$$

$\therefore$ অভিনেত্র লেন্স কর্তৃক উৎপন্ন বিবর্ধন $m_e = \frac{10}{10/11} = 11$

$\therefore$ মোট বিবর্ধন $m = m_o \times m_e = \frac{1}{5} \times 11 = 2{\cdot}2$

এবং দূরবীক্ষণ নলের দৈর্ঘ্য $= 12 + \frac{10}{11} = \frac{142}{11} = 12{\cdot}9$ cm।

4. একটি অণুবীক্ষণের অভিলক্ষ্যের ফোকস দৈর্ঘ্য 1″ এবং অভিনেত্রের ফোকস-দৈর্ঘ্য $\frac{10}{9}$″ ; লেন্স দুইটিকে 4″ তফাতে রাখা আছে এবং অণুবীক্ষণকে একটি লক্ষ্যবস্তুর প্রতি এমনভাবে ফোকস করা হইল যে চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অভিনেত্র হইতে 10″ দূরে গঠিত

হইল। অণুবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা এবং অভিলক্ষ্য হইতে লক্ষ্যবস্তুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

[The objective of a microscope has a focal length of 1″ and the eyepiece of focal length of $\frac{10}{9}$″. The lenses are fixed 4″ apart and the microscope is focussed on an object so as to form the final image 10″ from the eye-piece. Calculate the magnification of the microscope and the position of the object from the objective.]

আমরা জানি, $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f_e}$

এক্ষেত্রে (অভিনেত্র লেন্সের ক্ষেত্রে) $v=10''$; $f_e=-\frac{10}{9}''$;

$$\therefore\ \frac{1}{u}=\frac{1}{v}-\frac{1}{f_e}=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}=1$$

$$\therefore\ u=1''$$

অতএব অভিলক্ষ্য হইতে ইহার দূরত্ব $=4''-1''=3''$

$\therefore$ অভিলক্ষ্যের ক্ষেত্রে প্রতিবিম্ব দূরত্ব $v=-3''$; $f_o=-1''$

$$\therefore\ \frac{1}{u}=\frac{1}{v}-\frac{1}{f_e}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ u=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}''$$

$\therefore$ অভিলক্ষ্য হইতে বস্তুর দূরত্ব $=1\frac{1}{2}''$

অণুবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা, $m=\frac{v}{u}\left(1+\frac{D}{f_e}\right)$

$$=\frac{3}{3/2}\left(1+\frac{10}{10/9}\right)$$

$$=2(1+9)=20$$

5. একটি যৌগ অণুবীক্ষণের অভিলক্ষ্যের ফোকস দৈর্ঘ্য 1 cm এবং অভিনেত্রের ফোকস দৈর্ঘ্য 5 cm ; চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অভিনেত্র হইতে 25 cm দূরে অবস্থিত হইলে লেন্স-দ্বয়ের দূরত্ব কত হইবে ? ধরিয়া লইলাম যে অণুবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা হইল 75.

[A compound microscope has an objective of focal length 1 cm and an eyepiece of focal length 2·5 cm. If the final image is situated at a distance of 25 cm from the eye-piece, what will be the distance between the two lenses. Assume the magnifying power of the microscope is 75.]

আমরা জানি, $m=\frac{LD}{f_o f_e}$

এখানে $m=75$, $f_o=1$ cm ; $f_e=5$ cm ; D$=25$ cm

$\therefore \quad 75=\frac{L}{1}\times\frac{25}{5}=5\,L$

$\therefore \quad L=\frac{75}{5}=15$ cm।

প্রশ্নাবলী (Questions)

1. একটি পরিষ্কার চিত্রে রামসডেন অভিনেত্রের গঠন এবং কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যা কর। ইহার তুল্যমান ফোকস দৈর্ঘ্য কত হইবে? ইহাকে ধনাত্মক অভিনেত্র বলা হয় কেন? ইহার সুবিধা এবং অসুবিধাগুলি কি?

[Explain with a neat diagram the construction and working principle of Ramsden's eyepiece. What is its equivalent focal length? Why is it called a positive eyepiece? What are its advantages and disadvantages?] (C. U. '67)

2. একটি রামসডেন অভিনেত্রের গঠন এবং কার্যপ্রণালী বর্ণনা কর। ইহার সুবিধা ও অসুবিধাগুলি লেখ।

[Describe the construction and working of a Ramsden's eyepiece and state its advantages and disadvantages.] (C. U. '79)

3. রামসডেন এবং হাইগেনস-এর অভিনেত্রবর্ণনা কর। উহাদের গুণাবলী উল্লেখ কর।

[Describe Ramsden's and Huygens' eyepiece and point out their respective merits.]

4. স্বাভাবিক দৃষ্টিতে একটি গ্যালিলিও দূরবীক্ষণ ফোকস করা হইল। উহার বিবর্ধন ক্ষমতা কত হইবে? স্পষ্ট দৃষ্টির ন্যূনতম দূরত্ব D হইলে বিবর্ধন ক্ষমতা কত হইবে?

[A Galilean telescope is adjusted for normal vision. Calculate its magnifying power. What will be the magnifying power when the least distance of distinct vision is D?] (C. U. '43)

5. একটি দূরবীক্ষণের 'বিবর্ধন ক্ষমতা' বলিতে কী বোঝ? দেখাও যে অসীম দূরত্ব ফোকাসিং-এর বেলায় নভোবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকস দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

[What do you mean by 'magnifying power' of a telescope? Show that the magnification of an astronomical telescope is equal to the ratio of the focal length of the object to the focal length of the eyepiece for infinity focussing.]

6. একটি পরিষ্কার চিত্রে যৌগ অণুবীক্ষণের গঠন এবং কার্যপ্রণালী ব্যাখ্যা কর। যন্ত্রের বিবর্ধন ক্ষমতা কাহার উপর নির্ভরশীল? ইহার একটি রাশিমালা নির্ধারণ কর।

[Describe with a neat diagram the construction and principle of action of a compound microscope. What determine the magnifying power of the instrument ? Derive an expression for it.]

(C. U. '66)

7. একটি যৌগ অণুবীক্ষণের মধ্য দিয়া আলোকরশ্মির গতিপথের চিত্র অংকন কর। প্রতিবিম্ব স্পষ্ট দৃষ্টির ন্যূনতম দূরত্বে গঠিত হইলে, বিবর্ধন ক্ষমতা বাহির কর। এই অণুবীক্ষণের সাহায্যে মাপজোক করিতে হইলে, কি ধরণের অভিনেত্র ব্যবহার করিবে এবং কেন ?

[Trace the path of rays through a compound microscope and calculate its magnifying power when the image is formed at the least distance of distinct vision. What type of eyepiece you would use with the microscope if it is to be employed for the measurement and why ?]

(C. U. '70)

8. একটি নভোবীক্ষণের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 feet এবং $\frac{1}{2}$ inch ; যখন যন্ত্রটিকে (*a*) অসীম দূরত্ব ফোকাসিং এবং স্পষ্ট দৃষ্টি ফোকাসিং-এ রাখা হইল, তখন বিবর্ধন এবং নলের দৈর্ঘ্য নির্ধারণ কর।

[The focal lengths of objective and eye-piece of an astronomical telescope are respectively 10 feet and $\frac{1}{2}$ inch. Calculate the magnification and tube-length when the instrument is focussed for (*a*) infinity and (*b*) near-point.] (Ans. 10·04 feet ; 10·04 feet)

9. একটি যৌগ অণুবীক্ষণ যন্ত্রের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 0·5 cm এবং 2·5 cm ; চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অভিনেত্র হইতে 25 cm দূরে গঠিত হইলে এবং বিবর্ধন 330 হইলে, লেন্স দুইটির দূরত্ব কত হইবে ?

[A compound microscope has an objective and eyepiece of focal lengths 0·5 cm and 2·5 cm respectively. What will be the distance between the lenses if the magnification is 330 and the final image is formed at a distance of 25 cm from the eye-piece ?]

(Ans. 16·5 cm)

10. একটি অণুবীক্ষণের অভিলক্ষ্য এবং অভিনেত্রের ফোকস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 2 cm এবং 2·75 cm ; উহারা উভয়েই পাতলা লেন্স এবং উহাদের ব্যবধান 15 cm ; চূড়ান্ত প্রতিবিম্ব অভিনেত্র হইতে 25 cm দূরে গঠিত হইলে বিবর্ধন ক্ষমতা নির্ণয় কর।

[The objective and eyepiece of a microscope are assumed to be thin lenses of focal lengths 2 cm and 2·75 cm respectively separated by a distance of 15 cm. Find the magnifying power when the final image is at 25 cm from the eyepiece.] (Ans. 63·1)

(C. U. '67)

পরিশিষ্ট

O. A. 1. মৌলিক বিন্দুসমূহ (Cardinal Points)

কোন আলোকীয় তন্ত্রের (optical system) তিন জোড়া মৌলিক বিন্দু আছে। মৌলিক বিন্দুগুলির অবস্থান হইতে ঐ আলোকীয় তন্ত্র সম্পর্কিত সমস্যাবলী সমাধান করা সম্ভব। এই মৌলিক বিন্দুগুলি হইল : (i) প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস-বিন্দু (first and second principal focal points), (ii) প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য বিন্দু (first and second principal points) এবং (iii) প্রথম ও দ্বিতীয় নোডাল বিন্দু (first and second nodal points)।

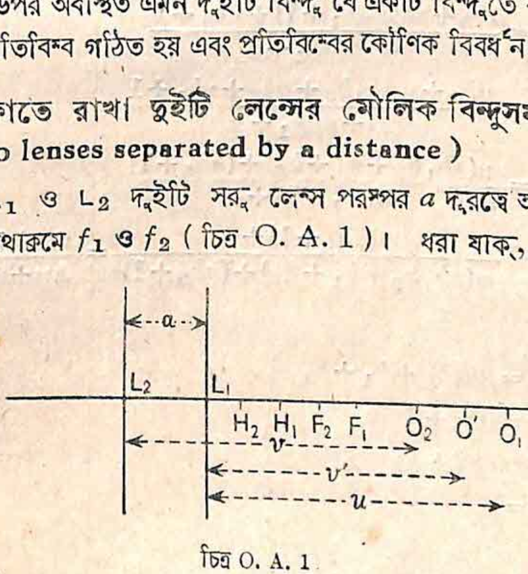
(i) **প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস-বিন্দু** : প্রথম মুখ্য ফোকাস-বিন্দু বলিতে আলোকীয় তন্ত্রের অক্ষের উপর এরূপ এক বিন্দু বুঝায় যে বিন্দুতে কোন বস্তু রাখিলে আলোকীয় তন্ত্র হইতে নির্গত রশ্মিগুচ্ছ অক্ষের সমান্তরাল হয় এবং প্রতিবিম্ব অসীমে গঠিত হয়। দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস-বিন্দু বলিতে অক্ষের উপর এমন এক বিন্দু বুঝায় যে অসীম হইতে আগত সমান্তরাল রশ্মিগুলি আলোকীয় তন্ত্রের দ্বারা প্রতিসৃত হইবার পর ঐ বিন্দুতে মিলিত হয় বা ঐ বিন্দু হইতে অপসৃত হইতেছে বলিয়া মনে হয়।

(ii) **প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য বিন্দু** : যে কোন আলোকীয় তন্ত্রের মুখ্য বিন্দু বলিতে অক্ষের উপর এমন দুটি বিন্দু বুঝায় যে একটি বিন্দুতে যদি বস্তুটিকে রাখা হয় তবে প্রতিবিম্ব অপর বিন্দুতে গঠিত হয় এবং প্রতিবিম্বের সাইজ বস্তুর সাইজের সমান হয়। এই কারণে ঐ বিন্দুদ্বয়কে একক বিন্দুও (Unit Points) বলে।

(iii) **প্রথম ও দ্বিতীয় নোডাল-বিন্দু** : যে কোন আলোকীয় তন্ত্রের নোডাল-বিন্দুদ্বয় অক্ষের উপর অবস্থিত এমন দুইটি বিন্দু যে একটি বিন্দুতে বস্তু রাখিলে অপর বিন্দুতে উহার প্রতিবিম্ব গঠিত হয় এবং প্রতিবিম্বের কৌণিক বিবর্ধন একের সমান হয়।

O. A. 2. তফাতে রাখা দুইটি লেন্সের মৌলিক বিন্দুসমূহ (Cardinal points of two lenses separated by a distance)

মনে করি, L_1 ও L_2 দুইটি সরু লেন্স পরস্পর a দূরত্বে অবস্থিত ; উহাদের ফোকাস দৈর্ঘ্য যথাক্রমে f_1 ও f_2 (চিত্র O. A. 1)। ধরা যাক, অক্ষের উপর O_1



চিত্র O. A. 1

বস্তুর অবস্থান এবং ইহা L_1 লেন্স থেকে u দূরত্বে অবস্থিত। লেন্স L_1 কর্তৃক O_1' বিন্দুতে v' দূরত্বে প্রতিবিম্ব গঠিত হইলে লেখা যায়,

$$\frac{1}{v'}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f_1}=k_1 \quad (\text{ধরি}) \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

O_1' দ্বিতীয় লেন্সের জন্য বস্তু হিসাবে কাজ করিবে; L_2 থেকে O_1'-এর দূরত্ব $(v'+a)$ এবং ইহাই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বস্তু দূরত্ব। এখন ধরি, প্রতিবিম্ব O_2 বিন্দুতে v দূরত্বে গঠিত হইল। অতএব এক্ষেত্রে,

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{v'+a}=\frac{1}{f_2}=k_2 \quad (\text{ধরি}) \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) হইতে পাই,

$$\frac{1}{v'}=k_1+\frac{1}{u}=\frac{uk_1+1}{u} \qquad \therefore \quad v'=\frac{u}{uk_1+1} \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সমীকরণ (ii) ও (iii) হইতে পাই,

$$\frac{1}{v}=k_2+\frac{1}{v'+a}$$

$$=k_2+\frac{1}{\dfrac{u}{uk_1+1}+a}$$

$$=k_2+\frac{uk_1+1}{u+a(uk_1+1)}$$

$$=\frac{uk_2+ak_2(uk_1+1)+uk_1+1}{u+a(uk_1+1)}$$

$$=\frac{uk_2+uak_1k_2+ak_2+uk_1+1}{u+auk_1+a}$$

$$=\frac{u(ak_1k_2+k_1+k_2)+(ak_2+1)}{u(ak_1+1)+a}$$

$$\therefore \quad v=\frac{u(ak_1+1)+a}{u(ak_1k_2+k_1+k_2)+(ak_2+1)}=\frac{Cu+D}{Au+B} \qquad \cdots \quad \text{(iv)}$$

যেখানে,

$$\left.\begin{aligned} A&=ak_1k_2+k_1+k_2\\ B&=ak_2+1\\ C&=ak_1+1\\ D&=a \end{aligned}\right\} \qquad \cdots \quad \text{(v)}$$

গুণ করিয়া পাই,

$$BC-AD=1 \qquad \cdots \quad \text{(vi)}$$

এখন সমীকরণ (iv) হইতে,

$$Cu+D=v(Au+B)$$

বা, $u(C-Av)=Bv-D$

$$\therefore \quad u=\frac{Bv-D}{C-Av} \qquad \cdots \quad \text{(vii)}$$

প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য ফোকাস-বিন্দু নির্ণয় :

সমীকরণ (iv)-এ, $v=\infty$ বসাইয়া পাই,

$$Au+B=0$$

বা, $u=-\frac{B}{A}$

$$\therefore \quad L_1F_1=-\frac{B}{A}$$

অনুরূপে সমীকরণ (vii)-এ, $u=\infty$ বসাইয়া পাই,

$$C-Av=0$$

বা, $v=\frac{C}{A}$

$$\therefore \quad L_2F_2=\frac{C}{A}$$

প্রথম ও দ্বিতীয় মুখ্য-বিন্দু নির্ণয় :

প্রথম লেন্স কর্তৃক বিবর্ধন $m_1=\frac{v'}{u}$

এবং দ্বিতীয় লেন্স কর্তৃক বিবর্ধন $m_2=\frac{v}{v'+a}$

$\therefore$ লব্ধ বিবর্ধন $m=m_1 \cdot m_2$

$$=\frac{v'}{u}\cdot\frac{v}{v'+a}$$

সমীকরণ (iii) হইতে পাই,

$$\frac{u}{v'}=uk_1+1$$

সমীকরণ (ii)-কে $(v'+a)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$$\frac{v'+a}{v}-1=k_2(v'+a)$$

$$=k_2\left(\frac{u}{uk_1+1}+a\right)$$

$$=k_2\frac{u+auk_1+a}{uk_1+1}$$

$$=k_2\frac{u(ak_1+1)+a}{uk_1+1}$$

$$\therefore \quad \frac{v'+a}{v}=k_2\frac{u(ak_1+1)+a}{uk_1+1}+1$$

$$=\frac{u(ak_1k_2+k_1+k_2)+(ak_2+1)}{uk_1+1}$$

$$=\frac{\text{A}u+\text{B}}{uk_1+1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{m}=\frac{u}{v'}\cdot\frac{v'+a}{v}$$

$$=(uk_1+1)\cdot\frac{\text{A}u+\text{B}}{uk_1+1}=\text{A}u+\text{B}$$

$m=1$ হইলে,

$$\text{A}u+\text{B}=1$$

বা, $u=\dfrac{1-\text{B}}{\text{A}}$

$$\therefore \quad \text{L}_1\text{H}_1=\frac{1-\text{B}}{\text{A}}$$

আবার,

$$\frac{1}{m}=\text{A}u+\text{B}$$

$$=\text{A}\frac{\text{B}v-\text{D}}{\text{C}-\text{A}v}+\text{B}$$

$$=\frac{\text{A}(\text{B}v-\text{D})+\text{B}(\text{C}-\text{A}v)}{\text{C}-\text{A}v}$$

$$=\frac{\text{BC}-\text{AD}}{\text{C}-\text{A}v}$$

$$=\frac{1}{\text{C}-\text{A}v}$$

$$\therefore \quad m=\text{C}-\text{A}v$$

$m=1$ হইলে,

$$\text{C}-\text{A}v=1$$

বা, $v=\dfrac{\text{C}-1}{\text{A}}$

$$\therefore \quad \text{L}_2\text{H}_2=\frac{\text{C}-1}{\text{A}}$$

কোন সমসত্ব মাধ্যমে লেন্স দুইটিকে স্থাপন করিলে নোডাল-বিন্দুদ্বয় মুখ্য বিন্দুদ্বয়ের সহিত মিলিত হয়।

পূর্বের গণনা হইতে H_1F_1 ও H_2F_2 নির্ণয় করা যায় :

$$H_1F_1 = L_1F_1 - L_1H_1 = -\frac{B}{A} - \frac{1-B}{A} = -\frac{1}{A}$$

$$H_2F_2 = L_2F_2 - L_2H_2 = \frac{C}{A} - \frac{C-1}{A} = \frac{1}{A}$$

অর্থাৎ, H_1F_1 এবং H_2F_2 এর মান সমান কিন্তু চিহ্ন বিপরীত।

হ্রস্বোত্তর প্রশ্নাবলী

Q. 1. μ প্রতিসরাঙ্কের কাচের প্রিজমের প্রতিসারক কোণ কত হইলে প্রিজমের মধ্য দিয়া কোন আলোকরশ্মি নির্গত হইবে না? প্রিজমটিকে জলে নিমজ্জিত করিলে ইহার মধ্য দিয়া পুনরায় আলোক নির্গত হইতে পারে কেন?

Q. 2. কোন প্রিজমের মধ্য দিয়া আলোকের বিচ্যুতি কোণ কি কি রাশির উপর নির্ভর করে?

Q. 3. আপতন কোণের যে কোন মানের জন্য প্রিজম হইতে কোন রশ্মি নির্গত না হইবার সর্ত কি?

Q. 4. 6° প্রতিসারক কোণের প্রিজমের জন্য আলোকরশ্মির বিচ্যুতি 3° হইলে প্রিজমের পদার্থের প্রতিসরাঙ্ক কত হইবে?

Q. 5. ক্রাউন কাচের ও ফ্লিন্ট কাচের প্রিজমের পার্থক্য কিরূপে ধরা যায়?

Q. 6. কোন লেন্সের দুই ফোকাস দূরত্বের মান কি সর্বদা সমান?

Q. 7. লেন্সের দরুণ বর্ণাপেরণ কিভাবে হয়?

Q. 8. −3D ক্ষমতার লেন্সের প্রকৃতি কি? ইহার ফোকাস দৈর্ঘ্য কত?

Q. 9. লেন্সের গোলকাপেরণ কি?

Q. 10. অবার্ণ লেন্সযুগ্ম কিভাবে গঠিত?

Q. 11. যৌগিক অভিনেত্রের সুবিধা কি?

Q. 12. দুইটি যৌগিক অভিনেত্রের নাম কর।

Q. 13. দূরবীক্ষণ যন্ত্রে ব্যবহৃত অভিনেত্রগুলিতে দুইটি লেন্স ব্যবহৃত হয় কেন?

Q. 14. রামস্‌ডেন অভিনেত্রকে পজিটিভ্ অভিনেত্র এবং হাইগেন্স অভিনেত্রকে নেগেটিভ্ অভিনেত্র বলে কেন?

Q. 15. চেহারাগত কি পার্থক্য দেখিয়া দূরবীক্ষণ ও অণুবীক্ষণ তফাৎ করা যায়?

Q. 16. অসীম দূরত্ব ফোকাসিং-এর ক্ষেত্রে নভোবীক্ষণের বিবর্ধন ক্ষমতা কত?

বর্ণানুক্রমিক সূচী

সাধারণ পদার্থবিদ্যা (General Physics)

ল

স

হ

শব্দবিজ্ঞান (Sound)

তাপ ও তাপগতিবিদ্যা (Heat and Thermodynamics)

জ্যামিতিক আলোক বিজ্ঞান (Geometrical Optics)